Štefan Schwabik
Verallgemeinerte lineare Differentialgleichungssysteme

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 2, 183--211

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108510`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

VERALLGEMEINERTE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Eingelangt am 3. Januar 1970)

In dieser Arbeit wollen wir die, von J. KURZWEIL in [3] aufgebaute, Theorie der verallgemeinerten Differentialgleichungen ergänzen und die Theorie der linearen Systeme, für diesen verallgemeinerten Begriff einer Differentialgleichung, entwickeln.

Fragen, die uns da interessieren werden, sind für den Fall der klassischen linearen Systeme von Differentialgleichungen wohlbekannt. Das lineare Differentialgleichungssystem, welches in dieser Arbeit untersucht wird, soll lineare Systeme beschreiben, welche allgemein Funktionen endlicher Variation als Lösungen zulassen. Untersuchungen in dieser Richtung wurden von D. WEXLER in der letzten Zeit durchgeführt und sind im Buch [1] zusammengefasst. In [1] wird das Problem mittels der Schwartzschen Distributionstheorie bearbeitet. Die in unserer Arbeit gegebene Methode, welche die in [3] angeführte Verallgemeinerung des Integralbegriffes zur Hilfe nimmt, gibt Ergebnisse für Systeme, welche allgemeiner als die von [1] sind. In der Arbeit [2] untersuchte T. H. HILDEBRANDT sogenannte lineare Differentio-Stieltjes Integralgleichungen, deren Theorie auf dem Lebesgue-Stieltjes Integral einer Funktion endlicher Variation bezüglich einer Funktion endlicher Variation beruht. Die Differentio-Stieltjes Integralgleichungen von Hildebrandt stehen unserem verallgemeinerten linearen Differentialgleichungssystem sehr nahe. Die beiden Theorien unterscheiden sich in der Benutzung von verschiedenen Integralbegriffen bei der Behandlung der, dem linearen System äquivalenten, Integralgleichung.

Zum Schluss der Arbeit führen wir einige Anwendungen der Theorie zu linearen Systemen mit Impulsen an, wobei die Impulse in den Koeffizienten der Matrix des Systemes und auch in deren rechten Seite enthalten sein können.

1. EINLEITUNG

Unsere Untersuchungen werden im n-dimensionalen Raum R^n durchgeführt, dessen Elemente der Form $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sind. Wir setzen voraus, dass dieser

Raum, mit der Norm $\|x\| = \max_i |x_i|$ versehen, einen normierten Raum bildet. Eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ versehen wir mit der entsprechenden Operatorennorm $\|\mathbf{A}\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, wobei a_{ij} das in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte der Matrix A stehende Element bezeichnet. Wenn $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix bezeichnet, dann ist $\|\mathbf{E}\| = 1$. Für die eben angeführte Norm einer Matrix gilt $\|\mathbf{AB}\| \leqq \|\mathbf{A}\| . \|\mathbf{B}\|$, wenn $\mathbf{B}$ eine $n \times n$-Matrix ist und für alle $i, j = 1, 2, \ldots, n$ ist $|a_{ij}| \leqq \|\mathbf{A}\|$.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die weiter durchgeführte Untersuchungen auch für andere Normen durchgeführt werden können, wenn diese die obigen Eigenschaften haben.

Sei ferner $-\infty < a < b < +\infty$. Sei $f(t)$ eine, für $t \in \langle a, b \rangle$ definierte, reelle Funktion und sei $a \leqq c \leqq d \leqq b$; mit $\operatorname{var}(\langle c, d \rangle; f)$ bezeichnen wir die Totalvariation der Funktion f im Intervall $\langle c, d \rangle$. Sei ferner noch $\mathbf{A}(t)$ für $t \in \langle a, b \rangle$ eine $n \times n$-Matrix, deren Elemente $a_{ij}(t)$ reelle Funktionen sind. Für $a \leqq c \leqq d \leqq b$ definieren wir die Zahl

$$\operatorname{var}(\langle c, d \rangle; \mathbf{A}) = \sup \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{A}(t_i) - \mathbf{A}(t_{i-1})\| ,$$

wobei wir das Supremum über alle mögliche Teilungen $D : c = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = d$ des Intervalles $\langle c, d \rangle$ nehmen und die obige Norm für die Matrizen benützen. Die Zahl $\operatorname{var}(\langle c, d \rangle; \mathbf{A})$ nennen wir Totalvariation der Matrix $\mathbf{A}(t)$ im Intervall $\langle c, d \rangle$. Offenbar gilt $\operatorname{var}(\langle c, d \rangle, a_{ij}) \leqq \operatorname{var}(\langle c, d \rangle, \mathbf{A})$ für alle $i, j = 1, 2, \ldots, n$, wobei $a_{ij}(t)$ die Elemente der Matrix $\mathbf{A}(t)$ sind.

Gleicherweise kann man auch für eine Vektorfunktion $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, welche für $t \in \langle a, b \rangle$ definiert ist, die Zahl $\operatorname{var}(\langle c, d \rangle; \boldsymbol{\varphi})$ definieren, wobei $a \leqq c \leqq d \leqq b$ ist. $\operatorname{var}(\langle c, d \rangle; \boldsymbol{\varphi})$ wird dann Totalvariation der Vektorfunktion $\boldsymbol{\varphi}(t)$ im Intervall $\langle c, d \rangle$ genannt. Wir nennen die Matrix $\mathbf{A}(t)$ bzw. den Vektor $\boldsymbol{\varphi}(t)$ endlicher Variation in $\langle a, b \rangle$, wenn $\operatorname{var}(\langle a, b \rangle; \mathbf{A}) < +\infty$ bzw. $\operatorname{var}(\langle a, b \rangle; \boldsymbol{\varphi}) < +\infty$ ist. Wir verabreden uns noch, dass eine für $t \in \langle a, +\infty)$ definierte Matrix $\mathbf{A}(t)$ bzw. Vektor $\boldsymbol{\varphi}(t)$ in $\langle a, +\infty)$ endlicher Variation genannt wird, wenn $\operatorname{var}(\langle c,d \rangle; \mathbf{A}) < +\infty$ bzw. $\operatorname{var}(\langle c, d \rangle; \boldsymbol{\varphi}) < +\infty$ ist, wenn $\langle c, d \rangle$ ein in $\langle a, +\infty)$ enthaltenes endliches, sonst beliebiges, Intervall ist.

Der Funktion $\operatorname{var}(\langle a, t \rangle; \mathbf{A})$ der Variablen $t \in \langle a, b \rangle$ ist offenbar genau dann unstetig, wenn eine der Funktionen $a_{ij}(t)$ unstetig ist. Wenn $a < t_1 < t_2$ ist, dann gilt offensichtlich $\operatorname{var}(\langle a, t_2 \rangle; \mathbf{A}) = \operatorname{var}(\langle a, t_1 \rangle; \mathbf{A}) + \operatorname{var}(\langle t_1, t_2 \rangle; \mathbf{A})$. Wenn $c \in \langle a, b \rangle$ ist, dann ist die Funktion $\operatorname{var}(\langle c, t \rangle; \mathbf{A})$ in $\langle c, b \rangle$ nichtfallend. Wenn $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$ ist, dann gilt

$$\|\mathbf{A}(t_2) - \mathbf{A}(t_1)\| \leqq |\operatorname{var}(\langle a, t_2 \rangle; \mathbf{A}) - \operatorname{var}(\langle a, t_1 \rangle; \mathbf{A})| .$$

Dieselben Eigenschaften hat offenbar auch die Variation einer Vektorfunktion $\boldsymbol{\varphi}(t)$.

Die weiteren Untersuchungen werden auf der, in [3] gegebenen, Verallgemeinerung des Perron-Stieltjesintegrales beruhen (vgl. Abs. 1 in [3]): Sei $c < d$; $\delta(t) > 0 : \langle c, d\rangle \to E_1$;

$$S = \{(\tau, t);\ c \leqq \tau \leqq d,\ \tau - \delta(\tau) \leqq t \leqq \tau + \delta(\tau)\}\,.$$

In S sei eine reelle endliche Funktion $U(\tau, t)$ definiert. Eine reelle Funktion $M(\tau)$, welche für $\tau \in \langle c, d\rangle$ definiert ist, nennen wir Oberfunktion zu $U(\tau, t)$, wenn es eine Menge $S_1 \subset S$, derselben Art wie S, gibt (d. h. S_1 ist soeben wie S, aber mit einer Funktion $\delta_1(t) : \langle c, d\rangle \to E_1$, $0 < \delta_1(t) \leqq \delta(t)$ definiert), sodass für $(\tau_0, \tau) \in S_1$ die Ungleichung

$$(\tau - \tau_0)\left(U(\tau_0, \tau) - U(\tau_0, \tau_0)\right) \leqq (\tau - \tau_0)\left(M(\tau) - M(\tau_0)\right)$$

gilt.

Eine reelle Funktion $m(\tau)$, welche für $\tau \in \langle c, d\rangle$ definiert ist, nennen wir Unterfunktion zu $U(\tau, t)$ wenn $-\ m(\tau)$ eine Oberfunktion zu $-\ U(\tau, t)$ in $\langle c, d\rangle$ ist. Wenn $M(\tau)$ eine Oberfunktion zu $U(\tau, t)$ und $m(\tau)$ eine Unterfunktion zu $U(\tau, t)$ in $\langle c, d\rangle$ ist, dann gilt $M(d) - M(c) \geqq m(d) - m(c)$. Wenn ferner die Funktion $U(\tau, t)$ derartig ist, dass

$$\inf_M\,[M(d) - M(c)] = \sup_m\,[m(d) - m(c)] = I$$

gilt, wobei man das Infimum bzw. das Supremum über alle Oberfunktionen M zu $U(\tau, t)$ in $\langle c, d\rangle$ bzw. über alle Unterfunktionen m zu $U(\tau, t)$ in $\langle c, d\rangle$ nimmt, dann wird die Funktion $U(\tau, t)$ im Intervall $\langle c, d\rangle$ integrierbar (im Sinne von Kurzweil) genannt und wir bezeichnen $I = \int_c^d DU(\tau, t)$. Bezeichnen wir weiter noch mit $\mathfrak{P}(\langle c, d\rangle)$ die Menge aller Funktionen $U(\tau, t)$, welche im Intervall $\langle c, d\rangle$ im obigen Sinne integrierbar sind.

Eine Vektorfunktion $\boldsymbol{U}(\tau, t) = (U_1(\tau, t), \ldots, U_n(\tau, t))$ nennen wir im Intervall $\langle c, d\rangle$ (im Sinne von Kurzweil) integrierbar, wenn $U_j(\tau, t) \in \mathfrak{P}(\langle c, d\rangle)$ für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ ist; wir schreiben dann $\boldsymbol{U}(\tau, t) \in \mathfrak{P}(\langle c, d\rangle)$ und legen $\int_c^d D\boldsymbol{U}(\tau, t) = (\int_c^d DU_1(\tau, t), \ldots, \int_c^d DU_n(\tau, t))$.

Die Fundamentaleigenschaften von diesem Integralbegriff sind in [3] festgelegt (vgl. Theorem 1,3,1 – 1,3,4 in [3]) z. B. das Integral ist ein lineares Funktional, es ist Intervalladitiv, usw. Wir führen noch weitere Eigenschaften an; es gilt.

Satz 1,1 (vgl. Theorem 1,3,5 in [3]). *Sei $\boldsymbol{U}(\tau, t)$ auf S definiert, sei $\boldsymbol{U} \in \mathfrak{P}(\langle c, \sigma\rangle)$ für $c < \sigma < d$ und es existiere der endliche Grenzwert*

$$\lim_{\sigma \to d-}\left[\int_c^\sigma D\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}(d, \tau) + \boldsymbol{U}(d, d)\right] = \boldsymbol{L}\,.$$

Dann ist $\boldsymbol{U} \in \mathfrak{P}(\langle c, d\rangle)$ und es gilt $\int_c^d D\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}$.

Satz 1,2 (vgl. Theorem 1,3,6 in [3]). *Sei* $\mathbf{U} \in \mathfrak{P}(\langle c, d\rangle)$, $\sigma_0 \in \langle c, d\rangle$. *Dann ist*

$$\lim_{\substack{\sigma \to \sigma_0 \\ \sigma \in \langle c,d\rangle}} \left[\int_c^\sigma D\mathbf{U} - \mathbf{U}(\sigma_0, \sigma) + \mathbf{U}(\sigma_0, \sigma_0)\right] = \int_c^{\sigma_0} D\mathbf{U}\,.$$

Daher gilt folgendes: $\int_c^\sigma D\mathbf{U}(\tau, t)$ *ist als eine Funktion der Variablen* σ *im Punkt* σ_0 *genau dann stetig, wenn die Funktion* $\mathbf{U}(\sigma_0, t)$ *in der Variablen* t *im Punkt* $t = \sigma_0$ *stetig ist.*

Wenn ferner $\mathbf{U}_1(\sigma_0, \sigma) - \mathbf{U}_1(\sigma_0, \sigma_0) = \mathbf{U}_2(\sigma_0, \sigma) - \mathbf{U}_2(\sigma_0, \sigma_0)$ ist für $(\sigma_0, \sigma) \in S$, wobei die Menge S die oben beschriebenen Eigenschaften hat, dann schriebe man $\mathbf{U}_1 \doteqdot \mathbf{U}_2$ und nenne man die Funktionen $\mathbf{U}_1$ und $\mathbf{U}_2$ fast identisch. Es gilt: *Wenn* $\mathbf{U}_1 \doteqdot \mathbf{U}_2$ *und* $\mathbf{U}_1 \in \mathfrak{P}(\langle c, d\rangle)$, *dann ist* $\mathbf{U}_2 \in \mathfrak{P}(\langle c, d\rangle)$ *und* $\int_c^d D\mathbf{U}_1 = \int_c^d D\mathbf{U}_2$ (vgl. Lemma 1,3,1 in [3]).

Setze man nun voraus, dass $f(\tau)$ eine für $\tau \in \langle c, d\rangle$ definierte endliche reelle Funktion ist und dass $\varphi(t)$ eine reelle Funktion endlicher Variation im Intervall $\langle c, d\rangle$ ist. Lege man $U(\tau, t) = f(\tau)\,\varphi(t)$; dann gilt: *Es ist* $U \in \mathfrak{P}(\langle c, d\rangle)$ *genau dann, wenn das Perron-Stieltjesintegral P.S.* $\int_c^d f(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau)$ *existiert und es gilt* (vgl. Note 1,1,2 in [3])

$$\int_c^d DU(\tau, t) = P.S. \int_c^d f(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau)\,.$$

Daher folgt: *Wenn* $\mathbf{U}_1(\tau, t) = \psi(t)$ *ist, wobei* $\psi(t) : \langle a, b\rangle \to E_n$ var $(\langle a, b\rangle, \psi) < +\infty$ *und* $\mathbf{U}_2 \doteqdot \mathbf{U}_1$, *dann ist* $\mathbf{U}_2 \in \mathfrak{P}(\langle c, d\rangle)$ *für jedes* $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$ *und es gilt*

$$\int_c^d D\mathbf{U}_2(\tau, t) = \psi(d) - \psi(c)\,.$$

Beweis. Diese Behauptung folgt sofort daher, dass das Perron-Stieltjesintegral $\int_c^d d\psi(\tau) = \psi(d) - \psi(c)$ existiert und, nach dem Lemma 1,3,1 von [3] für fast identische Funktionen, dem verallgemeinerten Integral $\int_c^d D\mathbf{U}_2(\tau, t)$ gleich ist.

Es gilt weiter

Satz 1,3 (vgl. Lemma 3,1 in [4]). *Sei* $\mathbf{U}(\tau, t) : S \to E_n$, $\mathbf{U} \in P(\langle c, d\rangle)$, $V(\tau, t) : S \to E_1$, $V \in P(\langle c, d\rangle)$ *und es existiere für jedes* $\sigma \in \langle c, d\rangle$ *ein* $\delta(\sigma) > 0$, *sodass für* $\sigma_1 \in \langle c, d\rangle \cap \langle \sigma - \delta(\sigma), \sigma + \delta(\sigma)\rangle$ *die Ungleichung*

$$|\sigma_1 - \sigma| \,.\, \|\mathbf{U}(\sigma, \sigma_1) - \mathbf{U}(\sigma, \sigma)\| \leqq (\sigma_1 - \sigma)\,(V(\sigma, \sigma_1) - V(\sigma, \sigma))$$

gilt; dann ist

$$\left\|\int_c^d D\mathbf{U}(\tau, t)\right\| \leqq \int_c^d DV(\tau, t)\,.$$

Wenn speziell für $t_1, t_2 \in \langle c, d\rangle$ *die Ungleichung*

$$\|\mathbf{U}(\tau, t_2) - \mathbf{U}(\tau, t_1)\| \leqq \varphi(\tau)\,|h(t_2) - h(t_1)|$$

gilt, wobei $h(\tau)$ in $\langle c, d\rangle$ eine beschränkte Funktion endlicher Variation ist und wenn P.S. $\int_c^d \varphi(\tau)\, dh(\tau)$ existiert, dann ist

$$\left\| \int_c^d D\mathbf{U}(\tau, t) \right\| \leqq P.S. \int_c^d \varphi(\tau)\, dh(\tau)\,.$$

Es seien reelle Funktionen $\varphi(s)$, $s \in \langle a, b\rangle$, $\psi(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$ gegeben, welche endlicher Variation in ihren Definitionsintervallen sind. Sei ferner $f(\sigma, \tau)$ eine reelle Funktion, welche für $(\sigma, \tau) \in \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ definiert ist. Legen wir $U(\sigma, s; \tau, t) = \varphi(s) f(\sigma, \tau)\, \psi(t)$. Für Funktionen von diesem Typ werden wir weiter die Formel

$$(*) \qquad \int_a^b D_s \int_c^d D_t U(\sigma, s; \tau, t) = \int_c^d D_t \int_a^b D_s U(\sigma, s; \tau, t)$$

brauchen, welche die Möglichkeit der Umtauschung iterierter verallgemeinerter Integrale für Funktionen der oben beschriebener Form angibt (die Symbole D_t bzw. D_s in der Formel deuten nur an, in Bezug auf welche Variablen man integriert). Mit Rücksicht auf den angeführten Zusammenhang des verallgemeinerten Kurzweilintegrales mit dem Perron-Stieltjesintegral und mit Rücksicht auf die Form der Funktion $U(\sigma, s; \tau, t)$ wird die Formel (*) z. B. dann gelten, wenn die Voraussetzun gen des Fubinisatzes für das Perron Stieltjesintegral $P.S. \int_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle} f d\mu_{\varphi\psi}$ erfüllt sind, wobei das Mass $\mu_{\varphi\psi}$ mittels der, üblicherweise durch die Funktionen φ und ψ gebildeten, additiven Intervallfunktion bestimmt ist. (d.h. wenn $I = \langle a', b'\rangle \times \langle c', d'\rangle \subset \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ ist, dann ist $\mu_{\varphi\psi}(I) = (\varphi(b') - \varphi(a'))(\psi(d') - \psi(c'))$. Insbesondere gilt die Formel (*) in dem Fall, wenn die Funktion $f(\sigma, \tau)$ in ihrem Definitionsbereich $\mu_{\varphi\psi}$-messbar und beschränkt ist.

Sei weiter $-\infty < a < b < +\infty$. Für $t \in \langle a, b\rangle$ sei $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ eine $n \times n$-Matrix, deren Elemente $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ von links stetig sind und sei $\operatorname{var}(\langle a, b\rangle, \mathbf{A}) < +\infty$. Ferner sei

$$M_K = \{\mathbf{x} \in R^n, \|\mathbf{x}\| < K\}$$

für $K > 0$. Lege man $G_K = M_K \times (a, b)$ und sei für $(\mathbf{x}, t) \in G_K$ die Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}$ definiert; es gilt

$$\|\Delta_t^\sigma \mathbf{F}(\mathbf{x}, t_0)\| = \|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t_0 + \sigma) - \mathbf{F}(x, t_0)\| \leqq \|\mathbf{A}(t_0 + \sigma) - \mathbf{A}(t_0)\| \,.\, \|\mathbf{x}\| \leqq$$
$$\leqq K\|\mathbf{A}(t_0 + \sigma) - \mathbf{A}(t_0)\| \leqq K(\operatorname{var}(\langle a, t_0 + \sigma\rangle; \mathbf{A}) - \operatorname{var}(\langle a, t_0\rangle; \mathbf{A}))$$

für $(\mathbf{x}, t_0), (\mathbf{x}, t_0 + \sigma) \in G_K$ und

$$\|\Delta_t^\sigma \Delta_x^y \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t_0)\| = \|\Delta_t^\sigma \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}, t_0) - \Delta_t^\sigma \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t_0)\| = \|[\mathbf{A}(t_0 + \sigma) - \mathbf{A}(t_0)]\, \mathbf{y}\| \leqq$$
$$\leqq \|\mathbf{y}\| \,.\, [\operatorname{var}(\langle a, t_0 + \sigma\rangle; \mathbf{A}) - \operatorname{var}(\langle a, t_0\rangle; \mathbf{A})]$$

für $(\mathbf{x}_0, t_0)$, $(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}, t_0)$, $(\mathbf{x}_0, t_0 + \sigma)$, $(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}, t_0 + \sigma) \in G_K$.

Die Funktion var $(\langle a, t\rangle; \mathbf{A})$ und ebenfalls auch K var $(\langle a, t\rangle; \mathbf{A})$ für $K > 0$ ist in $\langle a, b\rangle$ von links stetig, nichtfallend und beschränkt. Nach den obigen Ungleichungen ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \in \mathscr{F}(G_K, \ \text{var}\,(\langle a, t\rangle; \mathbf{A})), \text{ wenn } K \leqq 1 \text{ ist,}$$

und

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \in \mathscr{F}(G_K, K \ \text{var}\,(\langle a, t\rangle; \mathbf{A})), \text{ wenn } K > 1 \text{ ist}$$

(die Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, h(t))$, wo $h(t)$ eine von links stetige, endliche nichtfallende Funktion ist wurde in [4] und [5] definiert und untersucht). In [4] ist folgendes bewiesen: Wenn $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \in \mathscr{F}(G, h(t))$ ist, wobei $G \subset R^n \times \langle a, b\rangle$ eine offene Menge ist und wo $h(t)$ eine reelle nichtfallende von links stetige beschränkte Funktion in $\langle a, b\rangle$ ist und wenn $\varphi(\tau) : \langle c, d\rangle \to R^n$, $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle, (\varphi(\tau), \tau) \in G$ für $\tau \in \langle c, d\rangle$ soeine Funktion ist, dass

$$\|\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)\| \leqq |h_1(\tau_2) - h_1(\tau_1)|$$

für $\tau_1, \tau_2 \in \langle c, d\rangle$ ist, wobei $h_1(\tau)$ eine reelle nichtfallende von links stetige beschränkte Funktion in $\langle c, d\rangle$ ist, dann existiert das Integral $\int_c^d D\mathbf{F}(\varphi(\tau), t)$ und dieses kann sogar mit Hilfe gewisser Integralsummen angenähert werden (vgl. Theorem 1,1 in [4] bzw. den Satz auf Seite 405 in [5]).

Sei nun $\varphi(\tau) : \langle a, b\rangle \to R^n$, $\varphi(\tau) = (\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau))$, var $(\langle a, b\rangle, \varphi) < +\infty$, $\varphi_j(\tau)$ von links stetig, $j = 1, 2, \ldots, n$. Die Funktion var $(\langle a, t\rangle, \varphi)$ ist in der Variablen $t \in \langle a, b\rangle$ offenbar nichtfallend, beschränkt und von links stetig und wenn $\langle c, d\rangle \subset \subset \langle a, b\rangle$ ist und $\tau_1, \tau_2 \in \langle c, d\rangle$ gilt, dann ist die Ungleichung

$$\|\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)\| \leqq |\text{var}\,(\langle a, \tau_2\rangle; \varphi) - \text{var}\,(\langle a, \tau_1\rangle; \varphi)|$$

in Kraft und ferner gilt auch

$$\|\varphi(\tau)\| \leqq \|\varphi(a)\| + \text{var}\,(\langle a, \tau\rangle; \varphi) < \|\varphi(a)\| + \text{var}\,(\langle a, b\rangle; \varphi) + 1 = K < +\infty$$

für alle $\tau \in \langle a, b\rangle$. Also ist $(\varphi(\tau), \tau) \in G_K$ für $\tau \in \langle c, d\rangle$. Nach dem obigen existiert also das Integral $\int_c^d D\mathbf{A}(t)\, \varphi(\tau)$ nachdem $\mathbf{A}(t)\, \mathbf{x} \in \mathscr{F}(G_K, K \ \text{var}\,(\langle a, t\rangle; \mathbf{A}))$ ist. Daher folgt sofort das spezielle Ergebnis:

Wenn $a(\tau)$ und $\varphi(\tau)$ in $\langle a,b\rangle$ definierte reelle Funktionen endlicher Variation und von links stetig in $\langle a, b\rangle$ sind, dann existiert das Perron-Stieltjesintegral $P.S. \int_c^d \varphi(\tau)\, da\,(\tau)$ in jedem $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$ nachdem das verallgemeinerte Integral $\int_c^d D[a(t)\, \varphi(\tau)]$ existiert.

Wenn weiter die Funktion $\varphi(\tau) : \langle c, d\rangle \to R^n$, $\varphi_j(\tau)$, $j = 1, \ldots, n$ von links stetig in $\langle c, d\rangle$ ist, dann gilt für alle $(t_1, \tau), (t_2, \tau) \in \langle c, d\rangle \times \langle c, d\rangle$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\|[\mathbf{A}(t_2) - \mathbf{A}(t_1)]\, \varphi(\tau)\| &\leqq \|\mathbf{A}(t_2) - \mathbf{A}(t_1)\| \,.\, \|\varphi(\tau)\| \leqq \\ &\leqq \max_{\tau \in \langle c, d\rangle} \|\varphi(\tau)\| \,.\, |\text{var}\,(\langle a, t_2\rangle; \mathbf{A}) - \text{var}\,(\langle a, t_1\rangle; \mathbf{A})|\end{aligned}$$

und nach dem Satz 1,3 ist daher

$$\left\| \int_c^d DA(t)\,\varphi(\tau) \right\| \leqq \max_{\tau \in \langle c, d \rangle} \|\varphi(\tau)\| \, . \int_c^d d(\operatorname{var}(\langle a, \tau \rangle; \mathbf{A}) =$$

$$= \max_{\tau \in \langle c, d \rangle} \|\varphi(\tau)\| \, . \left| \operatorname{var}(\langle a, d \rangle; \mathbf{A}) - \operatorname{var}(\langle a, c \rangle; \mathbf{A}) \right| =$$

$$= \max_{\tau \in \langle c, d \rangle} \|\varphi(\tau)\| \, . \left| \operatorname{var}(\langle c, d \rangle; \mathbf{A}) \right| .$$

2. DAS VERALLGEMEINERTE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM. EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT DER LÖSUNGEN

Wir werden weiterhin voraussetzen, dass $-\infty < a < b < +\infty$ ist. Sei $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ eine für $t \in \langle a, b \rangle$ definierte $n \times n$-Matrix, $\operatorname{var}(\langle a, b \rangle; \mathbf{A}) < +\infty$, die Elemente $a_{ij}(t)$ von $\mathbf{A}(t)$ seien von links stetige Funktionen im Intervall $\langle a, b \rangle$ und sei $\mathbf{b}(t)$ ein für $t \in \langle a, b \rangle$ definierter n-Vektor, $\operatorname{var}(\langle a, b \rangle, \mathbf{b}) < \infty$, dessen Elemente von links stetige Funktionen im Intervall $\langle a, b \rangle$ sind.

Wir wollen die verallgemeinerten linearen Differentialgleichungen

$$\text{(NH)} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = D[\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)]$$

und

$$\text{(H)} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = D[\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}]$$

im Intervall $\langle a, b \rangle$ untersuchen.

Sei $\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle$. Eine Vektorfunktion $\mathbf{x}(\tau) = (x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))$, welche für $\tau \in \langle c, d \rangle$ definiert ist, nennen wir eine Lösung der Gleichung (NH) (bzw. (H)) in $\langle c, d \rangle$, wenn für beliebige $\tau_1, \tau_2 \in \langle c, d \rangle$, $\tau_1 < \tau_2$ die Gleichung

$$\text{(2,1)} \qquad \mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{x}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} D[\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{b}(t)] =$$

$$= \mathbf{x}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} D[\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(\tau)] + \mathbf{b}(\tau_2) - \mathbf{b}(\tau_1)$$

(bzw.

$$\text{(2,2)} \qquad \mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{x}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} D[\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(\tau)] \Big)$$

gilt (vgl. [3] Absatz 2.).

Wir befassen uns im Weiteren mit der Existenz einer Lösung $\mathbf{x}(\tau)$ der Gleichung (NH) für gegebene $\tilde{\mathbf{x}} \in R^n$, $\tilde{t} \in \langle a, b \rangle$, wobei $\mathbf{x}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$ gelten soll. Es gilt folgender

Satz 2,1. *Wenn* $\tilde{\mathbf{x}} \in R^n$, $\bar{t} \in \langle a, b\rangle$ *ist, dann existiert im Intervall* $\langle \bar{t}, b\rangle$ *eine Lösung* $\mathbf{x}(\tau)$ *der Gleichung* (NH), *für welche* $\mathbf{x}(\bar{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$ *ist.*

Beweis. Für eine Funktion $\varphi(\tau) : \langle \bar{t}, b\rangle \to R^n$, $\operatorname{var}(\langle \bar{t}, b\rangle; \varphi) < +\infty$, $\varphi(\tau)$ von links stetig in $\langle \bar{t}, b\rangle$ definieren wir den Operator

$$T\varphi = \tilde{\mathbf{x}} + \int_{\bar{t}}^{\sigma} D\mathbf{A}(t)\, \varphi(\tau) + \mathbf{b}(\sigma) - \mathbf{b}(\bar{t})\,. \tag{2,3}$$

Das in diesem Operator auftretende Integral existiert offenbar nach den Untersuchungen vom Absatz 1. Für die Funktion $\psi(\sigma) = (T\varphi)(\sigma) : \langle \bar{t}, b\rangle \to R^n$ gilt ($\sigma_1, \sigma_2 \in \langle \bar{t}, b\rangle$):

$$\begin{aligned} \|\psi(\sigma_2) - \psi(\sigma_1)\| &= \left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\mathbf{A}(t)\, \varphi(\tau) + \mathbf{b}(\sigma_2) - \mathbf{b}(\sigma_1) \right\| \leqq \\ &\leqq \max_{\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle} \|\varphi(\tau)\| \,.\, \left|\operatorname{var}(\langle a, \sigma_2\rangle; \mathbf{A}) - \operatorname{var}(\langle a, \sigma_1\rangle; \mathbf{A})\right| + \\ &\qquad + \left|\operatorname{var}(\langle a, \sigma_2\rangle; \mathbf{b}) \operatorname{var}(\langle a, \sigma_1\rangle; \mathbf{b})\right| \end{aligned} \tag{2.4}$$

und daher sehen wir sofort, dass $\psi(\sigma)$ von links stetig sein muss (nachdem $\operatorname{var}(\langle a, \sigma\rangle; \mathbf{A})$ und $\operatorname{var}(\langle a, \sigma\rangle; \mathbf{b})$ von links stetig sind) und dass $\operatorname{var}(\langle \bar{t}, b\rangle, \psi) < +\infty$ ist. Die Unstetigkeiten von $\psi(\sigma)$ fallen mit denen von $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ zusammen.

Wir definieren nun eine Folge von Funktionen

$$\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \quad \varphi_k(\tau) : \langle \bar{t}, b\rangle \to R^n \tag{2,5}$$

folgenderweise:

Sei $\varphi_0(\tau) = \tilde{\mathbf{x}}$, $\tau \in \langle \bar{t}, b\rangle$ und

$$\varphi_{k+1} = T\varphi_k \tag{2,6}$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$ Bezeichnen wir noch der Kürze wegen $h(\tau) = \operatorname{var}(\langle a, \tau\rangle; \mathbf{A})$ und $\operatorname{var}(\langle a, b\rangle; \mathbf{b}) = L < +\infty$. $h(\tau)$ ist eine nichtnegative von links stetige nichtfallende reelle Funktion im Intervall $\langle a, b\rangle$. Es ist bekannt, dass wenn $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, $c < d$ ist, dann gilt

$$\int_c^d h^k(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau) \leqq \frac{1}{k+1} \left[h^{k+1}(d) - h^{k+1}(c)\right] \tag{2,7}$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$ (vgl. Lemma 3,3 in [4]). Wenn man voraussetzt, dass die Funktion alle obigen Eigenschaften hat, aber anstatt von links stetig von rechts stetig ist, dann kann mittels der, in [4] angeführten, Methode nach einer unwesentlichen Abänderung, bewiesen werden, dass die Ungleichung (2,7) mit dem umgekehrten Zeichen der Ungleichheit gilt. Für eine stetige Funktion $h(\tau)$ mit den obigen Eigenschaften gilt also (2,7) mit dem Gleichheitszeichen.

Für unseren Fall gilt nach (2,7) offenbar

$$(2,8)\qquad \int_c^d [h(\tau) - h(c)]^k \, dh(\tau) = \int_c^d [h(\tau) - h(c)]^k \, d[h(\tau) - h(c)] \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{k+1} [h(d) - h(c)]^{k+1} .$$

Den Eigenschaften der Elemente der Folge (2,5) nach gilt ($\sigma \in \langle \bar{t}, b \rangle$)

$$(2,9)\qquad \|\varphi_1(\sigma) - \varphi_0(\sigma)\| \leqq \left\| \int_{\bar{t}}^{\sigma} DA(t)\, \tilde{x} \right\| + \|b(\sigma) - b(\bar{t})\| \leqq$$
$$\leqq \|A(\sigma) - A(\bar{t})\| \,.\, \|\tilde{x}\| + \|b(\sigma) - b(\bar{t})\| \leqq (h(\sigma) - h(\bar{t}))\, \|\tilde{x}\| + L \,.$$

Nach (2,6) (2,8) und (2,9) ist ferner ($\sigma \in \langle \bar{t}, b \rangle$)

$$\|\varphi_2(\sigma) - \varphi_1(\sigma)\| = \|(T\varphi_1)(\sigma) - (T\varphi_0)(\sigma)\| = \left\| \int_{\bar{t}}^{\sigma} DA(t)\, [\varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau)] \right\| \leqq$$
$$\leqq \int_{\bar{t}}^{\sigma} \|\varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau)\| \, dh(\tau) \leqq \|\tilde{x}\| \int_{\bar{t}}^{\sigma} (h(\tau) - h(\bar{t}))\, dh(\tau) + L \int_{\bar{t}}^{\sigma} dh(\tau) \leqq$$
$$\leqq \|\tilde{x}\| \, \tfrac{1}{2}[h(\sigma) - h(\bar{t})]^2 + L[h(\sigma) - h(\bar{t})] \,.$$

Ebenso ist weiter auch ($\sigma \in \langle \bar{t}, b \rangle$)

$$\|\varphi_3(\sigma) - \varphi_2(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x}\| \,.\, \frac{1}{3.2} \,.\, [h(\sigma) - h(\bar{t})]^3 + L \,.\, \tfrac{1}{2}[h(\sigma) - h(\bar{t})]^2$$

und induktionsweise erhält man dann ($\sigma \in \langle \bar{t}, b \rangle$, $k = 1, 2, \ldots$):

$$(2,10)\quad \|\varphi_k(\sigma) - \varphi_{k-1}(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x}\| \,.\, \frac{1}{k!} [h(\sigma) - h(\bar{t})]^k + L \frac{1}{(k-1)!} [h(\sigma) - h(\bar{t})]^{k-1} .$$

Daher gilt auch ($\sigma \in \langle \bar{t}, b \rangle$)

$$(2,11)\quad \|\varphi_k(\sigma) - \varphi_{k-1}(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x}\| \,.\, \frac{1}{k!} [h(b) - h(\bar{t})]^k + L \frac{1}{(k-1)!} [h(b) - h(\bar{t})]^{k-1}$$

für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$ Ferner gilt nach (2,11) für alle $\sigma \in \langle \bar{t}, b \rangle$

$$\|\varphi_k(\sigma) - \tilde{x}\| = \|\varphi_k(\sigma) - \varphi_0(\sigma)\| \leqq \sum_{i=1}^{k} \|\varphi_i(\sigma) - \varphi_{i-1}(\sigma)\| \leqq$$
$$\leqq \|\tilde{x}\| \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} [h(b) - h(\bar{t})]^i + L \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(i-1)!} [h(b) - h(\bar{t})]^{i-1}$$

und also

$$(2,12) \qquad \|\varphi_k(\sigma)\| \leqq \|\tilde{\mathbf{x}}\| + \|\tilde{\mathbf{x}}\| \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} [h(b) - h(\tilde{t})]^i + L \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} [h(b) - h(\tilde{t})]^i =$$

$$= \|\tilde{\mathbf{x}}\| \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} [h(b) - h(\tilde{t})]^i + L \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} [h(b) - h(\tilde{t})]^i \leqq (\|\tilde{\mathbf{x}}\| + L)\, e^{h(b)-h(\tilde{t})}$$

für alle $\sigma \in \langle \tilde{t}, b \rangle$ und jedes ganze k. Nach (2,4) und (2,12) ist

$$(2,13) \qquad \|\varphi_k(\sigma_2) - \varphi_k(\sigma_1)\| \leqq (\|\tilde{\mathbf{x}}\| + L)\, e^{h(b)-h(\tilde{t})} |h(\sigma_2) - h(\sigma_1)| + \\ + |\mathrm{var}\,(\langle a, \sigma_2 \rangle; \mathbf{b}) - \mathrm{var}\,(\langle a, \sigma_1 \rangle; \mathbf{b})|$$

für jedes ganze $k \geqq 0$. Daher sehen wir sofort, dass die möglichen Unstetigkeitspunkte der Funktion φ_k für jedes ganze k nur in den Unstetigkeitspunkten von $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ liegen können, dass φ_k von links stetig in $\langle \tilde{t}, b \rangle$ ist und dass

$$\mathrm{var}\,(\langle \tilde{t}, b \rangle; \varphi_k) \leqq (\|\tilde{\mathbf{x}}\| + L)\, e^{h(b)-h(\tilde{t})}\, \mathrm{var}\,(\langle \tilde{t}, b \rangle; \mathbf{A}) + \mathrm{var}\,(\langle \tilde{t}, b \rangle; \mathbf{b}) < +\infty$$

gilt.

Nachdem die in (2,10) auf der rechten Seite stehenden Zahlen eine konvergente Reihe bilden, strebt die Folge von (2,5) gleichmässig im Intervall $\langle \tilde{t}, b \rangle$ zu einer Funktion $\varphi(\tau) : \langle \tilde{t}, b \rangle \to R^n$. Für diese Funktion gilt für $\sigma_1, \sigma_2 \in \langle \tilde{t}, b \rangle$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\|\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)\| \leqq \|\varphi(\sigma_2) - \varphi_k(\sigma_2)\| + \|\varphi_k(\sigma_2) - \varphi_k(\sigma_1)\| + \|\varphi_k(\sigma_1) - \varphi(\sigma_1)\| \leqq \\ \leqq 2\varepsilon + \|\varphi_k(\sigma_2) - \varphi_k(\sigma_1)\| \leqq 2\varepsilon + (\|\tilde{\mathbf{x}}\| + L)\, e^{h(b)-h(\tilde{t})} |h(\sigma_2) - h(\sigma_1)| + \\ + |\mathrm{var}\,(\langle a, \sigma_2 \rangle, \mathbf{b}) - \mathrm{var}\,(\langle a, \sigma_1 \rangle, \mathbf{b})|\,,$$

(k ist beliebig).

Daher ist klar, dass

$$\|\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)\| \leqq (\|\tilde{\mathbf{x}}\| + L)\, e^{h(b)-h(\tilde{t})} |h(\sigma_2) - h(\sigma_1)| + \\ + |\mathrm{var}\,(\langle a, \sigma_2 \rangle; \mathbf{b}) - \mathrm{var}\,(\langle a, \sigma_1 \rangle; \mathbf{b})|$$

für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in \langle \tilde{t}, b \rangle$ gelten muss und also ist φ von links stetig, die möglichen Unstetigkeitspunkte der Funktion $\varphi(\tau)$ im Intervall $\langle \tilde{t}, b \rangle$ können nur in der Menge der Unstetigkeitspunkte von $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ im Intervall $\langle \tilde{t}, b \rangle$ liegen und es gilt $\mathrm{var}\,(\langle \tilde{t}, b \rangle; \varphi) < +\infty$. Ferner ist offenbar auch $T\varphi$ für jedes $\sigma \in \langle \tilde{t}, b \rangle$ definiert und es gilt

$$\|(T\varphi_k)(\sigma) - (T\varphi)(\sigma)\| = \left\| \int_{\tilde{t}}^{\sigma} D[\mathbf{A}(t)(\varphi_k(\tau) - \varphi(\tau))] \right\| \leqq$$

$$\leqq \max_{\tau \in \langle \tilde{t}, b \rangle} \|\varphi_k(\tau) - \varphi(\tau)\| \int_{\tilde{t}}^{\sigma} dh(\tau) \leqq \max_{\tau \in \langle \tilde{t}, b \rangle} \|\varphi_k(\tau) - \varphi(\tau)\| \, (h(b) - h(\tilde{t}))$$

und also ist auch die Folge $T\varphi_0, T\varphi_1, T\varphi_2, \ldots$ gleichmässig in $\langle \tilde{t}, b \rangle$ konvergent. Nach dem Grenzübergang $k \to \infty$ in (2,6) ergibt sich die Gleichung $\varphi = T\varphi$ d. h. die Funktion φ erfüllt (2,1) mit $\tau_1 = \tilde{t}$, $\tau_2 = \sigma$ und es ist $\varphi(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$ (vgl. die Definition (2,3) des Operators T); die soeben konstruierte Funktion ist also im Intervall $\langle \tilde{t}, b \rangle$ eine Lösung der Gleichung (NH) und es gilt für diese $\varphi(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$.

Bemerkung 2,1. Wenn man voraussetzt, dass die Matrix $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$, $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$ von links stetig und die Vektorfunktion $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), \ldots, b_k(t))$, $b_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ von links stetig, für $t \in \langle a, +\infty)$ definiert sind und in $\langle a, +\infty)$ auch endlicher Variation sind, dann kann man das Verfahren vom Beweis des Satzes 2,1 für ein beliebiges $\tilde{t} < b < +\infty$ im Intervall $\langle \tilde{t}, b \rangle$ durchführen und so die Existenz einer Lösung $\varphi(\tau)$ der Gleichung (NH) mit $\varphi(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$ im Intervall $\langle \tilde{t}, +\infty)$ sichern.

Bemerkung 2,2. Wenn, zusätzlich zu den Voraussetzungen von der Einleitung dieses Absatzes, noch die Matrix $\mathbf{A}(t)$ stetig (d. h. $a_{ij}(t)$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ stetig) im Intervall $\langle a, b \rangle$ ist, dann kann man das Verfahren vom Beweis des Satzes unverändert auch für das Intervall $\langle a, \tilde{t} \rangle$ benützen und beweisen, dass die Lösung $\varphi(\tau)$ der Gleichung (NH) mit $\varphi(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$ auch in diesem Intervall existieren wird. Im Fall, der da untersucht wird, ist dieses aber nicht erfüllt. In [4], (Note 2,1) wurde, gezeigt dass wenn z. B. $n = 1$ ist, $\langle a, b \rangle = \langle -1, 1 \rangle$ $A(t) = 1$ für $-1 < t \leqq 0$, $A(t) = 0$ für $0 < t < 1$, dann kann die Lösung $x(\tau)$ der Gleichung (H) mit $x(\tilde{t}) = \tilde{x}$, $\tilde{x} \neq 0$ $0 < \tilde{t} < 1$ allgemein für $\tau \leqq 0$ nicht definiert werden.

Es gilt allgemein folgendes: Sei $a < t_0 < \tilde{t} < b$ und sei die Lösung $\mathbf{x}(\tau)$ der Gleichung (NH), für welche $\mathbf{x}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$ ist, im Intervall $(t_0, b \rangle$ schon bestimmt; dann ist offenbar $\mathbf{x}(t_0+) = \lim_{\tau \to t_0} \mathbf{x}(\tau)$ bekannt. Wenn man die Lösung $\mathbf{x}(\tau)$ auch für $\tau = t_0$ bestimmen kann, dann gilt nach Satz 1,1

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_0+) - \mathbf{x}(t_0) &= \lim_{\delta \to 0+} [\mathbf{A}(t_0 + \delta) - \mathbf{A}(t_0)]\, \mathbf{x}(t_0) + \Delta^+ \mathbf{b}(t_0) = \\ &= \Delta^+ \mathbf{A}(t_0)\, \mathbf{x}(t_0) + \Delta^+ \mathbf{b}(t_0)\,, \end{aligned}$$

wobei wir $\Delta^+ \mathbf{A}(t_0) = \mathbf{A}(t_0+) - \mathbf{A}(t_0)$, $\Delta^+ \mathbf{b}(t_0) = \mathbf{b}(t_0+) - \mathbf{b}(t_0)$ bezeichnen. Also muss $[\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t_0)]\, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0+) - \Delta^+ \mathbf{b}(t_0)$ gelten. Wenn die Matrix $[\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t_0)]$ keine inverse hat, dann ist es offenbar nicht möglich den Wert $\mathbf{x}(t_0)$ eindeutig zu bestimmen.

Satz 2,2. *Sei* $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in R^n$, $\tilde{t} \in \langle a, b \rangle$ *und sei* $\mathbf{x}(\tau)$ *bzw.* $\mathbf{y}(\tau)$ *eine Lösung der Gleichung* (NH) *in* $\langle \tilde{t}, b \rangle$ *sodass* $\mathbf{x}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$ *bzw.* $\mathbf{y}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{y}}$ *gilt. Dann ist*

$$\|\mathbf{x}(\sigma) - \mathbf{y}(\sigma)\| \leqq \|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}\| \exp(\operatorname{var}(\langle \tilde{t}, \sigma \rangle; \mathbf{A})) \tag{2,14}$$

für alle $\sigma \in \langle \tilde{t}, b \rangle$.

Beweis. Es gilt für alle $\sigma \in \langle \tilde{t}, b \rangle$ die Ungleichung

$$\|x(\sigma) - y(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| + \left\| \int_{\tilde{t}}^{\sigma} DA(t) [x(\tau) - y(\tau)] \right\| \leqq$$

$$\leqq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| + \int_{\tilde{t}}^{\sigma} \|x(\tau) - y(\tau)\| \, dh(\tau)$$

nach dem Satz 1,3, wobei $h(\tau) = \operatorname{var}(\langle a, \tau \rangle; A)$ ist. Nach dem Lemma 2,3 von [5] gilt also $\|x(\sigma) - y(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \exp(h(\sigma) - h(\tilde{t}))$ für alle $\sigma \in \langle \tilde{t}, b \rangle$ und also auch (2,14).

Bemerkung 2,3. Wenn $\tilde{x} = \tilde{y}$ ist, dann ist nach (2,14) vom Satz 2,2 $x(\sigma) = y(\sigma)$ für $\sigma \in \langle \tilde{t}, b \rangle$ und also gibt der Satz 2,2 die Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichung (NH) für zunehmende Werte der Variablen an.

Bemerkung 2,4. Die Sätze 2,1 und 2,2 gelten offenbar auch für die Gleichung (H), wenn man $b(t) = 0$ legt.

Wir beweisen nun noch eine Behauptung, welche die im Satz 2,2 und Bemerkung 2,3 angegebene Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichung (NH) noch verbessert:

Satz 2,3. *Sei $\tilde{t} \in \langle a, b \rangle$ und seien $x(\tau)$, $y(\tau)$ Lösungen der Gleichung* (NH) *in $\langle c, b \rangle$, $c < \tilde{t} \leqq b$, wobei $x(\tilde{t}) = y(\tilde{t})$ ist und die Elemente der Matrix $A(t)$ im Intervall $(c, \tilde{t} \rangle$ keine Unstetigkeitspunkte haben. Dann gilt $x(\tau) = y(\tau)$ für $\tau \in (c, b \rangle$. Wenn noch ferner $E + \Delta^+ A(c)$ eine nichtsingulare Matrix ist, $(\Delta^+ A(c) = A(c+) - A(c))$, dann gilt auch $x(c) = y(c)$.*

Beweis. Nach dem Satz 2,2 ist offenbar $x(\tau) = y(\tau)$ für $\tau \in \langle \tilde{t}, b \rangle$. Wir untersuchen noch das Intervall $(c, \tilde{t})$. Für $\xi \in (c, \tilde{t})$ gilt

$$x(\xi) + \int_{\xi}^{\tilde{t}} DA(t) \, x(\tau) - y(\xi) - \int_{\xi}^{\tilde{t}} DA(t) \, y(\tau) = 0$$

und also ist

$$\|x(\xi) - y(\xi)\| = \left\| \int_{\xi}^{\tilde{t}} DA(t) [x(\tau) - y(\tau)] \right\| . \tag{2,15}$$

Daher ergibt sich $\|x(\xi) - y(\xi)\| \leqq N \int_{\xi}^{\tilde{t}} dh(\tau) = N[h(\tilde{t}) - h(\xi)]$, wobei $N = \max\limits_{\tau \in (c, \tilde{t})} \|x(\tau) - y(\tau)\|$ und $h(\tau) = \operatorname{var}(\langle a, \tau \rangle; A)$ ist. Nach der Einsetzung dieser Abschätzung in (2,15) ergibt sich dann

$$\|x(\xi) - y(\xi)\| \leqq N \int_{\xi}^{\tilde{t}} [h(\tilde{t}) - h(\tau)] \, dh(\tau) = N \left[h(\tilde{t}) \int_{\xi}^{\tilde{t}} dh(\tau) - \int_{\xi}^{\tilde{t}} h(\tau) \, dh(\tau) \right] =$$

$$= N[\tfrac{1}{2} h^2(\tilde{t}) - h(\tilde{t}) \, h(\xi) + \tfrac{1}{2} \tilde{h}(\xi)] = \frac{N}{2} [h(\tilde{t}) - h(\xi)]^2 .$$

Das Herleiten dieser Ungleichung benötigt die Stetigkeit der Funktion $h(\tau)$ im Intervall $(c, \bar{t}\rangle$, nachdem dann die Gleichung $\int_\xi^{\bar{t}} h^k(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau) = (k+1)^{-1} [h^{k+1}(\bar{t}) - h^{k+1}(\xi)]$ gilt (vgl. (2,7)). Ebenso kann man induktionsweise fortgehen und die Ungleichung

$$\|\boldsymbol{x}(\xi) - \boldsymbol{y}(\xi)\| \leqq \frac{N}{k!} [h(\bar{t}) - h(\xi)]^k \leqq \frac{N}{k!} [h(\bar{t}) - h(c+)]^k$$

für $\xi \in (c, \bar{t}\rangle$ und ein beliebiges natürliches k erhalten. Daher ist ferner notwendig auch $N \leqq N(1/k!) [h(\bar{t}) - h(c+)]^k$ für alle natürliche k und also ist $N = \max_{\tau \in (c, \bar{t}\rangle} \|\boldsymbol{x}(\tau) - \boldsymbol{y}(\tau)\| = 0$ und so gilt die erste Behauptung vom Satz. Ferner gilt

$$0 = \boldsymbol{x}(c+) - \boldsymbol{y}(c+) = [\boldsymbol{E} + \Delta^+ \boldsymbol{A}(c)] (\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{y}(c))]$$

und also, wenn die Matrix $\boldsymbol{E} + \Delta^+ \boldsymbol{A}(c)$ nichtsingular ist, dann ist auch $\boldsymbol{x}(c) = \boldsymbol{y}(c)$.

3. DIE HOMOGENE GLEICHUNG (H)

Sei $-\infty < a < b < +\infty$, $\boldsymbol{A}(t) = (a_{ij}(t))$, $\operatorname{var}(\langle a, b\rangle; \boldsymbol{A}) < +\infty$, $a_{ij}(t) : \langle a, b\rangle \to R^1$ von links stetig. Für die lineare homogene verallgemeinerte Gleichung

(H) $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = D\boldsymbol{A}(t)\, x$$

gilt der Existenzsatz 2,1 und der Eindeutigkeitssatz 2,3 für die Lösungen.

Sei weiter $\bar{t} \in \langle a, b\rangle$. Wenn $\varphi_i(\tau) : \langle \bar{t}, b\rangle \to R^n$, $i = 1, 2$ Lösungen von (H) in $\langle \bar{t}, b\rangle$ sind und wenn $a_i \in R^1$, $i = 1, 2$ ist, dann ist die Funktion $\varphi(\tau) = a_1\, \varphi_1(\tau) + a_2\, \varphi_2(\tau) : \langle \bar{t}, b\rangle \to R^n$ auch eine Lösung der Gleichung (H), nachdem für alle $\tau_1, \tau_2 \in \langle \bar{t}, b\rangle$, $\tau_1 < \tau_2$

$$\varphi(\tau_2) = a_1\, \varphi_1(\tau_2) + a_2\, \varphi_2(\tau_2) = a_1\, \varphi_1(\tau_1) + a_2\, \varphi_2(\tau_1) + \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} D\boldsymbol{A}(t) [a_1\, \varphi_1(\tau) + a_2\, \varphi_2(\tau)] = \varphi(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} D\boldsymbol{A}(t)\, \varphi(\tau)$$

gilt. Also gilt

Satz 3,1. *Die Menge aller Lösungen der Gleichung* (H) *im Intervall* $\langle \bar{t}, b\rangle$ *bildet eine lineare Mannigfaltigkeit.*

Wir zeigen nun folgendes: Sei für $k = 1, 2, \ldots, n$, $\boldsymbol{e}^{(k)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in R^n$, wobei der Wert 1 an der k-ten Stelle in $\boldsymbol{e}^{(k)}$ liegt. Sei weiter $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(\tau) : \langle \bar{t}, b\rangle \to R^n$ die, nach dem Satz 2,1 existierende und nach dem Satz 2,2 eindeutig bestimmte, Lösung der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b\rangle$ sodass $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(\bar{t}) = \boldsymbol{e}^{(k)}$ gilt. Sei nun weiter $\boldsymbol{\varphi}(\tau) = (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau))$ eine beliebige Lösung der Gleichung (H), deren Definitionsintervall das Intervall $\langle \bar{t}, b\rangle$ enthält. Bezeichnen wir $c_i = \varphi_i(\bar{t})$, $i = 1, \ldots, n$. Nach dem Satz 3,1 ist die Funktion $\sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi^{(i)}(\tau)$ offenbar eine Lösung der Gleichung (H) und es gilt $\sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi^{(i)}(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{e}^{(i)} = \varphi(\bar{t})$. Nach dem Satz 2,2 ist also $\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi^{(i)}(\tau)$ für alle $\tau \in \langle \bar{t}, b\rangle$. Diese Erwägung zeigt, soeben wie es in der klassischen Theorie der linearen Differentialgleichungen gebrauchlich ist, dass der folgende Satz gilt:

Satz 3,2. *Die lineare Mannigfaltigkeit aller Lösungen der Gleichung* (H) *in einem Intervall* $\langle \bar{t}, b\rangle$, $a \leqq \bar{t}$ *ist n-dimensional.*

Für den Fall der von links stetigen Matrix $\mathbf{A}(t)$, den wir da untersuchen, gilt der Eindeutigkeitssatz 2,2 nur für zunehmende Werte der unabhängigen Variablen und man kann nicht, so wie im klassischen Fall, die lineare Unabhängigkeit einer „Lösungsbasis" z. B. die lineare Unabhängigkeit der Elemente $\varphi^{(k)}(\tau) \in R^n$, $k = 1, \ldots, n$ für $\tau \in (\bar{t}, b\rangle$ herleiten.

Für unseren Fall nennen wir ein System $\psi^1(\tau), \ldots, \psi^n(\tau)$ von Lösungen der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b\rangle$ eine Lösungsbasis der Gleichung (H), wenn die Vektoren $\psi^1(\bar{t}), \psi^2(\bar{t}), \ldots, \psi^n(\bar{t})$ linear unabhängig sind. Sei also $\psi^1(\tau), \ldots, \psi^n(\tau)$ eine Lösungsbasis der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b\rangle$. Bilde man die Matrix $\boldsymbol{\Psi}(\tau)$ deren Spalten die Vektoren $\psi^1(\tau), \ldots, \psi^n(\tau)$ sind. Diese Matrix $\boldsymbol{\Psi}(\tau)$ genügt offenbar der Matrizengleichung $\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}/\mathrm{d}\tau = \mathrm{D}\mathbf{A}(t)\, \boldsymbol{\Psi}$ für $\tau \in \langle \bar{t}, b\rangle$. Unter einer Matrizengleichung

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}\tau} = D\mathbf{A}(t)\, \mathbf{X} \tag{3,1}$$

im Intervall $\langle \bar{t}, b\rangle$, welche der Gleichung (H) entspricht, verstehen wir die Aufgabe eine Matrix $\mathbf{X}(\tau)$ so zu finden, dass deren Spaltenvektoren Lösungen im Sinn des Absatzes 2 der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b\rangle$ bilden; d. h. es ist eine für $\tau \in \langle \bar{t}, b\rangle$ definierte $n \times n$-Matrix $\mathbf{X}(\tau)$ zu finden, sodass für alle $\tau_1, \tau_2 \in \langle \bar{t}, b\rangle$, $\tau_1 < \tau_2$ die Gleichung

$$\mathbf{X}(\tau_2) = \mathbf{X}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} D\mathbf{A}(t)\, \mathbf{X}(\tau) \tag{3,2}$$

erfüllt ist.

Offenbar gilt: Wenn die Matrix $\boldsymbol{\Psi}(\tau)$ eine Lösung der Matrizengleichung (3,1) im Intervall $\langle \bar{t}, b\rangle$ ist, dann ist auch die Matrix $\boldsymbol{\Psi}(\tau) \,.\, \mathbf{C}$ eine Lösung der Matrizengleichung (3,1), wobei $\mathbf{C}$ eine konstante $n \times n$-Matrix ist.

Wenn die Spalten $\psi^1(\bar{t}), \ldots, \psi^n(\bar{t})$ der Matrix $\boldsymbol{\Psi}(\bar{t})$ linear unabhängige Vektoren sind, dann nennen wir die Matrix $\boldsymbol{\Psi}(\tau)$, welche eine Lösung der Matrizengleichung (3,1) sein soll, eine Basismatrix der Gleichung (H) in $\langle \bar{t}, b\rangle$. Die Basismatrix der

Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$, welche für $t = \bar{t}$ den Wert $\mathbf{E}$ annimmt ($\mathbf{E}$ ist die Einheitsmatrix), bezeichnen wir mit $\Phi(\tau, \bar{t})$ und nennen diese die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$.

Wenn $\tilde{\mathbf{x}} \in R^n$ ist und wenn $\Phi(\tau, \bar{t})$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$ ist, dann ist die Funktion

$$\mathbf{x}(\tau) = \Phi(\tau, \bar{t})\, \tilde{\mathbf{x}} \tag{3,3}$$

eine Lösung der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$, für welche $\mathbf{x}(\bar{t}) = \tilde{\mathbf{x}}$ gilt.

Wenn ferner $\Psi(\tau)$ in $\langle \bar{t}, b \rangle$ eine Basismatrix der Gleichung (H) ist und wenn $\mathbf{C}$ eine nichtsingulare konstante $n \times n$-Matrix ist, dann ist die Matrix $\Psi(\tau) \,.\, \mathbf{C}$ auch eine Basismatrix der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$. Jede Basismatrix der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$ kann in der Form $\Psi(\tau) \,.\, \mathbf{C}$ dargestellt werden, wobei $\Psi(\tau)$ eine gegebene Basismatrix der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$ ist und wobei $\mathbf{C}$ eine konstante nichtsingulare $n \times n$-Matrix ist. Die erste dieser Behauptungen ist trivial, die zweite folgt daher, dass zwei Systeme von n linear unabhängigen Vektoren mittels einer eindeutig bestimmten, nichtsingularen $n \times n$-Matrix ineinander abgebildet werden können und daher, dass für das untersuchte System (H) der Eindeutigkeitsatz 2,2 gilt.

4. ÜBER DIE FUNDAMENTALMATRIX $\Phi(\tau, \bar{t})$ DER GLEICHUNG (H)

Für die Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \bar{t})$ der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$ gilt, der Definition vom Absatz 3 nach, die Gleichung

$$\Phi(\xi, \bar{t}) = \mathbf{E} + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t)\, \Phi(\tau, \bar{t}) \tag{4,1}$$

für $\xi \in \langle \bar{t}, b \rangle$.

Sei nun $a \leqq t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq b$. Für die Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, t_0)$ gilt auch die Gleichung

$$\Phi(\xi, t_0) = \Phi(t_1, t_0) + \int_{t_1}^{\xi} D\mathbf{A}(t)\, \Phi(\tau, t_0)\,, \tag{4,2}$$

wenn $\xi \in \langle t_1, b \rangle$ ist. Im Intervall $\langle t_1, b \rangle$ ist also $\Phi(\xi, t_0)$ eine Lösung der Matrizengleichung (3,1). Es gibt also eine konstante $n \times n$-Matrix $\mathbf{C}$, sodass $\Phi(\xi, t_0) = \Phi(\xi, t_1)\, \mathbf{C}$ sein wird. Setze man nun $\xi = t_1$, dann ergibt sich daher $\mathbf{C} = \Phi(t_1, t_0)$ und also gilt die Beziehung

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\, \Phi(t_1, t_0)\,, \tag{4,3}$$

wenn $a \leqq t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq b$ ist.

Definieren wir $\mathbf{K}_0(\xi, \bar{t}) = \mathbf{E}$ für $\xi \in \langle \bar{t}, b\rangle$, wo $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix ist und legen ($\xi \in \langle \bar{t}, b\rangle$)

$$\mathbf{K}_j(\xi, \bar{t}) = \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t)\, \mathbf{K}_{j-1}(\tau, \bar{t})\,. \tag{4,4}$$

Bezeichnen wir weiter $h(\tau) = \operatorname{var}(\langle a, \tau\rangle; \mathbf{A})$ für $\tau \in \langle a, b\rangle$. Es gilt

$$\|\mathbf{K}_1(\xi, \bar{t})\| = \left\| \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t) \right\| \leqq \int_{\bar{t}}^{\xi} \mathrm{d}h(\tau) = h(\xi) - h(\bar{t})$$

für $\xi \in \langle \bar{t}, b\rangle$. Ebenso ist (vgl. (2,7))

$$\|\mathbf{K}_2(\xi, \bar{t})\| = \left\| \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t)\, \mathbf{K}_1(\tau, \bar{t}) \right\| \leqq \int_{\bar{t}}^{\xi} [h(\tau) - h(\bar{t})]\, \mathrm{d}h(\tau) \leqq \tfrac{1}{2}[h(\xi) - h(\bar{t})]^2$$

und mittels Induktion ergibt sich dann ähnlicherweise, wie bei dem Beweis des Existenzsatzes 2,1, die Ungleichung

$$\|\mathbf{K}_j(\xi, \bar{t})\| \leqq \frac{1}{j!}[h(\xi) - h(\bar{t})]^j = \frac{1}{j!}(\operatorname{var}(\langle \bar{t}, \xi\rangle; \mathbf{A}))^j \tag{4,5}$$

für $\xi \in \langle \bar{t}, b\rangle$, $j = 1, 2, \ldots$ Definieren wir weiter noch

$$\boldsymbol{\Phi}_m(\xi, \bar{t}) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{K}_j(\xi, \bar{t})\,. \tag{4,6}$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_m(\xi, \bar{t}) = \mathbf{E} &+ \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t) \int_{\bar{t}}^{\tau} D_{t_1}\mathbf{A}(t_1) + \ldots + \\ &+ \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t) \int_{\bar{t}}^{\tau} D_{t_1}\mathbf{A}(t_1) \int_{\bar{t}}^{\tau_1} D_{t_2}\mathbf{A}(t_2) \ldots \int_{\bar{t}}^{\tau_{m-2}} D_{t_{m-1}}\mathbf{A}(t_{m-1})\,,\end{aligned} \tag{4,7}$$

wenn man in (4,6) nach (4,4) gliedweise einsetzt. Daher ist weiter

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_m(\xi, \bar{t}) &= \mathbf{E} + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t) \Big[\mathbf{E} + \int_{\bar{t}}^{\tau} D_{t_1}\mathbf{A}(t_1) + \ldots + \\ &+ \int_{\bar{t}}^{\tau} D_{t_1}\mathbf{A}(t_1) \ldots \int_{\bar{t}}^{\tau_{m-2}} D_{t_{m-1}}\mathbf{A}(t_{m-1})\Big] = \mathbf{E} + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}_{m-1}(\tau, \bar{t})\end{aligned} \tag{4,8}$$

für $\xi \in \langle \bar{t}, b\rangle$. Nach (4,5) ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{K}_j(\xi, \bar{t})$ also im Intervall $\langle \bar{t}, b\rangle$ gleichmässig konvergent; bezeichnen wir deren Summe mit $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$. Es ist für $\xi \in \langle \bar{t}, b\rangle$

$$\left\| \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t)\, [\boldsymbol{\Phi}_m(\tau, \bar{t}) - \boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t})] \right\| \leqq \max_{\tau \in \langle \bar{t}, b\rangle} \|\boldsymbol{\Phi}_m(\tau, \bar{t}) - \boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t})\| \operatorname{var}(\langle \bar{t}, \xi\rangle; \mathbf{A})$$

und also ist für alle $\xi \in \langle \bar{t}, b \rangle$ auch $\lim_{m \to \infty} \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}_m(\tau, \bar{t}) = \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t})$. Daher ergibt sich, nach dem Grenzübergang $m \to \infty$ in (4,8), die Gleichung (4,1); wir zeigten auf diese Weise, dass die Summe der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{K}_j(\xi, \bar{t})$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$ ist. Ferner ist nach (4,7) und nach dem Grenzübergang $m \to \infty$ auch

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t}) = \mathbf{E} + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t) \int_{\bar{t}}^{\tau} D_{t_1}\mathbf{A}(t_1) + \\ + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{A}(t) \int_{\bar{t}}^{\tau} D_{t_1}\mathbf{A}(t_1) \int_{\bar{t}}^{\tau_1} D_{t_2}\mathbf{A}(t_2) + \dots \tag{4,9}$$

für $\xi \in \langle \bar{t}, b \rangle$. Die Beziehung (4,9) gibt die Darstellung der Fundamentalmatrix der Gleichung (H) in der Form der, von der klassischen Theorie bekannten, Peanoreihe an.

Nach (4,6) und (4,5) gilt weiter für die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ der Gleichung (H) im Intervall $\langle \bar{t}, b \rangle$ die Ungleichung

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})\| \leqq \exp(\operatorname{var}(\langle \bar{t}, b \rangle; \mathbf{A})) \leqq \exp(\operatorname{var}(\langle a, b \rangle; \mathbf{A})) = M < +\infty . \tag{4,10}$$

Daher ist auch sofort ersichtlich, dass die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) für $\langle \bar{t}, b \rangle$, $\bar{t} \in \langle a, b \rangle$ beliebig, eine in der Norm beschränkte Matrix ist.

Wenn $\xi_1, \xi_2 \in \langle \bar{t}, b \rangle$ ist, dann gilt die Ungleichung

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\xi_2, \bar{t}) - \boldsymbol{\Phi}(\xi_1, \bar{t})\| \leqq M(\operatorname{var}(\langle \bar{t}, \xi_2 \rangle; \mathbf{A}) - \operatorname{var}(\langle \bar{t}, \xi_1 \rangle; \mathbf{A}))$$

nach (4,1) und (4,10), wenn man den Satz 1,3 verwendet. Die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) ist in der Variablen ξ also von links stetig, nachdem die Elemente der Matrix $\mathbf{A}(t)$ diese Eigenschaft haben und die Unstetigkeiten in ξ können nur in den Unstetigkeitspunkten der Matrix $A(t)$ liegen.

Die Benützung des Satzes 1,2 liefert für $\xi \in \langle \bar{t}, b \rangle$ die Gleichung

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi+, \bar{t}) - \boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t}) = \lim_{\delta \to 0+} \boldsymbol{\Phi}(\xi + \delta, \bar{t}) - \boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t}) =$$

$$= \lim_{\delta \to 0+} \int_{\xi}^{\xi+\delta} D\mathbf{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t}) = [\mathbf{A}(\xi+) - \mathbf{A}(\xi)]\, \boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t}) = \Delta^+\mathbf{A}(\xi)\, \boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$$

und also ist

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi+, \bar{t}) = [\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(\xi)]\, \boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t}), \tag{4,11}$$

wobei wir $\Delta^+\mathbf{A}(\xi) = \mathbf{A}(\xi+) - \mathbf{A}(\xi)$ bezeichnen.

Die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t})$ der Gleichung (H) kann man als eine Funktion der Variablen $\xi, \tilde{t}$ betrachten; diese ist für $a \leqq \tilde{t} \leqq \xi \leqq b$ definiert. Sei nun $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \langle a, b)$ und sei $\xi \geqq \max(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$, dann sind $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1)$ und ebenfalls auch $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_2)$ definiert und es gilt (wenn z. B. $\tilde{t}_1 \leqq \tilde{t}_2$ ist):

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_2) - \boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1) = \int_{\tilde{t}_2}^{\xi} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_2) - \int_{\tilde{t}_1}^{\xi} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_1) =$$

$$= \int_{\tilde{t}_2}^{\xi} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_2) - \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_1) - \int_{\tilde{t}_2}^{\xi} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_1) =$$

$$= \int_{\tilde{t}_2}^{\xi} D\boldsymbol{A}(t)\, [\boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_2) - \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_1)] - \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_1).$$

Bezeichnen wir noch $\boldsymbol{\Psi}(\xi) = \boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_2) - \boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1)$. Nach der obigen Gleichung gilt so $\boldsymbol{\Psi}(\xi) = -\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, t_1) + \int_{\tilde{t}_2}^{\xi} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Psi}(\tau)$ und also ist die Matrix $\boldsymbol{\Psi}(\xi)$ in $\langle \tilde{t}_2, b\rangle$ eine Lösung der Matrizengleichung (3,1), für welche $\boldsymbol{\Psi}(\tilde{t}_2) = -\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} D\boldsymbol{A}(t)\,.$ $.\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_1)$ ist. Also ist ($\xi \in \langle \tilde{t}_2, b\rangle$)

$$\boldsymbol{\Psi}(\xi) = \boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_2)\left(-\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_1)\right) \tag{4,12}$$

und daher ergibt sich dann für $\xi \in \langle \tilde{t}_2, b\rangle$ die Ungleichung

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_2) - \boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1)\| \leqq \|\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_2)\| \,.\, \left\|\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, t_1)\right\| \leqq$$

$$\leqq M^2 \,.\, \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \mathrm{d}h(\tau) = M^2 \left|\operatorname{var}(\langle a, \tilde{t}_2\rangle; \boldsymbol{A}) - \operatorname{var}(\langle a, \tilde{t}_1\rangle; \boldsymbol{A})\right|,$$

wobei M die Konstante von (4,10) ist; dieselbe Ungleichung kann ebenso auch für den Fall $\tilde{t}_2 < \tilde{t}_1$ hergeleitet werden. Diese Ungleichung zeigt sofort, dass die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t})$ der Gleichung (H) auch in der Variablen $\tilde{t}$ von links stetig für $\tilde{t} \in \langle a, \xi\rangle$ ist, und dass deren mögliche Unstetigkeiten mit den Unstetigkeitspunkten der Matrix $\boldsymbol{A}(t)$ zusammenfallen müssen. Zugleich ist es auch zu sehen, dass die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t})$ im Intervall $\langle a, \xi\rangle$ endlicher Variation in der Variablen $\tilde{t}$ ist.

Nach der Gleichung (4,12) ergibt sich für $\delta > 0$ die folgende Gleichung:

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1 + \delta) - \boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1) = \boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1 + \delta) \,.\left(-\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_1 + \delta} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tilde{t}_1)\right)$$

und nach dem Grenzübergang $\delta \to 0+$ folgt daher weiter

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1 +) - \boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1) = -\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1 +)\, [\boldsymbol{A}(\tilde{t}_1 +) - \boldsymbol{A}(t_1)]\, \boldsymbol{\Phi}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_1) =$$

$$= -\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t}_1 +)\, \Delta^+ \boldsymbol{A}(\tilde{t}_1).$$

Wir bekommen so die Gleichung

$$\Phi(\xi, \tau_1) = \Phi(\xi, \tau_1 +) [\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(\tau_1)] . \tag{4,13}$$

Wir fassen die bisher festgelegten Eigenschaften der Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \tau)$ folgenderweise zusammen:

Satz 4,1. *Die Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \tau)$ der Gleichung* (H), *wobei $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ eine für $t \in \langle a, b \rangle$ definierte $n \times n$-Matrix ist, deren Elemente $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ in $\langle a, b \rangle$ von links stetige Funktionen sind und wo* var $(\langle a, b \rangle; A) < +\infty$ *ist, ist für $a \leqq \tau \leqq \xi \leqq b$ definiert. $\Phi(\xi, \tau)$ ist in ihrem Definitionsbereich in der Norm beschränkt* (vgl. (4,10)).

$\Phi(\xi, \tau)$ ist für festes $\tau \in \langle a, b \rangle$ endlicher Variation (als Funktion der Variablen ξ) im Intervall $\langle \tau, b \rangle$; für festes $\xi \in \langle a, b \rangle$ ist $\Phi(\xi, \tau)$ endlicher Variation (als Funktion der Variablen τ) im Intervall $\langle a, \xi \rangle$.

$\Phi(\xi, \tau)$ ist für festes $\tau \in \langle a, b \rangle$ in $\xi \in \langle \tau, b \rangle$ von links stetig und für festes $\xi \in \langle a, b \rangle$ in $\tau \in \langle a, \xi \rangle$ von links stetig.

Die Unstetigkeiten von $\Phi(\xi, \tau)$ in der Variablen ξ für festes $\tau \in \langle a, b \rangle$, $\xi \in \langle \tau, b \rangle$ fallen mit den Unstetigkeiten der Matrix $\mathbf{A}(t)$ zusammen und es gilt (4,11) *und die Unstetigkeiten von $\Phi(\xi, \tau)$ in der Variablen τ für festes $\xi \in \langle a, b \rangle$, $\tau \in \langle a, \xi \rangle$ fallen mit den Unstetigkeiten der Matrix $\mathbf{A}(t)$ zusammen und es gilt* (4,13).

$\Phi(\xi, \tau)$ kann man in der Form der verallgemeinerten Peanoreihe (4,9) *darstellen.*

Wir wenden uns nun zu einer weiteren Eigenschaft der Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \tau)$ der Gleichung (H); es gilt folgender

Satz 4,2. *Sei $a \leqq \tau \leqq \xi \leqq b$ und sei $\Phi(\xi, \tau)$ die Fundamentalmatrix der Gleichung* (H), *wobei die Voraussetzungen über die Matrix $\mathbf{A}(t)$ vom Satz* 4,1 *in Kraft bleiben.*

Die Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \tau)$ ist genau dann singular, wenn ein $\tau^* \in \langle \tau, \xi)$ so existiert, dass die Matrix $\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t^*)$ singular ist (dabei bezeichnen wir $\Delta^+(t^*) = \mathbf{A}(t^*+) - \mathbf{A}(t^*)$).

Bemerkung. Singular wird, wie üblich, eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{C}$ dann genannt, wenn die Gleichung $\mathbf{C}x = 0$ eine nichttriviale Lösung in R^n hat, oder äquivalent, wenn $\det \mathbf{C} = 0$ ist.

Beweis des Satzes 4,2. 1. Es existiere $t^* \in \langle \tau, \xi)$ sodass $\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t^*)$ singular ist, d. h. $\det (\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t^*)) = 0$. Dann gilt nach (4,3) und (4,13)

$$\Phi(\xi, \tau = \Phi(\xi, t^*) \Phi(t^*, \tau) = \Phi(\xi, t^* +) [\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t^*)] \Phi(t^*, \tau)$$

und also ist

$$\det \Phi(\xi, \tau) = \det \Phi(\xi, t^* +) \det [\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t^*)] \det \Phi(t^*, \tau) = 0$$

d. h. die Matrix $\Phi(\xi, \tau)$ ist singular.

2. Sei die Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \bar{t})$ singular (die Werte ξ, $\bar{t}$ sind dabei fest). Wir machen für diesen Beweis die Verabredung, dass wenn in einem Intervall $\langle \bar{t}, \bar{\bar{t}} \rangle$ die Gleichung $\det \Phi(\bar{\bar{t}}, \bar{t}) = 0$ gelten wird, dann sagen wir, dass die Fundamentalmatrix $\Phi(\bar{\bar{t}}, \bar{t})$ in $\langle \bar{t}, \bar{\bar{t}} \rangle$ die Eigenschaft (S) hat. Der Voraussetzung nach hat die Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \bar{t})$ in $\langle \bar{t}, \xi \rangle$ die Eigenschaft (S). Sei $t_1 = (\xi + \bar{t})/2$ der Mittelpunkt des Intervalles $\langle \bar{t}, \xi \rangle$. Nach (4,3) ist $0 = \det \Phi(\xi, \bar{t}) = \det \Phi(\xi, t_1)$ . . $\det \Phi(t_1, \bar{t})$. Daher ist offenbar, dass die Matrizen $\Phi(\xi, t_1)$ oder $\Phi(t_1, \bar{t})$ in einem der Intervalle $\langle t_1, \xi \rangle$, oder $\langle \bar{t}, t_1 \rangle$ die Eigenschaft (S) haben. Bezeichnen wir mit J_1 soein Intervall von den Intervallen $\langle t_1, \xi \rangle$, $\langle \bar{t}, t_1 \rangle$, in welchem die Fundamentalmatrix die Eigenschaft (S) hat. Das Intervall J_1 zerteilen wir wieder auf zwei gleich lange Intervalle; man kann wie oben behaupten, dass in einem von diesen Intervallen die Fundamentalmatrix die Eigenschaft (S) haben wird. Dieses Intervall bezeichnen wir mit J_2. Dieses Verfahren kann man fortsetzen und ein Intervall J_3 bilden, welches eine der beiden, gleich langen, Hälften des Intervalles J_2 ist und in welchem die Fundamentalmatrix die Eigenschaft (S) hat. Auf diese Weise kann man fortschreiten und eine Folge von Intervallen $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_k, \ldots$ bilden sodass in jedem J_k die Fundamentalmatrix die Eigenschaft (S) hat und dass $J_{k+1} \subset J_k$, $|J_{k+1}| = \frac{1}{2}|J_k|$ gilt, wobei $|J|$ die Länge des Intervalles J bedeutet und J_{k+1} ist eine der, gleich langen, Hälften des Intervalles J_k. Bezeichnen wir noch $J_k = \langle {}_*t_k, {}^*t_k \rangle$ ${}_*t_k < {}^*t_k$; offenbar gilt ${}_*t_k \leqq {}_*t_{k+1} < {}^*t_{k+1} \leqq {}^*t_k$, $\lim_{k \to \infty} {}_*t_k = \lim_{k \to \infty} {}^*t_k = t^*$, $t^* \in \langle \bar{t}, \xi \rangle$ und dabei ist $\det \Phi({}^*t_k, {}_*t_k) = 0$. Ferner gilt $\Phi({}^*t_k, {}_*t_k) = \Phi({}^*t_k, t^*)\, \Phi(t^*, {}_*t_k)$ und also ist

$$\lim_{k\to\infty} \Phi({}^*t_k, {}_*t_k) = \lim_{k\to\infty} \Phi({}^*t_k, t^*) \lim_{k\to\infty} \Phi(t^*, {}_*t_k) = \Phi(t^*+, t^*)\, \Phi(t^*, t^*) = \mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t^*),$$

daher ist weiter also

$$0 = \lim_{k\to\infty} \det \Phi({}^*t_k, {}_*t_k) = \det\left[\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t^*)\right]$$

d. h. die Matrix $\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t^*)$ ist singular. Es könnte bei der obigen Konstruktion auch der Fall vorkommen, dass man die Intervallenfolge $J_1, J_2, J_3, \ldots$ nur so wählen kann, dass für jedes ganze k, ${}^*t_k = \xi$ wäre. Es ist dann offenbar $\det \Phi({}_*t_k, \bar{t}) \neq 0$ und $\det \Phi(\xi, {}_*t_k) = 0$, daher wäre dann auch $0 = \lim_{k\to\infty} \det \Phi(\xi, {}_*t_k) = \det \Phi(\xi, \xi-) = \det \mathbf{E} = 1$; dieses ist aber natürlich nicht möglich und es muss also notwendig ein $t^* \in \langle \bar{t}, \xi)$ mit den obigen Eigenschaften existieren. Der Satz ist so bewiesen.

Wenn man den Satz 4,2 nun nach den Eigenschaften einer nichtsingularen Matrix neu formuliert, kann man folgendes behaupten:

Satz 4,3. *Sei $a \leqq \bar{t} < \xi < b$. Die Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \bar{t})$ hat genau dann eine inverse, wenn für jedes $t \in \langle \bar{t}, \xi)$ die Matrix $\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t)$ eine inverse hat.*

Weiter wenden wir uns zu der Untersuchung der Punkte $t \in \langle a, b \rangle$, für welche die

Matrix $\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(t)$, $\Delta^+\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+) - \mathbf{A}(t)$ keine inverse besitzt: Wenn $t \in \langle a, b\rangle$ ein Stetigkeitspunkt der Matrix $\mathbf{A}(t)$ ist, dann ist $\Delta^+\mathbf{A}(t) = 0$ und $\det[\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(t)] = 1$ und also besitzt die Matrix $\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(t)$ eine inverse. Der Punkt $t \in \langle a, b\rangle$, in welchem die Matrix $\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(t)$ keine inverse hat, kann so nur ein Unstetigkeitspunkt der Matrix $\mathbf{A}(t)$ sein.

Nachdem $h(t) = \operatorname{var}(\langle a, t\rangle; \mathbf{A})$ eine nichtfallende Funktion endlicher Variation im Intervall $\langle a, b\rangle$ ist und nachdem offenbar $h(t)$ genau dann in einem Punkt $t \in \langle a, b\rangle$ unstetig ist, wenn $\mathbf{A}(t)$ in diesem Punkt unstetig ist (d. h. eins der Elemente $a_{ij}(t)$ der Matrix ist in diesem Punkt unstetig), ist, nach den bekannten Eigenschaften einer reellen Funktion mit beschränkter Totalvariation, die Menge $\{t \in \langle a, b\rangle, \Delta^+\mathbf{A}(t) \neq 0\} = U$ abzählbar. Ferner gilt $\sum_{t\in U} \|\Delta^+\mathbf{A}(t)\| \leqq \operatorname{var}(\langle a, b\rangle; \mathbf{A}) < +\infty$. Sei noch $U_1 = \{t \in U; \|\Delta^+\mathbf{A}(t)\| \geqq 1\}$. Die Menge U_1 ist offenbar endlich. Für $t \in U - U_1$ ist also $\|\Delta^+\mathbf{A}(t)\| < 1$ und so hat für $t \in U - U_1$ die Matrix $\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(t)$ eine inverse $[\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(t)]^{-1}$ (man kann $[\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(t)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-\Delta^+\mathbf{A}(t))^k$ schreiben, und die Reihe rechts ist konvergent). Bezeichnen wir nun

$$U_s = \{t \in \langle a, b\rangle;\ \det[\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(t)] = 0\}\,.$$

Es muss offenbar $U_s \subset U_1$ sein und also muss U_s auch eine endliche Menge sein d. h. es ist $U_s = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$.

Sei nun $\xi < \bar{t}$. Legen wir

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t}) = [\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)]^{-1}\,, \tag{4,14}$$

wenn $[\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)]^{-1}$ existiert d. h. wenn $\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)$ eine nichtsingulare Matrix ist. Die Matrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ kann für diesen Fall so nur dann definiert werden (vgl. Satz 4,3), wenn im Intervall $\langle \xi, \bar{t})$ kein Punkt t so existiert, dass die Matrix $\mathbf{E} + \Delta^+\mathbf{A}(t)$ keine inverse in diesem Punkt hat d. h. wenn $\langle \xi, \bar{t}) \cap U_s = \emptyset$ ist.

Sei nun $\bar{t} \in \langle a, b\rangle$. Es ist einer der folgenden Fälle möglich: $\bar{t} \in (t_k, t_{k+1}\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$; $\bar{t} \in \langle a, t_1\rangle$, $\bar{t} \in (t_m, b\rangle$. Sei weiter $\tilde{\mathbf{x}} \in R^n$; die Matrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ ist für $\xi \in \langle \bar{t}, b\rangle$ und (nach (4,14)) für $\xi \in (t_k, \bar{t})$, wenn $\bar{t} \in (t_k, t_{k+1}\rangle$ bzw. für $\xi \in \langle a, \bar{t})$, wenn $\bar{t} \in \langle a, t_1\rangle$ bzw. für $\xi \in (t_m, \bar{t})$, wenn $\bar{t} \in (t_m, b\rangle$, definiert. Sei $\xi < \bar{t}$ im Definitionsbereich von $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$. Lege man

$$\mathbf{x}(\xi) = \boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})\,\tilde{\mathbf{x}} \tag{4,15}$$

für alle $\xi \in \langle a, b\rangle$, für welche $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ definiert ist.

Für $\xi < \bar{t}$ ist dann offenbar

$$\tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)\,\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{x}(\xi) + \int_{\xi}^{\bar{t}} D\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(\tau)$$

und also gilt $\mathbf{x}(\xi) = \tilde{\mathbf{x}} - \int_{\xi}^{\bar{t}} D\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(\tau)$. Daher ergibt sich wenn $\xi_1 < \xi_2 \leqq \bar{t}$, $(\xi_1, \xi_2$

liegen im Definitionsbereich von $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$) die Gleichung

$$\boldsymbol{x}(\xi_2) - \boldsymbol{x}(\xi_1) = \int_{\xi_2}^{\bar{t}} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(\tau) + \int_{\xi_1}^{\bar{t}} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(\tau) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(\tau)\,.$$

Die, in (4,15) definierte, Funktion $\boldsymbol{x}(\xi)$ ist also für $\xi \leqq \bar{t}$ eine Lösung der Gleichung (H) und für diese gilt offenbar $\boldsymbol{x}(\bar{t}) = \tilde{\boldsymbol{x}}$. Wenn nun $\boldsymbol{y}(\tau)$ eine allgemein andere Lösung der Gleichung (H) für $\tau \leqq \bar{t}$ mit $\boldsymbol{y}(\bar{t}) = \tilde{\boldsymbol{x}}$ ist, dann gilt nach den Eigenschaften der Fundamentalmatrix (vgl. (3,3)) die Gleichung $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)\,\boldsymbol{x}(\xi) = \boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)\,\boldsymbol{y}(\xi)$ und daher so auch $\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)\,[\boldsymbol{x}(\xi) - \boldsymbol{y}(\xi)] = 0$; nachdem aber die Matrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ wohldefiniert ist, muss $\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)$ eine nichtsingulare Matrix sein und so muss auch $\boldsymbol{x}(\xi) = \boldsymbol{y}(\xi)$ für alle $\xi < \bar{t}$, für welche die Lösung $\boldsymbol{x}(\xi)$ definiert ist, gelten. Daher ist also sofort zu sehen, dass die durch (4,15) bestimmte Lösung der Gleichung (H) eindeutig in dem Intervall bestimmt ist, in welchem $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ existiert.

Wir zeigen nun noch, dass die für $\xi < \bar{t}$ in der Beziehung (4,14) definierte Matrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ der Gleichung (4,1) für $\xi < \bar{t}$ genügt. Sei also $\xi < \bar{t}$. Nachdem $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ einen Sinn haben soll, muss $[\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)]^{-1}$ existieren und also existiert auch $[\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \tau)]^{-1}$ für alle $\xi \leqq \tau < \bar{t}$. Nach (4,3) gilt $\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi) = \boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \tau)\,\boldsymbol{\Phi}(\tau, \xi)$ und da $[\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \tau)]^{-1}$ existiert ist auch $\boldsymbol{\Phi}(\tau, \xi) = [\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \tau)]^{-1}\,\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)$. Ferner gilt die Gleichung $\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi) = \boldsymbol{E} + \int_\xi^{\bar{t}} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{\Phi}(\tau, \xi)$. Wenn wir nun nach dem Obigen in diese Gleichung einsetzen, ergibt sich sofort $\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi) = \boldsymbol{E} + \int_\xi^{\bar{t}} D\boldsymbol{A}(t)\,[\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \tau)]^{-1}\,\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)$ und nachdem $[\boldsymbol{\Phi}(\bar{t},\xi)]^{-1}$ existiert ist daher also $E = [\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \xi)]^{-1} + \int_\xi^{\bar{t}} D\boldsymbol{A}(t)\,[\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}, \tau)]^{-1}$. Wenn man da die Matrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ definierende Gleichung (4,14) in Betracht nimmt, dann bekommt man von dieser Gleichung sofort $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t}) = \boldsymbol{E} - \int_\xi^{\bar{t}} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t}) = \boldsymbol{E} + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t})$ d. h. die Matrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$, welche durch (4,14) definiert ist, genügt der Gleichung (4,1).

Wenn wir die, im Absatz 3 eingeführte, Definition der Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ der Gleichung (H) noch nach der in (4,14) gegebenen Definition für $\xi < \bar{t}$ erweitern, dann werden wir im Weiteren unter dem Begriff der Fundamentalmatrix der Gleichung (H) immer diese erweiterte Matrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ verstehen.

Wir haben in diesem Absatz einigermassen noch die Ergebnisse des Absatzes 2 für die lineare homogene Gleichung (H) verbessert. Dem Obigen nach gilt nämlich folgender

Satz 4,4. *Wenn die Voraussetzungen über die Matrix $\boldsymbol{A}(t)$ von der Einleitung des Absatzes 2 gelten und wenn $\bar{t} \in \langle a, b\rangle$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in R^n$ ist, dann existiert eine Lösung der Gleichung* (H), *welche wir mit $\boldsymbol{x}(\tau)$ bezeichnen, für welche $\boldsymbol{x}(\bar{t}) = \tilde{\boldsymbol{x}}$ ist. Diese Lösung $\boldsymbol{x}(\tau)$ der Gleichung* (H) *ist für alle $\tau \in \langle \bar{t}, b\rangle$ und $\tau \in (c, \bar{t})$, $a \leqq c < \bar{t}$ definiert, wenn für alle $t \in (c, \bar{t})$ die Matrix $\boldsymbol{A}(t)$ nichtsingular ist. In jedem Intervall der Form $(c, b\rangle$ ist die Lösung $\boldsymbol{x}(\tau)$ der Gleichung* (H) *eindeutig bestimmt. Diese Lösung $\boldsymbol{x}(\tau)$ der Gleichung* (H) *kann man in der Form*

$$\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t})\,\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{4,16}$$

darstellen, wobei $\boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t})$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) *ist.*

5. DIE NICHTHOMOGENE GLEICHUNG (NH)

Wir werden weiter die Gleichung

$$\text{(NH)} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau} = D[\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)]$$

im Intervall $\langle a, b\rangle$, $-\infty < a < b < +\infty$ untersuchen, wobei $\boldsymbol{A}(t) = (a_{ij}(t))$, $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ von links stetig, $\operatorname{var}(\langle a, b\rangle; \boldsymbol{A}) < +\infty$, $\boldsymbol{b}(t) = (b_1(t), \dots \dots, b_n(t))$, $b_i(t)$ von links stetig, $\operatorname{var}(\langle a, b\rangle; \boldsymbol{b}) < +\infty$.

Sei $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$ und sei $\boldsymbol{x}_h(\tau) : \langle c, d\rangle \to R^n$ eine Lösung der Gleichung (H) im Intervall $\langle c, d\rangle$ und sei $\boldsymbol{x}^*(\tau) : \langle c, d\rangle \to R^n$ eine Lösung der Gleichung (NH) in demselben Intervall $\langle c, d\rangle$. Dann ist die Funktion $\boldsymbol{y}(\tau) = \boldsymbol{x}_h(\tau) + \boldsymbol{x}^*(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (NH) im Intervall $\langle c, d\rangle$. Tatsächlich für $\xi_1 < \xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \in \langle c, d\rangle$ gilt die Gleichung

$$\boldsymbol{y}(\xi_2) - \boldsymbol{y}(\xi_1) = \boldsymbol{x}_h(\xi_2) - \boldsymbol{x}_h(\xi_1) + \boldsymbol{x}^*(\xi_2) - \boldsymbol{x}^*(\xi_1) =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}_h(\tau) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}^*(\tau) + \boldsymbol{b}(\xi_2) - \boldsymbol{b}(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{y}(\tau) + \boldsymbol{b}(\xi_2) - \boldsymbol{b}(\xi_1).$$

Wenn umgekehrt, $\boldsymbol{y}(\tau) : \langle c, d\rangle \to R^n$ eine beliebige Lösung der Gleichung (NH) ist und $\boldsymbol{x}^*(\tau) : \langle c, d\rangle \to R^n$ eine feste Lösung der Gleichung (NH), dann existiert eine Lösung $\boldsymbol{x}_h(\tau) : \langle c, d\rangle \to R^n$ der Gleichung (H), sodass $\boldsymbol{y}(\tau) = \boldsymbol{x}^*(\tau) + \boldsymbol{x}_h(\tau)$ ist.

Daher folgt, dass wenn man alle Lösungen der Gleichung (NH) kennen soll, dann genügt es eine feste Lösung dieser Gleichung zu bestimmen; alle andere Lösungen von (NH) sind dann durch die lineare Mannigfaltigkeit der Lösungen der Gleichung (H) bestimmt.

Wir zeigen nun weiter, wie man eine feste Lösung der Gleichung (NH) bestimmen kann und so nach dem Obigen auch alle Lösungen der Gleichung (NH). Sei $\bar{t} \in \in \langle a, b\rangle$; wir zeigen, dass die Funktion

$$(5{,}1) \qquad \boldsymbol{x}^*(\xi) = \boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})\,\boldsymbol{b}(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tau+)\,\boldsymbol{b}(t)$$

ist eine Lösung der Gleichung (NH) in soeinem Intervall, in welchem $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ definiert ist. (Vgl. Abs. 3 und 4.) Sei $\bar{t} \leqq \xi \leqq b$. Wir berechnen zuerst (vgl. (4,1))

$$\int_{\bar{t}}^{\xi} D\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}^*(\tau) = \int_{\bar{t}}^{\xi} D_t\boldsymbol{A}(t)\left[\boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t})\,\boldsymbol{b}(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\tau} D_s\boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+)\,\boldsymbol{b}(s)\right] =$$

$$= \int_{\bar{t}}^{\xi} D_t\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{\Phi}(\tau, \bar{t})\,\boldsymbol{b}(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D_t\boldsymbol{A}(t)\int_{\bar{t}}^{\tau} D_s\boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+)\,\boldsymbol{b}(s) =$$

$$= (\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t}) - \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{b}(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D_t\boldsymbol{A}(t)\int_{\bar{t}}^{\tau} D_s\boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+)\,\boldsymbol{b}(s).$$

Im letzten Glied ist es erwünscht die Folge der Integrationen umzutauschen. Legen wir darum $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \sigma) = \boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+)$ für $\bar{t} \leqq \sigma < \tau$, $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \sigma) = 0$ für $\tau \leqq \sigma \leqq \xi$. Es gilt $\int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \sigma)\, \boldsymbol{b}(s) = \int_{\bar{t}}^{\tau} D_s \boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma +) \boldsymbol{b}(s)$, denn nach dem Satz 1,2 ist $\int_{\bar{t}}^{\tau} D_s[\boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+) - \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \sigma)]\, \boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tau+)\, (\boldsymbol{b}(\tau) - \boldsymbol{b}(\tau-)) = 0$, da $\boldsymbol{b}$ von links stetig ist. Ebenso gilt ferner $\int_{\bar{t}}^{\xi} D_t \boldsymbol{A}(t)\, \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \sigma) = \int_{\sigma}^{\xi} D_t \boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+) - \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)\, \boldsymbol{\Phi}(\sigma, \sigma+)$ nachdem nach Satz 1,2 die Gleichung $\int_{\sigma}^{\xi} D_t \boldsymbol{A}(t) [\boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+) - \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \sigma)] = (\boldsymbol{A}(\sigma+) - \boldsymbol{A}(\sigma))\,.$ $.\, \boldsymbol{\Phi}(\sigma, \sigma+) = \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)\, \boldsymbol{\Phi}(\sigma, \sigma+)$ gilt. Nach (4,10) ist die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})$ beschränkt und $\boldsymbol{A}(t)$ bzw. $\boldsymbol{b}(t)$ sind endlicher Variation. Deswegen ist die Formel (*) vom Absatz 1. für die Umtauschung der Integrationsfolge für alle Komponenten von $\boldsymbol{A}(t)\, \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \sigma)\, \boldsymbol{b}(s)$ anwendbar und es ergibt sich folgendes:

$$\int_{\bar{t}}^{\xi} D_t \boldsymbol{A}(t) \int_{\bar{t}}^{\tau} D_s \boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s) = \int_{\bar{t}}^{\xi} D_t \boldsymbol{A}(t) \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \sigma)\, \boldsymbol{b}(s) =$$
$$= \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \int_{\bar{t}}^{\xi} D_t \boldsymbol{A}(t)\, \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \sigma)\, \boldsymbol{b}(s) = \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \int_{\sigma}^{\xi} D_t \boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s) -$$
$$- \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s\, \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)\, \boldsymbol{\Phi}(\sigma, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s)\,.$$

Wenn man die Beziehungen (4,13) und (4,1) zur Geltung bringt, dann ergibt sich ferner

$$\int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \int_{\sigma}^{\xi} D_t \boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s) = \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \int_{\sigma}^{\xi} \boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(\tau, \sigma) [\boldsymbol{E} + \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)]^{-1}\, \boldsymbol{b}(s) =$$
$$= \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s [\boldsymbol{\Phi}(\xi, \sigma) - \boldsymbol{E}] [\boldsymbol{E} + \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)]^{-1}\, \boldsymbol{b}(s) =$$
$$= \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \boldsymbol{\Phi}(\xi, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s) - \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s [\boldsymbol{E} + \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)]^{-1}\, \boldsymbol{b}(s) =$$
$$= \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \boldsymbol{\Phi}(\xi, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s) - \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s [\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\Phi}(\sigma, \sigma+)\, \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)]\, \boldsymbol{b}(s) =$$
$$= \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \boldsymbol{\Phi}(\xi, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s) - \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \boldsymbol{b}(s) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \boldsymbol{\Phi}(\sigma, \sigma+)\, \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)\, \boldsymbol{b}(s)\,.$$

Wir bekommen so

$$\int_{\bar{t}}^{\xi} D\boldsymbol{A}(t)\, \boldsymbol{x}^*(\tau) = \boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})\, \boldsymbol{b}(\bar{t}) - \boldsymbol{b}(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \boldsymbol{\Phi}(\xi, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s) - \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \boldsymbol{b}(s) +$$
$$+ \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \boldsymbol{\Phi}(\sigma, \sigma+)\, \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)\, \boldsymbol{b}(s) - \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s\, \Delta^+ \boldsymbol{A}(\sigma)\, \boldsymbol{\Phi}(\sigma, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s) =$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(\xi, \bar{t})\, \boldsymbol{b}(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D_s \boldsymbol{\Phi}(\xi, \sigma+)\, \boldsymbol{b}(s) - \boldsymbol{b}(\xi)\,,$$

nachdem die Matrizen $\Phi(\sigma, \sigma+)$ und $\Delta^+ A(\sigma)$ offenbar kommutativ sind. Es gilt also

$$\int_{\bar{t}}^{\xi} DA(t)\, x^*(\tau) = x^*(\xi) - b(\xi)\,.$$

Dasselbe kann auch für den Fall $\xi < \bar{t}$ bewiesen werden, die Methode des Beweises ist dieselbe wie im oben untersuchten Fall. Der Wert $\xi < \bar{t}$ muss dabei aber derartig sein, dass die Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \bar{t})$ für diesen eindeutig definiert ist (vgl. Absatz 4). Es ist also $x^*(\xi) = b(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D[A(t)\, x^*(\tau) + b(t)]$ d. h. die Funktion $x^*(\xi)$ von (5,1) ist für alle Werte ξ, für welche $\Phi(\xi, \bar{t})$ eindeutig definiert ist, eine Lösung der Gleichung (NH) mit $x^*(\bar{t}) = b(\bar{t})$.

Sei nun $\tilde{x} \in R^n$, $\bar{t} \in \langle a, b \rangle$. Wir bestimmen noch auf dem Grund der Kenntniss der Lösung $x^*(\tau)$ von (5,1) der Gleichung (NH) die Lösung der Gleichung (NH) für welche $x(\bar{t}) = \tilde{x}$ ist. Nach dem Obigen ist $x(\tau) = x^*(\tau) + x_h(\tau)$, wobei $x_h(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (H) ist. Wir legen $x_h(\tau) = \Phi(\tau, \bar{t})\, [x - b(\bar{t})]$, wobei $\Phi(\tau, \bar{t})$ die Fundamentalmatrix der Gleichung (H) ist. Die Funktion $x(\tau) = x^*(\tau) + x_h(\tau)$, wo $x^*(\tau)$ die Lösung der Gleichung (NH) von (5,1) ist, ist offenbar eine Lösung der Gleichung (NH) und es gilt $x(\bar{t}) = x^*(\bar{t}) + x_h(\bar{t}) = b(\bar{t}) + \tilde{x} - b(\bar{t}) = \tilde{x}$ d. h. es ist $x(\xi) = \Phi(\xi, \bar{t})\, b(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\Phi(\xi, t)\, b(t) + \Phi(\xi, \bar{t})\, [\tilde{x} - b(\bar{t})]$; daher ergibt sich dann

$$x(\xi) = \Phi(\xi, \bar{t})\, \tilde{x} + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\Phi(\xi, \tau+)\, b(t)\,. \tag{5,2}$$

Die Formel (5,2) gilt für alle $\xi \in \langle a, b \rangle$, für welche die Fundamentalmatrix $G(\xi, \bar{t})$ der Gleichung (H) bestimmt ist. Die Formel (5,2) kann man mit Hilfe von (4,13) in der Form

$$x(\xi) = \Phi(\xi, \bar{t})\, \tilde{x} + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\Phi(\xi, \tau)\, b(t) - \int_{\bar{t}}^{\xi} D\Phi(\xi, \tau+)\, \Delta^+ A(\tau)\, b(t) \tag{5,3}$$

schreiben. Das dritte Glied in dieser Formel gibt eine Korrektion der üblichen Formel der Variation der Konstanten für klassische Gleichungen an.

6. SYSTEME MIT IMPULSEN

Wir wollen zum Schluss noch einige spezielle Systeme mit Impulsen untersuchen und die vorgehenden Ergebnisse an diese Systeme anwenden.

Sei im Intervall $\langle a, b \rangle$, $-\infty < a < b < +\infty$ eine stetige $n \times n$-Matrix $P(t)$ und eine stetige Funktion $f(t) : \langle a, b \rangle \to R^n$ gegeben; sei weiter $\{T_j\} \subset \langle a, b \rangle$ eine abzählbare Menge und $\{s_j\}$, $s_j \in R^n$ sei eine derartige abzählbare Menge, dass $\sum \|s_j\| < +\infty$ gilt. Zu jedem T_j ordnen wir ein s_j zu. Legen wir ferner $A(t) = \int_a^t P(\sigma)\, d\sigma$ für $t \in \langle a, b \rangle$ und $b(t) = \int_a^t f(\sigma)\, d\sigma + \sum_{T_j \in \langle a, t)} s_j$ für $t \in \langle a, b \rangle$, wobei in dieser letzten

Summe alle derartige $\mathbf{s}_j$ summiert werden, für welche die ihnen zugehörende Punkte T_j im Intervall $\langle a, t)$ liegen. $\mathbf{b}(t)$ ist offenbar in $\langle a, b\rangle$ von links stetig und endlicher Variation in $\langle a, b\rangle$. Untersuchen wir die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = D[\mathbf{A}(t)\, x + \mathbf{b}(t)] \tag{6,1}$$

mit oben gegebenen $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ und auch die entsprechende homogene Gleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = D\mathbf{A}(t)\, x\,. \tag{6,2}$$

Für eine Lösung $\mathbf{x}(\tau)$ der Gleichung (6,2) muss der Definition nach die Gleichung

$$\mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{x}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} D\mathbf{A}(t)\, \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} D\left(\int_a^t \mathbf{P}(\sigma)\, d\sigma\right) \mathbf{x}(\tau) =$$
$$= \mathbf{x}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{P}(\tau)\, \mathbf{x}(\tau)\, d\tau$$

gelten und also ist $\mathbf{x}(\tau)$ eine Lösung der klassischen Gleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{P}(t)\, \mathbf{x}\,. \tag{6,3}$$

Die in der üblichen Form geschriebenen Integrale sind als Lebesguesche Integrale aufzufassen, bzw. kann man diese als Riemannsche Integrale betrachten, wenn der Integrand eine stetige Funktion ist.

Wenn umgekehrt $\mathbf{x}(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (6,3) ist, dann ist offenbar $\mathbf{x}(\tau)$ auch eine Lösung der Gleichung (6,2).

Es sei $\mathbf{\Phi}(\xi, \bar{t})$ die klassische Fundamentalmatrix der Gleichung (6,3). Diese ist offenbar zugleich auch die Fundamentalmatrix der Gleichung (6,2) im Sinn der Absätze 3 und 4 und ist für alle $\xi, \bar{t} \in \langle a, b\rangle$ definiert. Wenn $\tilde{\mathbf{x}} \in R^n$, $\bar{t} \in \langle a, b\rangle$ ist, dann kann die vom Punkt $(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{t})$ ausgehende Lösung $\mathbf{x}(\tau)$ der Gleichung (6,1) nach (5,3) folgenderweise angegeben werden:

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{\Phi}(\xi, \bar{t})\, \tilde{\mathbf{x}} + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{\Phi}(\xi, \tau)\, \mathbf{b}(t) = \tag{6,4}$$
$$= \mathbf{\Phi}(\xi, \bar{t})\, \tilde{\mathbf{x}} + \int_{\bar{t}}^{\xi} \mathbf{\Phi}(\xi, \tau)\, \mathbf{f}(\tau)\, d\tau + \int_{\bar{t}}^{\xi} D\mathbf{\Phi}(\xi, \tau) \Big(\sum_{T_j \in \langle \bar{t}, \xi)} \mathbf{s}_j \Big) =$$
$$= \mathbf{\Phi}(\xi, \bar{t})\, \tilde{\mathbf{x}} + \int_{\bar{t}}^{\xi} \mathbf{\Phi}(\xi, \tau)\, \mathbf{f}(\tau)\, d\tau + \sum_{T_j \in \langle a, t)} \mathbf{\Phi}(\xi, T_j)\, \mathbf{s}_j\,.$$

Die gewöhnlichen Integrale in (6,4) sind wieder Lebesguesche Integrale bzw. Riemannsche Integrale, wenn der Integrand eine stetige Funktion ist.

Nehme man zusätzlich noch die Gleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{s}_j \delta(t - T_j) \tag{6,5}$$

in Betracht, wobei δ die Diracfunktion bedeutet und wobei $\{T_j\}$ eine wachsende Folge $T_1 < T_2 < \ldots < T_j \in \langle a, b\rangle$, $j = 1, 2, \ldots$ bildet und wo man unter einer Lösung der Gleichung (6,5) eine von links stetige Funktion versteht, welche in jedem Intervall $(T_j, T_{j+1}\rangle$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{6,6}$$

ist und für $\tau = T_j$ die Gleichung $\mathbf{x}(T_j+) - \mathbf{x}(T_j) = \mathbf{s}_j$ erfüllt. Die Lösung von (6,5), in diesem Sinn, fällt mit der Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (6,1) zusammen und man kann diese so in der Form (6,4) schreiben. Das Zusatzglied $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{s}_j \delta(t - T_j)$, welches man zu (6,6) zufügt, hat zufolge, dass die Lösung der Gleichung (6,6) noch durch den Term $\sum_{T_j \in \langle \bar{t}, \tau)} \Phi(\tau, T_j)\, \mathbf{s}_j$ zu korrigieren ist.

Sei weiter noch eine abzählbare Menge $\{t_j\} \subset \langle a, b\rangle$ $t_1 < t_2 < \ldots$ gegeben und sei jedem t_j eine konstante $n \times n$-Matrix $\mathbf{P}_j$ zugeordnet, wobei man $\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{P}_j\| < +\infty$ voraussetze. Legen wir weiter $\bar{\mathbf{A}}(t) = \int_a^t \mathbf{P}(\sigma)\, d\sigma + \sum_{t_j \in \langle a, t)} \mathbf{P}_j$, wobei in dieser letzten Summe alle $\mathbf{P}_j$ summiert werden, für welche die denen zugehörige t_j in $\langle a, t)$ liegen. Die Matrix $\bar{\mathbf{A}}(t)$ ist offenbar endlicher Variation im Intervall $\langle a, b\rangle$ und deren Elemente sind von links stetige, reelle Funktionen in $\langle a, b\rangle$.

Wir untersuchen weiter die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = D[\bar{\mathbf{A}}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)] \tag{6,7}$$

wobei $b(t)$ die Funktion vom oben untersuchten Fall ist, mit einer wachsenden Folge der Punkte $\{T_j\} \in \langle a, b\rangle$, $T_1 < T_2 < \ldots$

Für die Matrix $\bar{\mathbf{A}}(t)$ gilt $\Delta^+ \bar{\mathbf{A}}(t) = 0$ wenn $t \neq t_j$, $j = 1, 2, \ldots$ und $\Delta^+ \bar{\mathbf{A}}(t_j) = \mathbf{P}_j$, $j = 1, 2, \ldots$ Für die Fundamentalmatrix $\Phi(\xi, \bar{t})$ der homogenen Gleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = D\bar{\mathbf{A}}(t)\,\mathbf{x} \tag{6,8}$$

gilt nach (4,11) die Gleichung $t_j \geqq \bar{t}$

$$\bar{\Phi}(t_j+, \bar{t}) = [\mathbf{E} + \mathbf{P}_j]\, \bar{\Phi}(t_j, \bar{t}) \tag{6,9}$$

und nach (4,13) die Gleichung $t_j < \xi$

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\xi, t_j) = \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\xi, t_j+)\,[\mathbf{E} + \mathbf{P}_j] \tag{6,10}$$

und ferner genügt $\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\xi, \tilde{t})$ der Matrizengleichung $\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\xi, \tilde{t}) = \mathbf{E} + \int_{\tilde{t}}^{\xi} D\bar{\mathbf{A}}(t)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \tilde{t})$. Wenn $\tilde{t} \in (t_j, t_{j+1}\rangle$ und $\xi \in \langle\tilde{t}, t_{j+1}\rangle$ ist, dann gilt

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\xi, \tilde{t}) = \mathbf{E} + \int_{\tilde{t}}^{\xi} D\bar{\mathbf{A}}(t)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \tilde{t}) = \mathbf{E} + \int_{\tilde{t}}^{\xi} \mathbf{P}(t)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \tilde{t})\,\mathrm{d}\tau$$

und also ist die Fundamentalmatrix der Gleichung (6,8) für $\tilde{t}, \xi \in (t_j, t_{j+1}\rangle$ der Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t})$ der Gleichung (6,3) bzw. (6,2) gleich. Wenn $\tilde{t} \leqq \xi$ ist und $\tilde{t} \lneqq t_k < t_{k+1} < \ldots < t_{k+l} \leqq \xi$ dann gilt

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\xi, \tilde{t}) = \boldsymbol{\Phi}(\xi, t_{k+l})\,[\mathbf{E} + \mathbf{P}_{k+l}]\,\boldsymbol{\Phi}(t_{k+l}, t_{k+l-1})\ldots\\ \ldots\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, t_k)\,[\mathbf{E} + \mathbf{P}_k]\,\boldsymbol{\Phi}(t_k, \tilde{t})\,.\end{aligned} \tag{6,11}$$

Wenn $\xi < \tilde{t}$, dann kann $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \tilde{t})$ definiert werden, wenn für alle in $\langle\xi, \tilde{t})$ liegende Punkte t_j die Matrix $\mathbf{E} + \mathbf{P}_j$ nichtsingular ist (vgl. Absatz 4).

Für die Lösung $\mathbf{x}(\tau)$ der Gleichung (6,8) mit $\mathbf{x}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{x}} \in R^n$ gilt

$$\mathbf{x}(\tau) = \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \tilde{t})\,\tilde{\mathbf{x}} \tag{6,12}$$

und also ist

$$\mathbf{x}(t_j+) = \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t_j+, \tilde{t})\,\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{E} + \mathbf{P}_j]\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t_j, \tilde{t})\,\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{E} + \mathbf{P}_j]\,\mathbf{x}(t_j) = \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{P}_j\,\mathbf{x}(t_j)\,.$$

Die Lösung $\mathbf{x}(\tau)$ der Gleichung (6,8) ist für $(t_j, t_{j+1}\rangle$ zugleich auch eine Lösung der Gleichung (6,3) und es gilt für diese

$$\mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}(\tau, t_j)\,\mathbf{x}(t_j+) = \boldsymbol{\Phi}(\tau, t_j)\,\mathbf{x}(t_j) + \boldsymbol{\Phi}(\tau, t_j)\,\mathbf{P}_j\,\mathbf{x}(t_j)\,.$$

Wenn man nun die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = [\mathbf{P}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}_j\delta(t - t_j)]\,\mathbf{x} \tag{6,13}$$

betrachtet und deren Lösung als eine von links stetige Funktion $\mathbf{x}(\tau)$ im Definitionsintervall auffasst, wobei $\mathbf{x}(\tau)$ nur in den Punkten t_j unstetig sein kann und wo in diesen Punkten die Gleichung $x(t_j+) = [\mathbf{E} + \mathbf{P}_j]\,\mathbf{x}(t_j)$ gilt, dann fällt diese Lösung der Gleichung (6,13) mit der Lösung der verallgemeinerten Gleichung (6,8) zusammen.

Ebenso wie bevor fällt auch die Lösung der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = [\mathbf{P}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}_j\delta(t - t_j)]\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{s}_j\delta(t - T_j) \tag{6,14}$$

mit der Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (6,7) zusammen und für die aus dem Punkt $(\tilde{x}, \tilde{t})$, $\tilde{x} \in R^n$, $\tilde{t} \in \langle a, b \rangle$ ausgehende Lösung der Gleichung (6,14) kann man die Formel (5,3) benützen.

Literaturverzeichniss

[1] *A. Halanay, D. Wexler:* Teorie calitativă a sistemelor cu impulsuri, Editura Acad. Rep. Soc. România, Bucureşti, 1968.

[2] *T. H. Hildebrandt:* On systems of linear differentio-Stieltjes integral equations, Illinois J. of Math., Vol. *3* (1959), 352—373.

[3] *J. Kurzweil:* Generalized differential equations and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J. *7* (*82*), (1957), 418—449.

[4] *J. Kurzweil:* Generalized differential equations, Czech. Math. J. *8* (*83*), (1958), 360—388.

[5] *Š. Schwabik:* Stetige Abhängigkeit von einem Parameter und invariante Mannigfaltigkeiten für verallgemeinerte Differentialgleichungen, Czech. Math. J. *19* (*94*), 398—427.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).