ÚLOHY A PROBLÉMY

Řešení úlohy č. 3 (autor Jan Mařík) z roč. *81* (1956), str. 247.

Úloha: *Rozhodněte, zda platí tato věta*: *Buďte* G, H *otevřené konvexní množiny v obyčejném trojrozměrném* (*event.* n-*rozměrném*) *prostoru. Množina* H *buď omezená a nechť* $\overline{H} \subset G$. *Nechť funkce* f *má omezené spojité* (*resp. omezené*) *derivace prvního řádu na množině* $G - \overline{H}$. *Potom je funkce* f *stejnoměrně spojitá* (*na* $G - \overline{H}$).

1. Označení. Pro $c \in E_n$, $R > 0$ buď $\Omega(c, R) = \{x; |x - c| < R\}$ (koule). Symboly $\overline{M}$, M^0, hr M rozumíme uzávěr, vnitřek, hranici množiny $M \subset E_n$. Body prostoru E_n ($n > 1$) budeme někdy psát ve tvaru $[x, y]$, kde $x \in E_{n-1}$, $y \in E_1$. Pro $x, y \in E_n$ buď $x \,.\, y$ skalární součin x a y; $\overline{xy}$ buď pro $x \neq y$ úsečka o koncových bodech x, y; pro $x = y$ buď $\overline{xy} = \{x\}$. Konvexním tělesem v E_n rozumíme kompaktní konvexní množinu s neprázdným vnitřkem.

2. Lemma. *Buď* M *neprázdná otevřená množina v* E_n, *parciální derivace prvního řádu funkce* f *buďte omezené v* M. *Potom existuje* $\alpha > 0$ *s touto vlastností*: *je-li* $x, y \in M$, $\overline{xy} \subset M$, *pak* $|f(y) - f(x)| \leqq \alpha|y - x|$.

Důkaz. Nechť pro každé $z \in M$ a $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $|\partial f(z)/\partial x_i| \leqq \alpha_1$. Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu. Můžeme předpokládat, že $x \neq y$. Pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ položme $z(t) = x + t(y - x)$. Pro každé $t \in \langle 0, 1\rangle$ zřejmě existuje n-rozměrný otevřený interval I_t, který obsahuje bod $z(t)$ a splňuje vztah $\bar{I}_t \subset M$. Protože je $\langle 0, 1\rangle$ kompaktní, existují čísla $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ tak, že označíme-li $z_i = z(t_i)$, je každá úsečka $\overline{z_{i-1}z_i}$ obsažena v některém I_t. Nechť $z_i = [z_i^1, z_i^2, \ldots, z_i^n]$. Ze známé věty (např. V. Jarník: Diferenciální počet II, Praha 1955, věta 182) plyne, že

$$|f(z_i) - f(z_{i-1})| \leqq \alpha_1 \sum_{j=1}^{n} |z_i^j - z_{i-1}^j| \leqq \alpha_1 \sqrt{(n)}\, |z_i - z_{i-1}|$$

($i = 1, 2, \ldots, k$). Je ovšem

$$|f(y) - f(x)| = \Big|\sum_{i=1}^{k} (f(z_i) - f(z_{i-1}))\Big| \leqq \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 \sqrt{(n)}\, |z_i - z_{i-1}| = \alpha_1 \sqrt{(n)}\, |y - x| .$$

Nyní položíme $\alpha = \alpha_1 \sqrt{(n)} + 1$.

3. Lemma. *Buď* K *konvexní těleso v* E_n ($n > 1$), $c \in$ hr K. *Potom existuje* $w \in K^0$ *takové, že* $K \subset \{x; (x - c) \,.\, (w - c) \geqq 0\}$.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $c = 0$ $(= [0, 0, \ldots, 0])$. Buď $N = \{v; v \in E_n, K \subset \{x; x . v \leqq 0\}\}$, $N_1 = \{x; -x \in N\}$. Snadno zjistíme, že N_1 je neprázdná konvexní množina. Protože K je konvexní těleso, je K^0 neprázdná konvexní množina. Předpokládejme, že $K^0 \cap N_1 = \emptyset$; odvodíme spor. Pro množiny K^0, N_1 použijeme známé věty o oddělování konvexních množin (např. F. Valentine: Convex Sets, New York 1964, věta 2.9). Z této věty plyne, že existuje $0 \neq v_1 \in E_n$ a $\lambda \in E_1$ tak, že $K^0 \subset \{x; x . v_1 \leqq \lambda\}$ a $N_1 \subset \{x; x . v_1 \geqq \lambda\}$. Protože $0 \in N_1$, je $\lambda \leqq 0$. Ze spojitosti skalárního součinu a ze vztahu $0 \in \operatorname{hr} K^0$ plyne, že $\lambda \geqq 0$. Je tedy $\lambda = 0$. Protože K je konvexní těleso, je $\overline{K^0} = K$ a tedy zřejmě $K \subset \{x; x . v_1 \leqq 0\}$. Odtud plyne, že $v_1 \in N$, tedy $-v_1 \in N_1$. To ovšem znamená, že $-v_1 . v_1 = -|v_1|^2 \geqq 0$. To je spor, neboť $v_1 \neq 0$. Existuje tedy $w \in K^0 \cap N_1$. Pro toto w je zřejmě $K \subset \{x; x . w \geqq 0\}$. Lemma je dokázáno.

4. Lemma. *Buď K konvexní těleso v E_n $(n > 1)$, $c \in \operatorname{hr} K$. Existuje $\Delta > 0$ s touto vlastností: Je-li $0 < \delta \leqq \Delta$ a $u_1, u_2 \in \Omega(c, \delta) - K$, existují body u'_1, u'_2 tak, že množiny $\overline{u_1 u'_1}$, $\overline{u'_1 u'_2}$, $\overline{u_2 u'_2}$ jsou obsaženy v $\Omega(c, \delta) - K$.*

Důkaz. Nechť w má stejný význam jako v lemmatu 3. Nejprve předpokládejme, že $c = 0$ a $w = [0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$. Položme $K_x = \{y; [x, y] \in K\}$ pro $x \in E_{n-1}$; dále položme $K' = \{x; x \in E_{n-1}, K_x \cap K^0 \neq \emptyset\}$. Protože K je konvexní těleso, existují pro každé $x \in K'$ čísla $\alpha_x < \beta_x$ taková, že $K_x = \langle \alpha_x, \beta_x \rangle$. Z lemmatu 3 plyne, že pro taková x je $\alpha_x \geqq 0$ a dále pro $x = [0, \ldots, 0] \in E_{n-1}$ je $0 = \alpha_x < \vartheta < \beta_x$. Odtud snadno plyne, že existuje $\Delta > 0$ tak, že $\Omega(0, \Delta) \cap E_{n-1} \subset K'$ a že pro $[x, y] \in \Omega(0, \Delta) - K$ je $y < \alpha_x$. Buď nyní $0 < \delta \leqq \Delta$, $u_i = [x_i, y_i] \in \Omega(0, \delta) - K$, $i = 1, 2$. Existuje zřejmě $\varepsilon_i < 0$ tak, že $u'_i = [x_i, \varepsilon_i] \in \Omega(0, \delta)$, a protože $y_i < \alpha_{x_i}$, je $\overline{u_i u'_i} \subset \Omega(0, \delta) - K$. Je ovšem $u'_i \in \Omega(0, \delta) \cap \{[x, y]; y < 0\}$, což je konvexní množina disjunktní s K, a tedy $\overline{u'_1 u'_2} \subset \Omega(0, \delta) - K$. Pro případ, že $c = 0$ a $w = [0, \vartheta]$ $(\vartheta > 0)$, je lemma dokázáno.

V obecném případě položme $\vartheta = |w - c| > 0$ a sestrojme isometrické zobrazení φ prostoru E_n na E_n takové, že $\varphi(c) = 0$ a $\varphi(w - c) = [0, \vartheta]$. Takové zobrazení jistě existuje. Nyní aplikujeme první část důkazu.

5. Věta. *Buďte G, H otevřené konvexní množiny v E_n. Buď $G \neq \emptyset$, množina H buď omezená a nechť $\overline{H} \subset G$. Buď f funkce na $G - \overline{H}$ s touto vlastností: existuje $\alpha > 0$ tak, že platí*

$$|f(y) - f(x)| \leqq \alpha |y - x|, \tag{1}$$

kdykoli $x, y \in G - \overline{H}$, $\overline{xy} \subset G - \overline{H}$. Potom je funkce f stejnoměrně spojitá na $G - \overline{H}$.

Důkaz. Je-li $H = \emptyset$, je množina $G - \overline{H}$ konvexní a z (1) tvrzení ihned plyne. Buď tedy $H \neq \emptyset$. Je-li $n = 1$, je ovšem $G - \overline{H}$ sjednocením dvou disjunktních otevřených intervalů. Odtud a z (1) je platnost tvrzení zřejmá.

V dalším předpokládáme. že $H \neq \emptyset$ a $n > 1$. Označme $M = G - \bar{H}$. Množina M je otevřená a $\bar{H}$ je konvexní těleso.

Předpokládejme, že tvrzení věty není správné. Potom existuje $\varepsilon > 0$ a body x_m, x'_m $(m = 1, 2, \ldots)$ z M takové, že pro každé m je

$$|x_m - x'_m| < \frac{1}{m}, \tag{2}$$

$$|f(x_m) - f(x'_m)| \geqq \varepsilon . \tag{3}$$

Tvrdíme, že posloupnost $\{x_m\}$ je omezená. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by, jak snadno zjistíme, otevřený poloprostor P disjunktní s $\bar{H}$ tak, že pro nekonečně mnoho indexů m by platilo $x_m \in P$, $x'_m \in P$. Pak by ovšem byla množina $P \cap M = P \cap G$ konvexní a tedy vzhledem k (2) a (1) bychom dostali pro dostatečně velké m spor s (3). Posloupnost $\{x_m\}$ má tedy alespoň jeden hromadný bod. Označme ho y. Je $y \in \bar{M}$. Existuje posloupnost $\{x_{m_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{x_m\}$, pro niž $x_{m_k} \to y$. Pišme y_k (resp. y'_k) místo x_{m_k} (resp. x'_{m_k}). Je tedy

$$y_k \to y \tag{4}$$

a vzhledem k (2) také

$$y'_k \to y . \tag{5}$$

Bod y zřejmě neleží v H. Kdyby však neležel v $\bar{H}$, byl by průnik dostatečně malé koule o středu y s množinou M konvexní a vzhledem k (4), (5), (1) bychom dostali spor s (3).

Z předpokladu, že f není stejnoměrně spojitá v M, tedy plyne, že existují posloupnosti $\{y_k\}$, $\{y'_k\}$ bodů z M a bod $y \in \operatorname{hr} H$ tak, že platí (4), (5) a že pro každé přirozené k je

$$|f(y_k) - f(y'_k)| \geqq \varepsilon . \tag{6}$$

Zřejmě existuje $\Delta_1 > 0$ tak, že $\Omega(y, \Delta_1) - \bar{H} \subset M$. V lemmatu 4 položíme $K = \bar{H}$, $c = y$ a sestrojíme příslušné číslo $\Delta > 0$. Dále položme $\delta = \min(\Delta, \Delta_1, \frac{1}{6}\varepsilon\alpha^{-1})$. Ze (4) a (5) plyne, že existuje přirozené číslo i tak, že $y_i \in \Omega(y, \delta)$, $y'_i \in \Omega(y, \delta)$. Předpoklady lemmatu 4 jsou splněny, položíme-li $y_i = u_1$, $y'_i = u_2$, $y = c$, $\bar{H} = K$. Nyní podle tohoto lemmatu sestrojíme body u'_1, u'_2. Protože každá z množin $\overline{u_1 u'_1}$, $\overline{u_1 u_2}$, $\overline{u_2 u'_2}$ leží v $\Omega(y, \delta) - \bar{H} \subset M$, je podle (1)

$$|f(y_i) - f(y'_i)| \leqq |f(y_i) - f(u'_1)| + |f(u'_1) - f(u'_2)| + |f(u'_2) - f(y'_i)| < \alpha \cdot 6\delta \leqq \varepsilon .$$

Vztah $|f(y_i) - f(y'_i)| < \varepsilon$ je však ve sporu s (6). Je tedy f stejnoměrně spojitá na $G - \bar{H}$. Věta je dokázána.

6. Poznámka. O množinách G, H nechť platí předpoklady věty 5. Z lemmatu 2 a věty 5 zejména plyne toto: Nechť funkce f má omezené derivace prvního řádu na množině $G - \bar{H}$. Potom je funkce f stejnoměrně spojitá (na $G - \bar{H}$).

Ivan Netuka, Praha