Časopis pro pěstování matematiky

Michal Bučko

Eine Benutzung der Zahlenzerlegung zur Bestimmung der Anzahl unisomorpher Zyklen in ξ-Turnieren

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 3, 225--230

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108674

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 97 * PRAHA 9. 8. 1972 * ČÍSLO 3

EINE BENUTZUNG DER ZAHLENZERLEGUNG ZUR BESTIMMUNG DER ANZAHL UNISOMORPHER ZYKLEN IN ξ-TURNIEREN

MICHAL BUČKO, Košice

(Eingegangen am 7. October 1970)

1.

In der ganzen Arbeit verstehen wir unter einer Zahl eine natürliche Zahl.

Bezeichnen wir $p_n(2n + 1, k)$ die Anzahl der Zerlegung der Zahl $2n + 1$ in k Zahlen, aus denen keine grösser als die Zahl n ist.

Weiter leiten wir die Formeln für die Anzahl der Zerlegungen $p_n(2n + 1, k)$ ab, wenn $k = 3, 4$ ist.

Satz 1. *Es sei* $p_n(2n + 1,3)$ *die Anzahl der Zerlegungen der Zahl* $2n + 1$ *in* 3 *Zahlen, die nicht grösser als die Zahl n sind. Dann gilt*

$$p_n(2n + 1, 3) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/3]} \left[\frac{n + 1 - 3k}{2}\right]. \tag{1}$$

Beweis. Gestalten wir folgenderweise das Schema 1, in dem die Summe jeder Spalte $2n + 1$ ist:

$$\begin{array}{lll|llll|c|l}
n & n & \dots n & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & \dots & \dots h \\
n & n-1 & \dots r_1 & n-1 & n-2 & \dots & r_2 & \dots & \dots r_p \\
1 & 2 & \dots s_1 & 3 & 4 & \dots & s_2 & \dots & \dots s_p
\end{array}$$

Schema 1

Dabei legen wir $n \geqq r_1 \geqq s_1$, $n - 1 \geqq r_2 \geqq s_2$, $h \geqq r_p \geqq s_p$, $r_1 + s_1 = n + 1$, $r_2 + s_2 = n + 2, \ldots$ und

$$r_p + s_p = \begin{cases} \frac{2}{3}(2n + 1), \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 0 \pmod 3 \text{ ist}, \\ 2\left[\frac{2n + 1}{3}\right], \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 1 \pmod 3 \text{ ist}, \\ 2\left[\frac{2n + 1}{3}\right] + 1, \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 2 \pmod 3 \text{ ist}, \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} \frac{2n + 1}{3}, \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 0 \pmod 3 \text{ ist}, \\ \left[\frac{2n + 1}{3}\right] + 1, \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 0 \pmod 3 \text{ ist} \end{cases}$$

legen.

Die Anzahl der Spalten im Schema 1 ist der Zahl $p_n(2n + 1, 3)$ gleich. Wir überzeugen uns leicht aus dem Schema 1, dass für eine beliebige Zahl n

$$p_n(2n + 1, 3) = \left[\frac{n + 1}{2}\right] + \left[\frac{n - 2}{2}\right] + \left[\frac{n - 5}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n + 1 - 3\left[\frac{n - 1}{3}\right]}{2}\right]$$

gilt.

Damit ist der Beweis des Satzes 1 beendet.

Es ist ersichtlich, dass $[a_1] + \ldots + [a_k] \leqq a_1 + \ldots + a_k$ für beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ gilt. Darum ist:

$$p_n(2n + 1, 3) \leqq \frac{n + 1}{2} + \frac{n + 1 - 3 \,.\, 1}{2} + \frac{n + 1 - 3 \,.\, 2}{2} + \frac{n + 1 - 3 \,.\, 3}{2} + \ldots +$$

$$+ \frac{n + 1 - 3 \,.\left(\frac{n - 1}{3}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left\{(n + 1)\left(\frac{n - 1}{3} + 1\right) - 3\left(1 + 2 + \ldots + \frac{n - 1}{3}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\binom{n + 3}{2}.$$

Wenn wir weiter überlegen, dass $m - 1 \leqq [m]$ für jede Zahl m gilt und dass in der Zahlenfolge $n + 1, n - 2, n - 5, \ldots$ gerade und ungerade Zahlen sich gegenseitig abwechseln, dann bekommen wir die untere Grenze für $p_n(2n + 1, 3)$, wenn wir von $\frac{1}{6}\binom{n+3}{2}$ die Zahl $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{3}+1\right)$ subtrahieren. Es gilt also

$$\frac{1}{6}\binom{n+2}{2} \leqq p_n(2n+1,3) \leqq \frac{1}{6}\binom{n+3}{2}. \tag{2}$$

Satz 2. *Es sei $p_n(2n+1,4)$ die Anzahl der Zerlegungen der Zahl $2n+1$ in 4 Zahlen, die nicht grösser als die Zahl n sind. Dann gilt*

$$p_n(2n+1,4) = \sum_{\substack{i=0 \\ 0 \leqq 3i+j \leqq n-2}} \sum_{j=0} \left[\frac{n-3i-j}{2}\right]. \tag{3}$$

Beweis. Gestalten wir das Schema 2, in dem die Summe der Elemente in jeder Spalte $2n+1$ ist, folgenderweise:

$n \quad \dots\ n$	$n-1 \ \dots\ n-1$	$\dots$	$\dots\ q$
$n-1 \ \dots\ x_1$	$n-1 \ \dots\ x_2$	$\dots$	$\dots\ x_p$
$1 \quad \dots\ y_1$	$2 \quad \dots\ y_2$	$\dots$	$\dots\ y_p$
$1 \quad \dots\ z_1$	$1 \quad \dots\ z_2$	$\dots$	$\dots\ z_p$

Schema 2

Wir legen dabei $n \geqq x_1 \geqq y_1 \geqq z_1$, $n-1 \geqq x_2 \geqq y_2 \geqq z_2, \dots, q \geqq x_p \geqq y_p \geqq z_p$, $x_1 + y_1 + z_1 = n+1$, $x_2 + y_2 + z_2 = n+2, \dots, q + x_p + y_p + z_p = 2n+1$.

Wenn wir die Ergebnisse des Schemas 1 für die zweite, dritte und vierte Spalte des Schemas 2 benutzen, bekommen wir

$$p_n(2n+1,4) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-3}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n-3\,.\left[\frac{n-2}{3}\right]}{2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-4}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n-1-3\,.\left[\frac{n-3}{3}\right]}{2}\right] + \dots + \left[\frac{d}{2}\right],$$

wobei d eine der Zahlen 2, 3, 4 ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Aus (2) und (3) folgt dass

$$\frac{1}{6}\binom{n+1}{2} + \frac{1}{6}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{6}\binom{3}{2} \leqq$$

$$\leqq p_n(2n+1,4) \leqq \frac{1}{6}\binom{n+2}{2} + \frac{1}{6}\binom{n+1}{2} + \dots + \frac{1}{6}\binom{4}{2},$$

ist, woraus wir nach einer Berechnung

$$\frac{1}{6}\left\{\binom{n+2}{3}-1\right\} \leqq p_n(2n+1,4) = \frac{1}{6}\left\{\binom{n+3}{3}-4\right\}, \tag{4}$$

bekommen.

In der Tabelle 1 werden die Zahlen $p_n(2n + 1, 3)$ und $p_n(2n + 1, 4)$ für $n =$ $= 1, 2, \ldots, 10$ angeführt.

Tab. 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_n(2n+1, 3)$	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12
$p_n(2n+1, 4)$	0	1	2	4	7	11	16	23	31	41

2.

A. Kotzig behandelt in der Arbeit [1] die Zyklen in Turnieren und führt eine Definition spezieller Turniere an, woher wir die folgende Definition übernehmen:

Definition 1. Es sei G ein Turnier mit m Knotenpunkten. Wir nennen G genau dann ein ξ-Turnier, wenn wir dessen Knotenpunkten so numerieren können, dass für jedes Paar der Indexen $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Folgendes gilt: Wenn G die Kante $\overrightarrow{v_iv_j}$ enthält, dann enthält G auch die Kante $\overrightarrow{v_{i+1}v_{j+1}}$ (wobei wir $v_{m+1} = v_1$ legen).

Es ist ersichtlich, dass jedes ξ-Turnier eine ungerade Anzahl von Knotenpunkten enthält.

Es sei G ein ξ-Turnier mit $2n + 1$ Knotenpunkten. Nehmen wir die Kante $\overrightarrow{v_iv_j}$ des Graphes G. Benennen wir eine gleichzeitige Vergrösserung der beiden Indexe um eins, bei der wir aus der Kante $\overrightarrow{v_iv_j}$ die Kante $\overrightarrow{v_{i+1}v_{j+1}}$ bekommen die Umdrehung der Kante $\overrightarrow{v_iv_j}$ (dabei ist $v_{i+k(2n+1)} = v_i$ für $k = 1, 2, \ldots$). Wir bezeichnen die Kantenlänge $\overrightarrow{v_iv_j}$ $(\overrightarrow{v_jv_i})$ des Graphes G mit d_{ij} und wir definieren:

$$d_{ij} = \min\left(|i-j|, 2n+1-|i-j|\right). \tag{6}$$

Bei so einer Definition der Kantenlänge gibt es nur Kanten der Länge $1, 2, \ldots, n$, wobei es in G genau $2n + 1$ Kanten der Länge i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gibt. Es ist ersichtlicht, dass die Kantenlänge bei der Umdrehung (auch bei der vielfachen Umdrehung) sich nicht wechselt.

Es sei C ein gegebener Zyklus des Graphes G. Eine Umdrehung des Zyklus C sei die gleichzeitige Umdrehung aller seiner Kanten genannt.

Definition 2. Unter der Länge des Zyklus C verstehen wir die Anzahl seiner Kanten.

Es sei G ein ξ-Turnier mit $2n + 1$ Knotenpunkten. Bezeichnen wir $S(G, k)$ die Summe der Kantenlängen des Zyklus der Länge k des Graphes G. Aus der Definition 2 und aus (6) folgt, dass

$$3 \leqq S(G, k) \leqq \binom{2n+1}{2} \quad \text{ist.}$$

Betrachten wir soein spezielles ξ-Turnier mit den Knotenpunkten $v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}$, das die Kanten

$$\overrightarrow{v_1v_2}, \overrightarrow{v_1v_3}, \overrightarrow{v_1v_4}, \ldots, \overrightarrow{v_1v_{n+1}} \tag{7}$$

enthält und bezeichnen wir es mit G_1. Aus (7) und aus der Definition 1 folgt, dass der Graph G_1 genau folgende Kanten enthält:

$$\begin{array}{l}
\overrightarrow{v_1v_2}, \overrightarrow{v_2v_3}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_{2n+1}}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_1}\,, \\
\overrightarrow{v_1v_3}, \overrightarrow{v_2v_4}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_1}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_2}\,, \\
\overrightarrow{v_1v_4}, \overrightarrow{v_2v_5}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_2}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_3}\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overrightarrow{v_1v_n}, \overrightarrow{v_2v_{n+1}}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_{n-2}}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_{n-1}}\,, \\
\overrightarrow{v_1v_{n+1}}, \overrightarrow{v_2v_{n+2}}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_{n-1}}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_n}\,.
\end{array} \tag{8}$$

Aus (6) folgt, dass alle Kanten in der ersten Zeile die Länge 1, der in zweiten Zeile die Länge 2, usw. bis in der n-en Zeile die Länge n haben.

Lemma 1. *Es seinen k, p solche ganzen Zahlen, für die $1 \leqq p \leqq n$, $3 \leqq k \leqq \leqq 2n + 1$ gilt. Es sei G_1 ein ξ-Turnier, das die Kanten (7) enthält. Bezeichnen wir $S(G_1, k)$ die Summe der Kantenlängen von einem beliebigen Zyklus der Länge k des Graphes G_1. Dann gilt*

$$S(G_1, k) = p(2n + 1)\,. \tag{9}$$

Der Beweis folgt aus (6) und (8). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit genügt es die Summe der Kantenlängen der Zyklen der Länge k zu untersuchen, welche Zyklen durch einen fest ausgewählten Knotenpunkt gehen (z. B. v_1).

Bemerkung 1. Auf dem Grund von (8) überzeugen wir uns leicht, dass $S(G_1, 3) = = 2n + 1$, $S(G_1, 4) = 2n + 1$ ist.

Satz 3. *Es sei G_1 ein ξ-Turnier mit $2n + 1$ Knotenpunkten, welches die Kanten (8) enthält. Es seien $p_n(2n + 1, 3)$ und $p_n(2n + 1, 4)$ die Zahlen aus den Sätzen 1 und 2. Bezeichnen wir $Q(G_1, k)$ die Anzahl der unisomorphen Zyklen des Graphes G_1*

der Länge k. Dann gilt

$$(10) \qquad p_n(2n + 1, 3) \leqq Q(G_1, 3) < 2p_n(2n + 1, 3),$$

$$(11) \qquad p_n(2n + 1, 4) \leqq Q(G_1, 4) < 6p_n(2n + 1, 4).$$

Beweis. Es sei G_1 so ein ξ-Turnier, welches die Kanten (8) enthält. Es sei $C_3 = (v_{i_1}, v_{i_1}v_{i_2}, v_{i_2}, v_{i_2}v_{i_3}, v_{i_3}, v_{i_3}v_{i_1}, v_{i_1})$ ein Zyklus des Graphes G_1 der Länge 3. Es ist ersichtlich, dass $\{i_1, i_2, i_3\} \subset \{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$ ist. Die Kantenlängen des Zyklus C_3 bilden nach (6) die Zahlenfolge $\{d_{i_1 i_2}, d_{i_2 i_3}, d_{i_3 i_1}\}$, für die es gilt, dass deren jedes Glied eine ganze positive Zahl nicht grösser als n ist und dass die Summe aller 3 Glieder $2n + 1$ ist; also, die angeführte Zahlenfolge schafft die Zerlegung der Zahl $2n + 1$ in 3 Zahlen, die nicht grösser als n sind. Darum bekommen wir auf Grund des Eingeführten und der Bemerkung 1 die Anzahl $Q(G_1, k)$ aller unisomorphen Zyklen des Graphen G_1 der Länge 3, wenn wir alle Zerlegungen der Zahl $2n + 1$ in 3 Zahlen nicht grösse als n finden und wenn wir aus diesen Zerlegungen alle verschiedene unzyklische Permutation bilden. Wenn alle drei oder zwei Zahlen in dieser Zerlegung verschiedenen sind, dann bekommen wir eine unzyklische Permutation. In diesem Fall ist $Q(G_1, 3) = p_n(2n + 1, 3)$. Wenn alle drei Zahlen in der angeführten Zerlegung verschieden sind, dann existieren zwei unzyklische Permutationen von diesen Zahlen und es ist $Q(G_1, 3) = 2p_n(2n + 1, 3)$. Für $k = 4$ durchläuft der Beweis analogisch ausser dem Fall, dass $Q(G_1, 4) = p_n(2n + 1, 4)$ für die Zerlegung der Zahl $2n + 1$ in 4 gleiche oder drei gleiche Zahlen ist; in dem Fall von zwei verschiedenen und zwei gleichen Zahlen in derselben Zerlegung ist $Q(G_1, 4) = 3p_n(2n + 1, 4)$. Endlich in dem Fall, wenn alle Zahlen in der Zerlegung verschieden sind, ist $Q(G_1, 4) = 6p_n(2n + 1, 4)$. Damit haben wir den Satz 4 bewiesen.

In der Tabelle 2 sind die Zahlen $Q(G_1, 3)$ und $Q(G_1, 4)$ angeführt, wenn G_1 ein ξ-Turnier ist, welches 3, 5, 7, 11, 13 und 15 Knotenpunkten enthält.

Tab. 2

Anzahl der Knotenpunkten des Graphen G_1	3	5	7	9	11	13	15
$Q(G_1, 3)$	1	1	2	4	5	7	10
$Q(G_1, 4)$	0	1	4	10	20	35	56

Literatur

[1] *Kotzig A.:* Über Zyklen in Turnieren, Beiträge zur Graphentheorie, Leipzig 1968, 85—89.

Anschrift des Verfassers: Košice, Nám. Februárového víť. 9 (Vysoká škola technická).