Antonín Lešanovský

Sur la norme de Fourier. IV.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 115 (1990), No. 1, 81--84

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108727`

SUR LA NORME DE FOURIER, IV

ANTONÍN LEŠANOVSKÝ, Praha

Dédié à M. le Docteur František Zítek

(Reçu le 30 décembre 1987)

Résumé. Cete Note concerne les normes de Fourier et de Gauss désignées par $\mathscr{F} = \{F_\alpha; \alpha > 0\}$ et $\mathscr{G} = \{G_\alpha; \alpha > 0\}$ qui ont été introduites dans [2] et [7], respectivement. On a montré qu'il existe une suite $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ de mesures non nécessairement positives définies sur σ- algèbre des ensembles boréliens dans $\boldsymbol{R}$ telle que pour tout $\alpha > 0$ $\lim_{n\to\infty} G_\alpha(\mu_n) = 0$ tandis que $\lim_{n\to\infty} F_\alpha(\mu_n) = 1$. On peut trouver un example de l'inégalité duale dans [7].

Keywords: Signed measures, seminorms.

AMS Classification: 60F05.

Le but de la présente Note est de contribuer à la théorie de la seminorme de Fourier introduite dans [7] (voir aussi [8] et [9]), en particulier en ce qui concerne ses rapports à la seminorme de Gauss de H. Bergström (voir [1] ou [2]).

Nous allons commencer par rappeler quelques définitions. Soit $\bar{\mathscr{M}}$ l'ensemble des mesures (non nécessairement positives) définies sur le σ-algèbre $\mathscr{B}$ des ensembles boréliens dans $\boldsymbol{R}$, soit $\mathscr{M} \subset \bar{\mathscr{M}}$ le sous-ensemble des mesures positives et désignons par $\mathscr{N}$ l'ensemble des mesures de la forme $\nu = \mu - e$ où $\mu \in \mathscr{M}$ et e est la mesure définie sur $\mathscr{B}$ par

$$\begin{aligned} e(B) &= 0 \quad \text{si} \quad 0 \notin B \in \mathscr{B}\,, \\ &\ 1 \quad \text{si} \ 0 \in B \in \mathscr{B}\,. \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha > 0$, $\mu \in \bar{\mathscr{M}}$ nous écrivons

$$F_\alpha(\mu) = \sup_{|t| \leqq 1/\alpha} \left| \int_{\boldsymbol{R}} \exp(itx)\, \mu(\mathrm{d}x) \right|,$$

$$G_\alpha(\mu) = \sup_{x \in \boldsymbol{R}} \left| \int_{\boldsymbol{R}} \Phi(x - y/\alpha)\, \mu(\mathrm{d}y) \right|$$

où

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u\,, \quad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Les familles

$$\mathscr{F} = \{F_\alpha; \alpha > 0\},$$
$$\mathscr{G} = \{G_\alpha; \alpha > 0\}$$

des seminormes sur $\mathscr{M}$ sont appelées classe de Fourier et classe de Gauss, respectivement.

Comme l'a montré H. Bergström dans [2], les classes de seminormes sur $\mathscr{M}$ peuvent constituer un moyen efficace dans l'étude de la convergence faible des mesures. L'appareil des seminormes a été ainsi exploité dans [2], [5] et [6].

On a démontré dans [2], [4], [8] et [9] que les classes $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont équivalentes sur $\mathscr{N}$ dans le sens qu'il existe une constante C telle que

$$F_\alpha(\mu) \leqq C\, G_\alpha(\mu), \tag{1}$$
$$G_\alpha(\mu) \leqq C\, F_\alpha(\mu), \tag{2}$$

quels que soient $\alpha > 0$, $\mu \in \mathscr{N}$. Il est peut-être bon de souligner que l'ensemble $\mathscr{N}$ joue un rôle assez important dans les considérations de [2].

Cependant les classes $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{M}$ entier. On a montré cela déjà dans [7] en rappelant un example dû à Dyson (voir [3]): il existe une suite de mesures $\{\mu_n\}$, $\mu_n \in \mathscr{M}$, telle que $F_\alpha(\mu_n) \to 0$ pour tout $\alpha > 0$, tandis que $G_\alpha(\mu_n) \geqq$ $\geqq D > 0$, D étant une constante indépendante de n (elle peut dépendre de α).

Nous allons faire voir maintenant que la situation opposée peut se présenter également: il existe une suite $\{\mu_n\}$, $\mu_n \in \mathscr{M}$, telle que $G_\alpha(\mu_n) \to 0$ pour tout $\alpha > 0$ tandis que $F_\alpha(\mu_n) = 1$ pour tout n suffisamment grand.

Exemple. Soient $\nu_k^{(m)} \in \mathscr{M}$, définies pour $m \in \boldsymbol{N}$ et $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ par

$$\nu_k^{(m)}(\{(k + \tfrac{1}{2})\, m\}) = 1,$$
$$\nu_k^{(m)}(\{-(k + \tfrac{1}{2})\, m\}) = -1,$$
$$\nu_k^{(m)}(B) = 0 \quad \text{si} \quad B \in \mathscr{B}, \quad B \subset \boldsymbol{R} - \{(k + \tfrac{1}{2})\, m;\ -(k + \tfrac{1}{2})\, m\}.$$

Nous considérons la suite $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$ où

$$\mu_n(B) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, \nu_k^{(n)}(B) \quad \text{pour tous} \quad B \in \mathscr{B} \quad \text{et} \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

On obtient

$$F_\alpha(\mu_n) = \sup_{|t| \leqq 1/\alpha} \left| \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[e^{it(k+1/2)n} - e^{-it(k+1/2)n} \right] \right| =$$
$$= \sup_{|t| \leqq 1/\alpha} \frac{1}{2n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, 2 \sin t(k + \tfrac{1}{2})\, n \right| =$$
$$= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin (k + \tfrac{1}{2})\, \pi \right| = 1$$

pour tout $\alpha > 0$ et $n \geqq \alpha\pi$, donc

$$\lim_{n \to \infty} F_\alpha(\mu_n) = 1 \quad \text{pour tout} \quad \alpha > 0 .$$

D'autre part, pour tout $\beta > 0$,

$$G_\beta(\mu_n) = \sup_{x \in \boldsymbol{R}} \left| \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\hat{\Phi}\left(\frac{x - (k + \frac{1}{2}) n}{\beta} \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \hat{\Phi}\left(\frac{x + (k + \frac{1}{2}) n}{\beta} \right) \right] \right| = \sup_{x \in \boldsymbol{R}} \frac{1}{2n} \left| \sum_{k=-n}^{n-1} (-1)^k \hat{\Phi}\left(\frac{x + (k + \frac{1}{2}) n}{\beta} \right) \right| =$$

$$= \sup_{x \in \boldsymbol{R}} \frac{1}{2n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{x + (\frac{1}{2} - n) n + 2kn}{\beta} \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \hat{\Phi}\left(\frac{x + (\frac{1}{2} - n) n + (2k + 1) n}{\beta} \right) \right] \right| \leqq$$

$$\leqq \sup_{x \in \boldsymbol{R}} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{x + (\frac{1}{2} - n) n + (2k + 2) n}{\beta} \right) - \right.$$

$$\left. - \hat{\Phi}\left(\frac{x + (\frac{1}{2} - n) n + 2kn}{\beta} \right) \right] =$$

$$= \sup_{x \in \boldsymbol{R}} \frac{1}{2n} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{x + (\frac{1}{2} + n) n}{\beta} \right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x + (\frac{1}{2} - n) n}{\beta} \right) \right] \leqq \frac{1}{2n} .$$

Il en résulte

$$\lim_{n \to \infty} G_\beta(\mu_n) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \beta > 0 .$$

Nous pouvons donc conclure que les inégalités (1) et (2) ne peuvent pas être valables dans $\mathscr{M}$ entier.

Références

[1] *H. Bergström:* Limit Theorems for Convolutions. Almqvist & Wiksell, Stockholm (1963).

[2] *H. Bergström:* Weak Convergence of Measures. Academic Press, New York (1982).

[3] *F. J. Dyson:* Fourier transforms of distribution functions. Canad. J. Math. *5* (1953), 554–558.

[4] *J. Rataj:* Some remarks on Fourier seminorms. Časopis pěst. mat. *112* (1987), 368–372.

[5] *J. Rataj:* A characterization of the weak convergence of convolution powers. Časopis pěst. mat. *115* (1990), 48–60.

[6] *J. Rataj, F. Zítek:* Sur la norme de Fourier, III. Časopis pěst. mat. *112* (1987), 312–319.

[7] *F. Zítek:* Sur quelques théorèmes limites pour les fonctions aléatoires. Časopis pěst. mat. *91* (1966), 453–462.

[8] *F. Zítek:* Sur la norme de Fourier. Časopis pěst. mat. *93* (1968), 349–353.

[9] *F. Zítek:* Sur la norme de Fourier, II. Časopis pěst. mat. *95* (1970), 62–65.

Souhrn

O FOURIEROVSKÉ NORMĚ, IV

ANTONÍN LEŠANOVSKÝ

Článek se týká fourierovské a gaussovské normy, které byly zavedeny v [2], resp. [7] a jsou označeny po řadě $\mathscr{F} = \{F_\alpha;\ \alpha > 0\}$ a $\mathscr{G} = \{G_\alpha;\ \alpha > 0\}$. Ukazuje, že existuje taková posloupnost $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ znaménkových měr na borelovské σ-algebře reálných čísel, že pro všechna $\alpha > 0$ platí $\lim_{n\to\infty} G_\alpha(\mu_n) = 0$ a $\lim_{n\to\infty} F_\alpha(\mu_n) = 1$. Příklad duální nerovnosti těchto norem lze nalézt v [7].

Резюме

О НОРМЕ ФУРЬЕ, IV

ANTONÍN LEŠANOVSKÝ

Статья касается нормы Фурье и гауссовской нормы, обозначённых $\mathscr{F} = \{F_\alpha;\ \alpha > 0\}$ и $\mathscr{G} = \{G_\alpha;\ \alpha > 0\}$ и введённых в [2] и [7] соответственно. Показывается, что существует такая последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ обобщенных мер, что для всех $\alpha > 0$ имеет место $\lim_{n\to\infty} G_\alpha(\mu_n) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} F_\alpha(\mu_n) = 1$. Пример двойственного неравенства можно найти в [7].

L'adresse de l'auteur: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.