Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90. (1965), Praha

O KOMPAKTNÍCH MNOŽINÁCH V LOKÁLNĚ KONVEXNÍCH PROSTORECH

JIŘÍ FIALA, Praha

(Došlo dne 21. května 1964)

V r. 1938 dokázal I. M. GELFAND [1] toto kriterium kompaktnosti pro banachovy prostory: K tomu aby množina K v banachově prostoru X byla (relativně) kompaktní je nutné a v případě, že X je separabilní i stačí, aby pro každou posloupnost lineárních funkcionálů, která slabě konverguje k nule, byla limitní relace

$$f_n(x) \to 0 \tag{1}$$

splněna stejnoměrně na K. Přeneseme tento výsledek na neseparabilní lokálně konvexní prostory a dokážeme některé věty o vnoření.

1. KRITERIUM KOMPAKTNOSTI V PROSTORECH $C(S)$

Nechť S je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor. $C(S)$ označujme množinu všech spojitých funkcí na S. Struktura lokálně konvexního prostoru je na $C(S)$ určena skoro stejnoměrnou konvergencí posloupností funkcí na S. Posloupnost a podposloupnost v dalším je totéž co „net“ a „subnet“ u KELLEYho [2]. Přeformulujme pro naši potřebu Arzelà-Ascoliho kriterium kompaktnosti systému funkcí z $C(S)$ ([2], str. 234):

Podmnožina K prostoru $C(S)$ je relativně kompaktní tehdy a jen tehdy, když je skoro omezená (tj. omezená na každé kompaktní podmnožině) a stejně spojitá na S. Poslední podmínka je ekvivalentní s touto: Je-li $\{s_\alpha\}$ posloupnost z S konvergující k s, pak $f(s_\alpha) \to f(s)$ stejnoměrně na K.

2. VĚTY O VNOŘENÍ

Věta 1. *Každý lokálně konvexní prostor lze vnořit (lineární homeomorfismus, v případě normovaného prostoru isonormní lineární zobrazení) do prostoru $C(S)$, kde S je lokálně kompaktní (v případě normovaného prostoru kompaktní) Hausdorffův prostor.*

Důkaz. Nejprve nechť je X normovaný prostor. Jednotková koule (silně uzavřená) Ω prostoru X^* je podle Alaogluovy věty slabě kompaktní. Prvku $x \in X$ přiřadíme tuto funkci na Ω:

$$u(f) = f(x).$$

Funkce u je spojitá ve slabé topologii na Ω. Když totiž $f_\alpha \to f$ je $u(f_\alpha) = f_\alpha(x) \to f(x) = u(f)$. Dále je zřejmě toto přiřazení lineární. Konečně $|u(f)| = |f(x)| \leqq \|x\|$ a tedy $\max |u(f)| \leqq \|x\|$. S druhé strany podle Hahn-Banachovy věty existuje takový lineární funkcionál f na X, že $\|f\| \leqq 1$ a $f(x) = \|x\|$ pro ten náš prvek x. Tedy celkem $\max |u(f)| = \|x\|$. Nechť nyní je X lokálně konvexní. Podle známé věty (viz např. [3] Ch. II, § 5, Proposition 7) je možno X vnořit do kartézského součinu normovaných prostorů a tedy do kartézského součinu

$$\prod_{\iota \in I} C(S_\iota), \tag{2}$$

kde S_ι jsou kompaktní Hausdorffovy prostory. Označme S topologický součet (direct join) prostorů S_ι. S je zřejmě lokálně kompaktní prostor. Vnoříme nyní součin (2) do $C(S)$: Prvku $\{f_\alpha\}$ z (2) přiřadíme takto definovanou funkci na S:

$$f(x) = f_\alpha(x) \quad \text{pro} \quad x \in S_\alpha.$$

Toto přiřazení je zřejmě žádaným vnořením. Tím je důkaz ukončen.

Poznámka. Je-li normovaný prostor X separabilní, lze totéž žádat i od S. V případě lokálně konvexního prostoru to platí, je-li metrisovatelný. Důkaz plyne z toho, že S je slabě separabilní, je-li X separabilní a dále z toho, že kartézský součin spočetně mnoha separabilních prostorů je opět separabilní prostor.

Jako důsledek dokázaného tvrzení dokážeme nyní větu o vnoření metrických a uniformních prostorů.

Věta 2. *Každý metrický prostor je isometrický nějaké podmnožině prostoru $C(S)$, kde S je kompaktní Hausdorffův prostor. Každý (oddělitelný) uniformní prostor je ekvimorfní (prosté a vzájemně stejnoměrně spojité zobrazení) nějaké podmnožině prostoru $C(S)$, kde S je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor.*

Důkaz. Nechť nejprve X je metrický prostor. Zvolme libovolně $y_0 \in X$. Každému prvku $y \in X$ přiřadíme funkci f_y na X:

$$f_y(x) = \varrho(x, y) - \varrho(x, y_0).$$

Platí zřejmě $|f_y(x)| \leqq \varrho(y, y_0)$. Tedy $f_y \in \mathrm{m}(X)$, to jest prostoru všech ohraničených funkcí na X. Dokážeme, že

$$\varrho(y, z) = \max_{x \in X} |f_y(x) - f_z(x)|.$$

Jednak máme

$$\max |f_y - f_z| = \max |\varrho(x, y) - \varrho(x, z)| \leqq \varrho(y, z).$$

Dále

$$\max_{x \in X} |f_y(x) - f_z(x)| \leqq |f_y(y) - f_z(y)| = \varrho(y, z).$$

$m(X)$ je normovaný prostor a můžeme jej tedy podle věty 1. vnořit do $C(S)$ s kompaktním S. Hausdorffův uniformní prostor můžeme vnořit do kartézského součinu metrických prostorů ([2], Ch. 6. THM. 15). Dále je postup stejný jako u předcházejícího důkazu věty 1.

3. KRITÉRIUM KOMPAKTNOSTI

Věta 3. *Nechť K je podmnožina lokálně konvexního prostoru X taková, že pro libovolnou k nule slabě konvergující posloupnost $\{f_\alpha\}$ lineárních funkcionálů na X je limitní relace*

$$f_\alpha(x) \to 0$$

splněna stejnoměrně na K. Pak je K relativně kompaktní.

Důkaz. Nechť nejprve je X normovaný. Množina K je ohraničená. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by posloupnost (v obyčejném smyslu) $x_n \in K$ tak, že $\|x_n\| \geqq n$. Pak by ale existovaly funkcionály g_n, $\|g_n\| = 1$ a $g_n(x_n) = \|x_n\|$. Posloupnost

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{(\|x_n\|)}}\, g_n$$

slabě konverguje k nule, ale

$$f_n(x_n) = \|x_n\|^{-\frac{1}{2}} \cdot \|x_n\| = \|x_n\|^{\frac{1}{2}} \geqq \sqrt{(n)} \to \infty$$

a tedy nekonverguje stejnoměrně na K. Podle věty 1. je X isomorfní nějaké podmnožině prostoru $C(\Omega)$, kde Ω je silně uzavřená jednotková koule prostoru X^*. Při přiřazení odpovídá množině K nějaká ohraničená podmnožina $\tilde{K} \subseteq C(\Omega)$. Dokážeme, že $\tilde{K}$ je stejně spojitá. Nechť $f_\alpha \to f$, tj. $f_\alpha - f \to 0$, slabě $(f_\alpha, f \in K)$ a nechť $u \in \tilde{K}$ odpovídá x. Pak

$$u(f_\alpha - f) = u(f_\alpha) - u(f) = f_\alpha(x) - f(x) = (f_\alpha - f)(x) \to 0$$

stejnoměrně na K podle předpokladu. Podle Arzelà-Ascoliho věty je $\tilde{K}$ relativně kompaktní a tedy i K. Je-li X lokálně konvexní, vnoříme ho do kartézského součinu normovaných prostorů X_ι. Označme projekce na součinitele takto: $\mathrm{pr}_\iota K = K_\iota$. Dále definujme

$$f_\alpha^{(\iota)}(x) = f_\alpha(\{x_\gamma\}),$$

kde $x_\gamma = 0$ pro $\gamma \neq \iota$ a $x_\gamma = x$ pro $\gamma = \iota$. To jsou lineární spojité funkcionály na X, slabě konvergující k nule a to na K_ι stejnoměrně. Proto jsou K_ι relativně kompaktní a podle věty Tichonovovy je relativně kompaktní i jejich kartézský součin. Protože K je podmnožina tohoto součinu, je i ona relativně kompaktní.

Poznámka. Důkaz pro lokálně konvexní prostor lze vést i přímo bez užití vnoření, aplikujeme-li Arzelà-Ascoliho větu pro $C(S)$ s S lokálně kompaktním.

Z věty Banach-Steinhausovy ([3], Ch. III. § 3) plyne okamžitě toto částečné obrácení:

Je-li X t-prostor (espace tonnelé) a K prèkompaktní podmnožina X, pak libovolná posloupnost $(f_n)_{n \in N}$ (N je množina přirozených čísel) slabě konvergující k nule na X, konverguje na K stejnomerně.

Literatura

[1] *I. M. Gelfand:* Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren. Matěm. Sb. 1938, *4*, 235—286.
[2] *J. L. Kelley:* General Topology, Van Nostrand 1955.
[3] *N. Bourbaki:* Espaces vectoriels tologiques, Hermann 1955.

Резюме

О КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛИХ ПРОСТРАНСТВАХ

ИРЖИ ФИАЛА (Jiří Fiala), Прага

В этой работе доказываются следующие теоремы:

1. Всякое локально выпуклое пространство можно вложить в пространство $C(S)$, где S – локально компактное пространство Хаусдорффа.

2. Всякое метрическое пространство изометрично некоторому подмножеству пространства $C(S)$, где S – компактное пространство Хаусдорффа. Всякое равномерное пространство эквиморфно некоторму подмножеству пространства $C(S)$, где S – локально компактное пространство Хаусдорффа.

3. Пусть K – подмножество локально выпуклого пространства X такое, что для всякой последовательности $\{f_\alpha\}$ линейных функционалов на X, слабо сходящейся к нулю, предельное соотношение

$$f_\alpha(x) \to 0$$

выполняется равномерно на K. Тогда K является относительно компактным.

Résumé

SUR LES ENSEMBLES COMPACTES DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

JIŘÍ FIALA, Praha

Dans cet article nous démontrons les théorèmes suivantes:

1. Chaque espace localement convexe X est isomorphe à un sous-espace d'espace $C(S)$, où S est un espace de Hausdorff localement compact.

2. Tout espace métrique est isomorphe à un sous-ensemble d'espace $C(S)$, où S est un espace de Hausdorff compact. Chaque espace à structure uniforme (séparé) est équimorphe à un sous-ensemble d'espace $C(S)$, où S est un espace de Hausdorff localement compact.

3. Soit K est un sous-ensemble d'un espace X localement convexe, tel que pour chaque suite $\{f_\alpha\}$ des fonctionelles linéaires sur X, qui tend vers zéro, la relation suivante

$$f_\alpha(x) \to 0\,, \quad x \in K$$

est satisfaite uniformément. Alors, K est relativement compact.