Gustav Gruss

Odvození pozoruhodných rovnic pro komponenty rychlosti ve drahách planet a komet

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 3, 195--198

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108864`

$$a = \frac{f(1)}{f(1) + f'(1)} .$$

Rovnici (15) hoví při libovolném stálém A, B každá funkce

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) = Ax^m . \lg Bx ;$$

jest tedy dle (18)

$$\int Ax^m \lg Bx \, dx = \frac{A}{m+1} x^{m+1} \left[\lg Bx - \frac{1}{m+1} \right] + C .$$

Odvození pozoruhodných rovnic pro komponenty rychlosti ve drahách planet a komet.

Napsal

Dr. **Gustav Gruss** v Praze.

Eulerova věta pro parabolu

$$(r' + r + \varkappa)^{\frac{3}{2}} - (r' + r - \varkappa)^{\frac{3}{2}} = 6k(t' - t)$$

a tím více všeobecnější věta *Lambertova* pro kuželosečky

$$\mu'(r' + r + \varkappa)^{\frac{3}{2}} - \mu(r' + r - \varkappa)^{\frac{3}{2}} = 6k(t' - t) ;$$

$$\mu = \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\sin^3 \frac{1}{2} \varepsilon} , \quad \mu' = \frac{\varepsilon' - \sin \varepsilon'}{\sin^3 \frac{1}{2} \varepsilon'} ;$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{r' + r + \varkappa}{4a} , \quad \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon' = \frac{r' + r - \varkappa}{4a}$$

(r, r' jsou radie vektory pro doby t a t', $\varkappa$ tetiva spojující průvodiče r a r', a velká poloosa kuželosečky, k Gaussova konstanta attrakční) platila tak dlouho za *curiosum*, pokud výzkumy *Hamilton-Jacobi-ho* neobjevily klíče pro pozoruhodné věty a nové překvapující rovnice pro komponenty rychlosti ve drahách kuželosečkových.

V následujících řádcích pokusil jsem se o odvození pozoruhodných rovnic pro komponenty rychlosti, opíraje se o větu: „Za dobu $t - t'$, za kterou by těleso dospělo v kuželosečce poloosy a z místa určeného průvodičem r' (pro dobu t') do místa určeného průvodičem r (pro dobu t), stihla by planeta téže poloosy a, kdyby se pohybovala v přímé čáře ke slunci, ze vzdálenosti $\frac{r + r' + \varkappa}{2}$ do vzdálenosti $\frac{r + r' - \varkappa}{2}$."

Rychlost g pohybu tělesa ve dráze *kuželosečky* pro dobu t rovná se hodnotě

$$k\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}\,.$$

Záporná hodnota rychlosti planety ve dráze *přímočaré ke* slunci, t. j. rychlost ve směru *od* slunce — $\frac{dx}{dt}$ — pro dobu t rovná se $k\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{a}}$; vzdálenost x planety bude dle uvedené věty pro dobu t rovnou $\frac{r + r' - \varkappa}{2}$, *jestli* vzdálenost pro dobu t' se rovnala veličině $\frac{r + r' + \varkappa}{2}$.

Položíme-li nyní průvodič r do směru osy X, obdržíme pro kuželosečku *složku rychlosti* souřadnice x pro dobu t: $\frac{dx}{dt}$.

Pro dráhu *přímočarou* bude rychlost čítaná ve směru od slunce pro čas t zase hodnota $\frac{dx}{dt}$, jež se najde nyní ze vzorce

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\int_{t}^{t'} k\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{a}}\,.\,\frac{dx}{dt}\,.\,dt}{dx_s}\,.$$

Aby byl vyznačen rozdíl v x pro souřadnici a ve veličině x pod znamením integrálním, jest při souřadnici připsán index s.

Rovnici poslední lze psáti ve tvaru

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dx_s}\int\limits_{\frac{r+r'-\varkappa}{2}}^{\frac{r+r'+\varkappa}{2}} k\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{a}}\,.\,dx\,.$$

Jest však známo, že

$$\frac{d\int\limits_a^b f(x)dx}{dm}=f(b)\frac{\partial b}{\partial m}-f(a)\frac{\partial a}{\partial m}\,.$$

Bude proto (r' se nemění, jest dáno)

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}=k\sqrt{\frac{4}{r+r'+\varkappa}-\frac{1}{a}}\,.\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right)$$
$$-k\sqrt{\frac{4}{r+r'-\varkappa}-\frac{1}{a}}\,.\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right).$$

Obdobně bude rychlost souřadnice y

$$(2)\qquad \frac{dy}{dt}=k\sqrt{\frac{4}{r+r'+\varkappa}-\frac{1}{a}}\,.\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial \varkappa}{\partial y}\right)$$
$$-k\sqrt{\frac{4}{r+r'-\varkappa}-\frac{1}{a}}\,.\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial \varkappa}{\partial y}\right).$$

(Souřadnicové osy pravoúhlé X a Y jsou proloženy sluncem, ohniskem kuželosečky).

Pro r a $\varkappa$ máme rovnice:

$$r^2=x^2+y^2$$
$$\varkappa^2=(x-x')^2+(y-y')^2$$

a tedy

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r};\qquad \frac{\partial \varkappa}{\partial x}=\frac{x-x'}{k},\qquad \frac{\partial \varkappa}{\partial y}=\frac{y-y'}{k}\,.$$

Dosadíme-li hodnoty poslední do vzorců (1) a (2), obdržíme následující zajímavé vzorce Hamiltonovy pro komponenty rychlosti:

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= k\sqrt{\frac{1}{r+r'+\varkappa}-\frac{1}{4a}}\left(\frac{x}{r}+\frac{x-x'}{\varkappa}\right) \\
&\quad - k\sqrt{\frac{1}{r+r'-\varkappa}-\frac{1}{4a}}\left(\frac{x}{r}-\frac{x-x'}{\varkappa}\right), \\
\frac{dy}{dt} &= k\sqrt{\frac{1}{r+r'+\varkappa}-\frac{1}{4a}}\left(\frac{y}{r}+\frac{y-y'}{\varkappa}\right) \\
&\quad - k\sqrt{\frac{1}{r+r'-\varkappa}-\frac{1}{4a}}\left(\frac{y}{r}-\frac{y-y'}{\varkappa}\right)
\end{aligned}
$$

aneb

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{A}\frac{x}{r} + \mathrm{B}\frac{x-x'}{\varkappa},$$

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{A}\frac{y}{r} + \mathrm{B}\frac{y-y'}{\varkappa},$$

kdež

$$\mathrm{A} = k\left\{\sqrt{\frac{1}{r+r'+\varkappa}-\frac{1}{4a}} - \sqrt{\frac{1}{r+r'-\varkappa}-\frac{1}{4a}}\right\},$$

$$\mathrm{B} = k\left\{\sqrt{\frac{1}{r+r'+\varkappa}-\frac{1}{4a}} + \sqrt{\frac{1}{r+r'-\varkappa}-\frac{1}{4a}}\right\}.$$

Povýší-li se vzorce (I) na druhou mocninu, obdrží se snadno s ohledem na vztah

$$xx' + yy' = \frac{r^2+r'^2-\varkappa^2}{2},$$

rychlost g ve dráze

$$g = k\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}},$$

jak to býti má.