Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

O pružnosti atomů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 4-5, 215--221

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108893

O pružnosti atomů.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

1. Cílem těchto řádků jest odvoditi některé důsledky ze základního předpokladu kinetické theorie plynů, podle něhož molekuly jednoatomového plynu chovají se při vzájemných nárazech a při nárazech na stěny nádoby jako dokonale pružné koule.

Kinetická theorie učí, že atomy plynu pohybují se rovnoměrně a přímočaře a že jejich kinetická energie pochází jen z translačního pohybu; je-li plyn uzavřen v nádobě za určité neproměnné teploty, jest úhrnná energie všech atomů konstantní neměníc se ani vzájemnými nárazy atomů ani jejich nárazy na stěny nádoby. Skutečné rozdělení energie musí však býti poněkud jiné. Srazí-li se dva atomy, deformují se rázem a tato deformace má za následek elastické kmity v obou atomech. Je správné, že úhrnná mechanická energie dvou atomů před rázem rovná se jich úhrnné energii po rázu, ale nutno dodati, že energie po rázu skládá se ze dvou částí: z energie pohybu translačního a z energie pohybu kmitavého.

V odst. **6.** je vyložen důvod, proč právě při nárazech atomů nelze zanedbati energii kmitavého pohybu vzniklého rázem.

2. Dva druhy vln mohou se šířiti každým (homogenním a isotropickým) pružným prostředím: vlny podélné a vlny příčné. Je-li c_1 rychlost, kterou se šíří podélné vlny a c_2 rychlost vln příčných, platí vzorce

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}; \tag{1}$$

λ a μ jsou elastické konstanty prostředí a ϱ jeho specifická hmota [1]).

Pružná tělesa mohou kmitati rozmanitými spůsoby. Každý takový pohyb lze vyjádřiti superposicí t. zv. částečných kmitavých pohybů podobně jako u struny; kmitočty jednotlivých částečných pohybů nejsou však v tak jednoduchých poměrech

---

[1]) *Seydler-Koláček:* Základové theoretické fysiky. III. p. 276. *Love:* Lehrbuch der Elastizität (übers. v. Timpe) p. 339.

jako u struny. Nám běží o základní tón dokonale pružné koule t. j. o nejnižší možnou frekvenci elastických kmitů. Jaerisch a Lamb řešili známé differenciální rovnice pro nekonečně malé kmity pružné koule. Za předpokladu, že $\lambda = \mu$, a že tedy Poissonova konstanta σ má hodnotu

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{1}{4}, \tag{2}$$

jest frekvence n základního tónu, jenž vzniká při radiálních kmitech koule, dána výrazem

$$n = \frac{0{\cdot}8160 \,.\, c_1}{D}; \tag{3}$$

D značí průměr koule [2]. K výpočtu frekvence n je tedy třeba znáti jednak rychlost c_1, kterou se šíří podélné vlny atomem, jednak průměr D atomu.

3. Průměr D atomu počítá se, jak známo z kinetické theorie plynů [3], tímto postupem: Budiž a atomová váha plynu (jednoatomového). Jeden gramatom plynu má při určité absolutní teplotě T kinetickou energii $\frac{1}{2} a U^2$, kde U značí t. zv. střední kvadratickou rychlost a platí

$$\frac{a\,U^2}{2} = \frac{3}{2} R\,T, \quad R = 83{\cdot}2 \,.\, 10^6.$$

Z této rovnice lze vypočísti U pro každou teplotu. Známe-li U, vypočteme t. zv. střední rychlost G atomů podle vzorce

$$G = U\sqrt{\frac{8}{3\pi}}.$$

Střední volná dráha L atomu souvisí s G, s hustotou d plynu a s jeho koefficientem z vnitřního tření podle Maxwellovy rovnice:

$$3z = G \,.\, L \,.\, d;$$

L můžeme tedy považovati rovněž za známou veličinu. Známe-li konečně také Avogadrovo číslo N (počet atomů v jednom gramatomu), určíme hledaný průměr D atomu podle formule Clausius — Maxwellovy

$$\pi\, N\, D^2\, L\sqrt{2} = v;$$

v značí objem gramatomu při dané teplotě T.

---

[2] *Love* l. c. p. 329.

[3] Pěkný přehled podává *J. Perrin* v knize Les atomes (Chap. II.)

J. Perrin udává (na základě hodnoty $N = 6{\cdot}82.10^{23}$) pro helium, argon a rtuť tyto průměry atomů (v centimetrech) [4])

He . . $1{\cdot}7.10^{-8}$; A . . $2{\cdot}8.10^{-8}$; Hg . . $2{\cdot}9.10^{-8}$.

4. Jak určíme rychlost c_1 elastických podélných vln uvnitř atomu? Domnívám se, že některé výsledky geofysiky dovolují nám onu vychlost odhadnouti.

E. Wiechert vyslovil na základě rozmanitých pozorování názor, že vnitřek Země jest utvořen kovovým, bezpochyby železným, jádrem o průměrné specifické hmotě 7·8 a o průměru asi 10.000 *km*; jádro samo jest obklopeno kamenným obalem o tloušťce 1500 *km*. Tento názor byl později potvrzen pozorováním seismických vln. Při zemětřesení vzniknou vždy elastické vlny, jež se šíří dovnitř Země a vystupují pak na její povrch v různých vzdálenostech od ohniska (t. j. od místa, kde zemětřesení původně nastalo), ohnisko bývá blízko povrchu zemského.

Jak probíhá křivočarý paprsek (orthogonální trajektorie elastické vlny) uvnitř Země, poznáme touto úvahou: Předpokládáme, že rychlost, kterou se vlna v nějakém místě M uvnitř Země šíří, závisí toliko na vzdálenosti místa M od středu O Země. Poněvadž vrstvy bližší středu podléhají velikým tlakům způsobeným vahou zevnějších vrstev, roste ona rychlost, zmenšuje-li se OM. Paprsek, jež v ohnisku zemětřesení protíná povrch Země pod určitým úhlem, postupuje tedy do vrstev, kde je rychlost stále větší, pročež se láme od kolmice tak dlouho, až nabude v nějakém bodě H směru kolmého na poloměr zemský bodem H procházející. Tu nastane odraz a paprsek v dalším svém průběhu blíží se povrchu zemskému tak, že celá jeho dráha od ohniska až do místa, kde se vynoří na povrch Země, je dělena bodem H na dvě souměrné části. Známe-li doby, kterých paprsky potřebují, aby proběhly z ohniska vnitřkem Země do různě vzdálených pozorovacích stanic, můžeme z toho souditi na rychlost seismických vln v různých vzdálenostech od středu Země. Tak byla určena rychlost vln podélných i příčných. [5])

---

[4]) *J. Perrin*: Les atomes, p. 155.

[5]) O všech těchto věcech lze se nejlépe informovati z dvou článků, jež uveřejnili *Wiechert* a *Geiger* v Physikalische Zeitschrift (IX. 1908, p. 36; XI. 1910 p. 294).

Tyto dva Wiechertovy výsledky jsou důležity pro náš účel:

a) Největší hodnota rychlosti c_1 podélných vln uvnitř Země měří 12·8 *km/sec.*

b) Rychlost c_2 příčných vln jest k c_1 v poměru

$$c_2 : c_1 = 1 : \sqrt{3},$$

což poukazuje k tomu, že Poissonova konstanta σ rovná se $^1/_4$; viz rovnice (1) a (2).

Gutenberg [6]) jinými methodami došel k podobným výsledkům; udává největší hodnotu rychlosti pro podélné seismické vlny $c_1 = 13{\cdot}3$ *km/sec.*

Atomová theorie vysvětluje pružnost tuhých těles na základě tepelných atomových resp. molekulových pohybů. Wiechert odhaduje hydrostatický tlak v kovovém jádře Země na milliony atmosfér a praví: »Zdá se, že při vysokém tlaku v kovovém jádře pružnost způsobená tepelnými pohyby docela ustupuje té pružnosti, která jest atomům vlastní a která nezávisí na tepelných pohybech.« [7])

Tento Wiechertův názor vede k závěru: Uvnitř země jsou atomy ohromnými tlaky tak stlačeny, že se navzájem dotýkají; rychlost podélných elastických vln ($= 13$ *km/sec*) procházejících Zemí není nic jiného než hledaná rychlost elastických vln v atomech samých.

Je-li rychlost podélných vln v atomech všech prvků stejná, můžeme říci: Elastické podélné vlny šíří se atomem rychlostí $13 . 10^5$ *cm/sec.*

5. Nyní můžeme vypočítati nejnižší frekvenci atomu považovaného za pružnou kouli. Frekvence ta jest určena vzorcem (3), který pro $c_1 = 13 . 10^5$ přechází v

$$n = \frac{1{\cdot}6 \cdot 10^6}{D}; \qquad (3')$$

průměr D musí býti vyjádřen v cm.

Elektromagnetická vlna, vzbuzená oscilacemi elektromagnetickými o frekvenci n má ve vakuu délku (rychlost světla $= 3 . 10^{10}$ *cm/sec*)

$$\lambda = \frac{3 . 10^{10}}{n} = 2{\cdot}83 \cdot 10^4 \cdot D \; cm.$$

[6]) *Geiger*, Phys. Zeitschrift XIV. 1913, p. 1217.

[7]) *Wiechert*, Phys. Zeitschrift IX. 1908 p. 46.

Dosadíme-li pro helium $D = 1{\cdot}7 \,.\, 10^{-8}\, cm$, vychází

$$\lambda = 4{\cdot}8 \,.\, 10^{-4}\, cm.$$

Nejdelší vlna v emissním spektru helia (v infra červené části) jest [8])

$$\lambda_0 = 4.054 \,.\, 10^{-4}\, cm.$$

Pro helium platí tedy přibližně rovnice $\lambda_0 = \lambda$. Jinými slovy: Frekvence elektromagnetických oscilací příslušných nejdelší vlně ve spektru helia rovná se základní (nejnižší) frekvenci elastických kmitů, kterých je schopen atom helia jakožto pružná koule ($\doteq 10^{14}$).

Nechť je příčina elektromagnetických vln, jež tvoří emissní spektrum helia, jakákoli, je na snadě myšlenka: elektromagnetické kmity příslušné nejdelší vlně ve spektru helia počínají se jeviti tentokrát, když se jejich frekvence shoduje s frekvencí atomu kmitajícího účinkem sil pružnosti; základní kmitavý pohyb atomu jest totiž obsažen jakožto složka v elastických kmitech, které vznikají vzájemnými nárazy atomů.

U jiných jednoatomových plynů nejeví se takový souhlas mezi čísly λ_0 a λ. Pro argon ($D = 2{\cdot}8 \,.\, 10^{-8} cm$) vychází λ (délka elektromagnetické vlny ve vakuu, jejíž frekvence rovná se frekvenci základního elastického kmitavého pohybu) rovno $7{\cdot}9 \,.\, 10^{-4}\, cm$, kdežto nejdelší vlna v infračervené části spektra má délku $\lambda_0 = 1{\cdot}37 \,.\, 10^{-4}\, cm$ [9]). Pro rtuť ($D = 2{\cdot}9 \,.\, 10^{-8}\, cm$) vychází $\lambda = 8{\cdot}2 \,.\, 10^{-4} cm$, kdežto nejdelší vlna ve spektru rtuťové lampy má délku $\lambda_0 = 3{\cdot}13 \,.\, 10^{-2}\, cm$ [10]).

Poznamenávám, že hodnoty průměru D udané různými badateli a rozličnými methodami značně se liší; viz tabulky: Landolt-Börnstein: Physikalisch-chemische Tabellen, 4. Aufl. 1912, a Recueuil de Constantes physiques publié par H. Abraham et P. Sacerdote, 1913. Průměr atomu rtuťového není udán ani v jedné z těchto dvou publikací.

6. Konečně zmiňuji se o jedné zvláštní okolnosti, která nasvědčuje tomu, že známá theorie o rázu pružných koulí nedá

[8]) *F. Paschen*, Annalen der Physik (4), 33., p. 733; 1910.

[9]) *F. Paschen*, Annalen der Physik. (4), 27, 1908, p. 537.

[10]) *Rubens-Bayer*: Berliner Berichte 1911 p. 339.

se applikovati na ten případ, že koule mají takové rozměry a takové translační rychlosti jako atomy plynu. H. Hertz odvodil vzorce, které vyjádřují změnu tvaru dvou pružných koulí způsobenou rázem [11]; jeho úvahy opírají se o předpoklad, že doba, po kterou je jedna koule ke druhé přitlačena, je poměrně dlouhá proti době, které potřebují elastické podélné vlny, aby proběhly průměrem koule. Stlačování obou koulí probíhá tak pomalu, že lze je sledovati jakožto povlovný přechod z jednoho tvaru do druhého, při čemž není třeba přihlížeti k elastickým kmitům. Poměr oněch dvou dob je přibližně roven výrazu

$$\left(\frac{c_1}{v}\right)^5,$$

kde v značí relativní rychlost obou koulí před rázem [12].

Atomy plynu mají za vysokých teplot střední rychlost aspoň 1 *km/sec*, takže relativní rychlost snadno dostoupí hodnoty $v = 2\,.\,10^5\,cm/sec$. Poněvadž $c_1 = 13\,.\,10^5\,cm/sec$, jest

$$\left(\frac{c_1}{v}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{6\cdot5} = 1\cdot45\ldots$$

Hertzův předpoklad tedy není splněn a jeho theorie rázu, jež přihlíží vlastně jen ke statickým deformacím, nemůže zde beze změny platiti; nelze zanedbati elastické kmity vznikající nárazem dvou atomů.

Sur l' élasticité des atomes.

Par B. Hostinský.

(Résumé de l' article précédent).

Supposons que les atomes d' un gaz monoatomique soient des sphères parfaitement élastiques. Quand un atome se heurte contre un autre, des vibrations élastiques compliquées se produisent dans les deux atomes. Tout mouvement vibratoire de cette espèce peut être décomposé en certaines vibrations simples;

---

[11]) *H. Hertz*: Journal für die reine u. angev. Math. *92*, 1881 = Ges. Werke I. p. 170.

[12]) *Love* l. c. p. 236.

parmi ces mouvements simples, il y en a un qui possède la plus petite fréquence n (son fondamental de la sphère élastique). Cherchons à déterminer cette fréquence fondamentale n pour l' atome d' hélium. Pour cela, il faut en premier lieu savoir quelque chose sur l' élasticité des atomes.

Les propriétés élastiques de la matière contenue à l' intérieur de la Terre peuvent être déduites des observations sismiques. Ces propriétés nous donnent quelques renseignements sur l' élasticité des atomes. Car il y a, à l' intérieur de la Terre, des pressions hydrostatiques énormes qui font disparaître les agitations moléculaires thermiques; par conséquent, il ne reste que l' élasticité propre des atomes qui ne dépend pas de cette agitation (Wiechert). La vitesse c_1 des ondes élastiques longitudinales à l' intérieur de la Terre est égale à 13 *km/sec*; la vitesse des ondes transversales est à la précédente comme 1 à $\sqrt{3}$, ce qui montre que le rapport de la contraction à l' allongement est égal à 1/4.

Admettons donc 1. que l' atome d' hélium soit une sphère parfaitement élastique, le rapport de la contraction à l' allongement étant égal à 1/4; 2. que les ondes élastiques longitudinales se propagent avec la même vitesse c_1 soit à l' intérieur de l' atome d' hélium, soit à l' intérieur de la Terre.

La fréquence n du son fondamental d' une sphère élastique, D étant le diamètre, se calcule au moyen de la formule (3) de Lamb. La longueur de l' onde éléctromagnétique (dans le vide) émise par un oscillateur de la même fréquence n est égale à $\lambda = 3 \,.\, 10^{10} \,.\, n^{-1}$. Faisons le calcul en posant $c_1 = 13 \,.\, 10^5 cm/sec$ et $D = 1{\cdot}7 \,.\, 10^{-8}\ cm$ (diamètre de l' atome d' hélium, suivant Perrin). Il vient $\lambda = 4{\cdot}8 \,.\, 10^{-4}\ cm$.

D' autre part, la plus longue onde dans la partie infra rouge du spectre d' hélium est égale à $\lambda_0 = 4{\cdot}054 \,.\, 10^{-4}\ cm$ (Paschen), ce qui est trés voisin de λ. Donc: **La fréquence des oscillations éléctromagnétiques ($n \doteq 10^{14}$) qui engendrent la plus longue onde dans le spectre d' hélium est égale à la fréquence de la vibration élastique fondamentale de l' atome d' hélium.**