B. Kladivo

K výpočtu střední chyby pro jedničku váhy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 1--9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108921

K výpočtu střední chyby pro jedničku váhy.

B. Kladivo, Brno, Česká technika.

Uvažujme odchylkové rovnice

$$v_i = a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + \ldots + a_{ni} x_n + b_{1i} y_1 + b_{2i} y_2 + \ldots + b_{mi} y_m + l_i, \quad (1)$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ jsou neznámé, z nichž potřebujeme určiti jen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou na př. orientační konstanty při vyrovnání směrů měřených na stanici). Abychom určili střední chybu pro jedničku váhy, potřebujeme vypočísti minimum M součtu $S = [pv_i^2]$. Je otázka, jak vypočísti minimum M, aniž bychom počítali neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Normální rovnice příslušné odchylkovým rovnicím (1) jsou:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial y_l} = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, m,$$

čili

$$\begin{gathered}
[pa_1 a_1] x_1 + [pa_1 a_2] x_2 + \ldots + [pa_1 a_n] x_n \\
+ [pa_1 b_1] y_1 + [pa_1 b_2] y_2 + \ldots + [pa_1 b_m] y_m + [pa_1 l] = 0, \\
[pa_2 a_1] x_1 + [pa_2 a_2] x_2 + \ldots + [pa_2 a_n] x_n \\
+ [pa_2 b_1] y_1 + [pa_2 b_2] y_2 + \ldots + [pa_2 b_m] y_m + [pa_2 l] = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[pa_n a_1] x_1 + [pa_n a_2] x_2 + \ldots + [pa_n a_n] x_n \\
+ [pa_n b_1] y_1 + [pa_n b_2] y_2 + \ldots + [pa_n b_m] y_m + [pa_n l] = 0, \qquad (2) \\
[pb_1 a_1] x_1 + [pb_1 a_2] x_2 + \ldots + [pb_1 a_n] x_n \\
+ [pb_1 b_1] y_1 + [pb_1 b_2] y_2 + \ldots + [pb_1 b_m] y_m + [pb_1 l] = 0, \\
[pb_2 a_1] x_1 + [pb_2 a_2] x_2 + \ldots + [pb_2 a_n] x_n \\
+ [pb_2 b_1] y_1 + [pb_2 b_2] y_2 + \ldots + [pb_2 b_m] y_m + [pb_2 l] = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[pb_m a_1] x_1 + [pb_m a_2] x_2 + \ldots + [pb_m a_n] x_n \\
+ [pb_m b_1] y_1 + [pb_m b_2] y_2 + \ldots + [pb_m b_m] y_m + [pb_m l] = 0.
\end{gathered}$$

Eliminujeme neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a dojdeme k soustavě rovnic

$$\begin{gathered}
B_{11} y_1 + B_{12} y_2 + \ldots + B_{1m} y_m + L_1 = 0, \\
B_{21} y_1 + B_{22} y_2 + \ldots + B_{2m} y_m + L_2 = 0, \qquad (3) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{m1} y_1 + B_{m2} y_2 + \ldots + B_{mm} y_m + L_m = 0.
\end{gathered}$$

Z nich určíme $y_1, y_2, \ldots, y_m$ Gaussovým postupem. Píšeme-li

$$(B_{ki}\,.\,1) = B_{ki} - B_{1i}\,.\,\frac{B_{k1}}{B_{11}},$$

$$(L_k\,.\,1) = L_k - L_1\frac{B_{k1}}{B_{11}},$$

a podobně

$$\begin{aligned}(B_{ki}\,.\,2) &= (B_{ki}\,.\,1) - (B_{2i}\,.\,1)\frac{(B_{k2}\,.\,1)}{(B_{22}\,.\,1)},\\ (L_k\,.\,2) &= (L_k\,.\,1) - (L_2\,.\,1)\frac{(B_{k2}\,.\,1)}{(B_{22}\,.\,1)},\\ (B_{ki}\,.\,3) &= (B_{ki}\,.\,2) - (B_{3i}\,.\,2)\frac{(B_{k3}\,.\,2)}{(B_{33}\,.\,2)},\\ (L_k\,.\,3) &= (L_k\,.\,2) - (L_3\,.\,2)\frac{(B_{k3}\,.\,2)}{(B_{33}\,.\,2)},\end{aligned} \qquad (4)$$

a t. d.,

dojdeme postupným vyloučením neznámých $y_1, y_2, \ldots, y_m$ k těmto rovnicím pro výpočet neznámých $y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$\begin{aligned}B_{11}y_1 + B_{12}y_2 + B_{13}y_3 + \ldots + B_{1m}y_m + L_1 &= 0,\\ (B_{22}\,.\,1)\,y_2 + (B_{23}\,.\,1)\,y_3 + \ldots + (B_{2m}\,.\,1)\,y_m + (L_2\,.\,1) &= 0,\\ (B_{33}\,.\,2)\,y_3 + \ldots + (B_{3m}\,.\,2)\,y_m + (L_3\,.\,2) &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ (B_{mm}\,.\,\overline{m-1})\,y_m + (L_m\,.\,\overline{m-1}) &= 0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Hledané minimum M je rovno

$$[pll] + [pa_1l]\,x_1 + [pa_2l]\,x_2 + \ldots + [pa_nl]\,x_n + [pb_1l]\,y_1 + [pb_2l]\,y_2 + \ldots + [pb_ml]\,y_m, \qquad (6)$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ jsou hodnoty splňující rovnice (2). Označíme písmenem D determinant

$$\begin{vmatrix}[pa_1a_1], & [pa_1a_2], & \ldots, & [pa_1a_n]\\ [pa_2a_1], & [pa_2a_2], & \ldots, & [pa_2a_n]\\ \vdots & & & \\ [pa_na_1], & [pa_na_2], & \ldots, & [pa_na_n]\end{vmatrix}$$

Determinant, vzniklý z D tím, že jeho i-tý sloupec nahradíme

sloupcem $\begin{matrix}[pa_1b_k]\\ [pa_2b_k]\\ \vdots\\ [pa_nb_k]\end{matrix}$ resp. $\begin{matrix}[pa_1l]\\ [pa_2l]\\ \vdots\\ [pa_nl]\end{matrix}$, označíme D_{ki} resp. D_i. Pak

$$x_i = -\frac{1}{D}(y_1D_{1i} + y_2D_{2i} + \ldots + y_mD_{mi} + D_i).$$

Dosadíme-li tento výraz za x_i do vzorce (6), bude

$$M = [pll] - \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu l] \,.\, D_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu \left([pb_\mu l] - \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu l]\, D_{\mu\nu}\right). \quad (7$$

Dá se snadno ukázati, že koeficient $[pb_\mu l] - \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu l] \,.\, D_{\mu\nu}$ u y_μ ve vzorci (7) se rovná L_μ. Prostý člen v první z rovnic (3) bude

$$L_1 = [pb_1 l] - \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pb_1 a_\nu]\, D_\nu$$

a stejně

$$L_\mu = [pb_\mu l] - \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pb_\mu a_\nu]\, D_\nu .$$

Označíme-li subdeterminanty determinantu D značkou A_{rs}, (koeficient u $[pa_r a_s]$), můžeme psáti

$$\sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu l]\, D_{\mu\nu} =$$

$$\begin{aligned}
= [pa_1 l] \,.\, ([pa_1 b_\mu]\, A_{11} + [pa_2 b_\mu] \,.\, A_{21} + \ldots + [pa_n b_\mu]\, A_{n1}) \\
+ [pa_2 l] \,.\, ([pa_1 b_\mu]\, A_{12} + [pa_2 b_\mu] \,.\, A_{22} + \ldots + [pa_n b_\mu]\, A_{n2}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ [pa_n l] \,.\, ([pa_1 b_\mu]\, A_{1n} + [pa_2 b_\mu] \,.\, A_{2n} + \ldots + [pa_n b_\mu]\, A_{nn})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu b_\mu]\, D_\nu .$$

Tedy koeficient u y_μ ve vzorci (7) je

$$[pb_\mu l] - \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pb_\mu a_\nu]\, D_\nu = L_\mu ,$$

prostý člen v μ-té rovnici (3). Poslední člen ve vzorci pro M lze tedy psáti $\sum_{\mu=1}^{m} L_\mu y_\mu$.

Tento výraz můžeme vyjádřiti pomocí koeficientů a prostých členů rovnic (5). Předně ukážeme, že $B_{ik} = B_{ki}$. Koeficient B_{ik} (v i-tém řádku u neznámé y_k ve (3)) jest

$$[pb_i b_k] - \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pb_i a_\nu]\, D_{k\nu} .$$

Stejně

$$B_{ki} = [pb_k b_i] - \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pb_k a_\nu]\, D_{i\nu} .$$

Součet

$$\sum_{\nu=1}^{n} [pb_i a_\nu] D_{k\nu} =$$

$$= [pb_i a_1] ([pa_1 b_k] A_{11} + [pa_2 b_k] A_{21} + \ldots + [pa_n b_k] A_{n1})$$
$$+ [pb_i a_2] ([pa_1 b_k] A_{12} + [pa_2 b_k] A_{22} + \ldots + [pa_n b_k] A_{n2})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ [pb_i a_n] ([pa_1 b_k] A_{1n} + [pa_2 b_k] A_{2n} + \ldots + [pa_n b_k] A_{nn})$$
$$= [pa_1 b_k] D_{i1} + [pa_2 b_k] D_{i2} + \ldots + [pa_n b_k] D_{in} = \sum_{\nu=1}^{n} [pa_\nu b_k] D_{i\nu},$$

tedy
$$B_{ik} = B_{ki}.$$
Z rovnic (4) je zřejmo, že i $(B_{ki} . 1) = (B_{ik} . 1)$, $(B_{ki} . 2) = (B_{ik} . 2)$ atd.

Uvažujme výraz

$$V = -\sum_{\mu=1}^{m} B_{1\mu} y_1 y_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} B_{2\mu} y_2 y_\mu - \ldots - \sum_{\mu=1}^{m} B_{m\mu} . y_m y_\mu.$$

Zavedeme označení

$$\xi_1 = B_{11} y_1 + B_{12} y_2 + B_{13} y_3 + \ldots + B_{1m} y_m,$$
$$\xi_2 = (B_{22} . 1) y_2 + (B_{23} . 1) y_3 + \ldots + (B_{2m} . 1) y_m,$$
$$\xi_3 = \qquad (B_{33} . 2) y_3 + \ldots + (B_{3m} . 2) y_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_m = (B_{mm} . \overline{m-1}) y_m.$$

Pak

$$V + \frac{\xi_1^2}{B_{11}} =$$

$$= -\sum_{\mu=1}^{m} B_{1\mu} y_1 y_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} B_{2\mu} y_2 y_\mu - \ldots - \sum_{\mu=1}^{m} B_{m\mu} y_m y_\mu$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} B_{1\mu} y_1 y_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} B_{1\mu} . \frac{B_{12}}{B_{11}} y_2 y_\mu + \ldots + \sum_{\mu=1}^{m} B_{1\mu} . \frac{B_{1m}}{B_{11}} y_m y_\mu$$
$$= -\sum_{\mu=2}^{m} (B_{2\mu} . 1) y_2 y_\mu - \ldots - \sum_{\mu=2}^{m} (B_{m\mu} . 1) y_m y_\mu.$$

Podobně

$$V + \frac{\xi_1^2}{B_{11}} + \frac{\xi_2^2}{(B_{22} . 1)} = -\sum_{\mu=3}^{m} (B_{3\mu} . 2) y_3 y_\mu - \ldots - \sum_{\mu=3}^{m} (B_{m\mu} . 2) y_m y_\mu$$

atd. až

$$V + \frac{\xi_1^2}{B_{11}} + \frac{\xi_2^2}{(B_{22} . 1)} + \ldots + \frac{\xi_{m-1}^2}{(B_{m-1,\, m-1} . \overline{m-2})}$$
$$= -(B_{m,m} . \overline{m-1}) y_m^2.$$

Odtud plyne: Výraz V je identicky roven výrazu

$$-\frac{\xi_1^2}{B_{11}}-\frac{\xi_2^2}{(B_{22}.1)}-\ldots-\frac{\xi_m^2}{(B_{m,m}.\overline{m-1})}.$$

Splňují-li $y_1, y_2, \ldots, y_m$ rovnice (5), je $\xi_1=-L_1$, $\xi_2=-(L_2.1)$, atd. a $V=\sum_{\mu=1}^{m} y_\mu L_\mu$; splňují-li $y_1, y_2, \ldots, y_m$ rovnice (5), jest

$$\sum_{\mu=1}^{m} L_\mu y_\mu = -\frac{L_1^2}{B_{11}}-\frac{(L_2.1)^2}{(B_{22}.1)}-\ldots-\frac{(L_m.\overline{m-1})^2}{(B_{m,m}.\overline{m-1})}.$$

Výraz $[pll]-\frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu l]D_\nu$ (ze vzorce (7) pro M) se rovná součtu $[pv_i^2]$, dosadíme-li v něm $x_i=-\frac{D_i}{D}$, $y_i=0$. Součet

$$\left[p_i\left(l_i-\left(a_{1i}\frac{D_1}{D}+a_{2i}\frac{D_2}{D}+\ldots+a_{ni}\frac{D_n}{D}\right)\right)^2\right]$$

$$=[pll]-\frac{2}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu l]D_\nu+\left[p_i\left(a_{1i}\frac{D_1}{D}+a_{2i}\frac{D_2}{D}+\ldots+a_{ni}\frac{D_n}{D}\right)^2\right].$$

$$\left[p_i\left(a_{1i}\frac{D_1}{D}+a_{2i}\frac{D_2}{D}+\ldots+a_{ni}\frac{D_n}{D}\right)^2\right]=$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{D_1}{D^2}([pa_1a_1]D_1+[pa_2a_1]D_2+\ldots+[pa_na_1]D_n)\\
&+\frac{D_2}{D^2}([pa_1a_2]D_1+[pa_2a_2]D_2+\ldots+[pa_na_2]D_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{D_n}{D^2}([pa_1a_n]D_1+[pa_2a_n]D_2+\ldots+[pa_na_n]D_n).
\end{aligned}$$

Výraz

$$\begin{aligned}
&[pa_1a_i]D_1+[pa_2a_i]D_2+\ldots+[pa_na_i]D_n\\
=&[pa_1a_i]([pa_1l]A_{11}+[pa_2l]A_{21}+\ldots+[pa_nl]A_{n1})\\
+&[pa_2a_i]([pa_1l]A_{12}+[pa_2l]A_{22}+\ldots+[pa_nl]A_{n2})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&[pa_na_i]([pa_1l]A_{1n}+[pa_2l]A_{2n}+\ldots+[pa_nl]A_{nn})=[pa_il].D.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\left[p_i\left(a_{1i}\frac{D_1}{D}+a_{2i}\frac{D_2}{D}+\ldots+a_{ni}\frac{D_n}{D}\right)^2\right]=\frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu l]D_\nu$$

a

$$\left[p_i\left(l_i-\left(a_{1i}\frac{D_1}{D}+a_{2i}\frac{D_2}{D}+\ldots+a_{ni}\frac{D_n}{D}\right)\right)^2\right]$$

$$=[pll]-\frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu l].D_\nu, \quad \text{č. b. d.}$$

Máme tedy výsledek: Hledané minimum M výrazu $[pv_i^2]$, (součet čtverců zbývajících odchylek) lze psáti ve tvaru $M=I+II$, při čemž

$$I=[pll]-\frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{n}[pa_\nu l]\,D_\nu, \tag{8}$$

nebo

$$I=[pv_i^2],\ \text{dosadíme-li}\ x_i=-\frac{D_i}{D},\ y_i=0, \tag{9}$$

$$II=\sum_{\mu=1}^{m}L_\mu\,y_\mu, \tag{10}$$

nebo

$$II=-\frac{L_1^2}{B_{11}}-\frac{(L_2\,.\,1)^2}{(B_{22}\,.\,1)}-\ldots-\frac{(L_m\,.\,\overline{m-1})^2}{(B_{m,m}\,.\,\overline{m-1})}. \tag{11}$$

Užití. *a*) Jde o určení vyrovnaných souřadnic bodu z měřených směrů vnějších a vnitřních. Odchylkové rovnice jsou

$$v_i=a_i\,\delta x+b_i\,\delta y+l_i,\quad i=1,2,\ldots,n,$$
$$v_l'=z+a_l'\,\delta x+b_l'\,\delta y+l_l',\quad l=1,2,\ldots,m;$$

δx, δy jsou hledané opravy souřadnic, z orientační konstanta, kterou znáti nepotřebujeme, a, b směrové koeficienty. Normální rovnice jsou

$$[p]'z+[pa]'\,\delta x+[pb]'\,\delta y+[pl]'=0,$$
$$[pa]'z+[paa]\,\delta x+[pab]\,\delta y+[pal]=0,$$
$$[pb]'z+[pab]\,\delta x+[pbb]\,\delta y+[pbl]=0;$$

při tom značí závorka $[\,]'$ součet vztažený jen na směry vnitřní. Rovnice (3) budou zde

$$a_1\,\delta x+b_1\,\delta y+\omega_1=0,\qquad b_1\,\delta x+b_2\,\delta y+\omega_2=0, \tag{3'}$$

kde

$$a_1=[paa]-\frac{[pa]'^2}{[p]'},\quad b_1=[pab]-\frac{[pa]'\,.\,[pb]'}{[p]'},\quad b_2=[pbb]-\frac{[pb]'^2}{[p]'},$$
$$\omega_1=[pal]-\frac{[pl]'\,.\,[pa]'}{[p]'},\quad \omega_2=[pbl]-\frac{[pl]'\,.\,[pb]'}{[p]'}.$$

K těmže normálním rovnicím se dojde z odchylkových rovnic

$$v_i=a_i\,\delta x+b_i\,\delta y+l_i,\quad i=1,2,\ldots,n,$$
$$\overline{v_l}=\left\{a_l'-\frac{[pa]'}{[p]'}\right\}\delta x+\left\{b_l'-\frac{[pb]'}{[p]'}\right\}\delta y+\left\{l_l'-\frac{[pl]'}{[p]'}\right\},\ l=1,2,\ldots,m.$$

Podmínky, aby $\sum_i p_i v_i^2+\sum_l p_l\overline{v_l}^2$ bylo minimální, jsou právě rovnice (3'). Minimum M součtu $\sum_i p_i v_i^2+\sum_l p_l v_l'^2$ jest rovno

$$\sum_i p_i (a_i\,\delta x + b_i\,\delta y + l_i)^2 +$$
$$+\sum_l p_l \left\{\left(a_l' - \frac{[pa]'}{[p]'}\right)\delta x + \left(b_l' - \frac{[pb]'}{[p]'}\right)\delta y + \left(l_l' - \frac{[pl]'}{[p]'}\right)\right\}^2 =$$
$$= \sum_i p_i (a_i\,\delta x + b_i\,\delta y + l_i)^2 +$$
$$+\sum_l p_l \left\{a_l'\,\delta x + b_l'\,\delta y - \frac{[p\,(a_l'\,\delta x + b_l'\,\delta y)]'}{[p]'} + \left(l_l' - \frac{[pl]'}{[p]'}\right)\right\}^2. \quad (7')$$

Podle vzorců (8) až (11) lze hledaný součet čtverců zbývajících odchylek psáti $M = I + II$, při čemž

$$I = [pll] - \frac{[pl]'^2}{[p]'}, \quad (8')$$

nebo

$$I = \sum_i p_i l_i^2 + \sum_l p_l \left(l_l' - \frac{[pl]'}{[p]'}\right)^2 \quad (9')$$

a

$$II = \omega_1\,\delta x + \omega_2\,\delta y, \quad (10')$$

δx, δy splňují rovnice (3'), nebo

$$II = -\frac{\omega_1^2}{a_1} - \frac{(\omega_2\,.\,1)^2}{(b_2\,.\,1)}, \quad (11')$$

$$(\omega_2\,.\,1) = \omega_2 - \omega_1 \frac{b_1}{a_1}, \qquad (b_2\,.\,1) = b_2 - \frac{b_1^2}{a_1}.$$

Instrukce pro trigonometrická a polygonometrická vyměřování[1]) užívá vzorců (7') a

$$M = \sum_i p_i l_i^2 + \sum_l p_l \left(l_l' - \frac{[pl]'}{[p]'}\right)^2 + \omega_1\,\delta x + \omega_2\,\delta y.$$

b) Při vyrovnání směrů měřených na stanici v řadách a skupinách, jsou odchylkové rovnice

$$\sqrt{p_{1i}}\,v_{1i} = \sqrt{p_{1i}}\,x_i, \quad \sqrt{p_{2i}}\,v_{2i} = \sqrt{p_{2i}}\,(x_i + (2) - b_{2i}), \ldots$$
$$\sqrt{p_{si}}\,v_{si} = \sqrt{p_{si}}\,(x_i + (s) - b_{si}), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

čísla p jsou rovna 1 nebo 0 podle toho, byl-li nebo nebyl-li příslušný směr zaměřen, x_i jsou orientační konstanty jednotlivých skupin, $u_k + (k)$ jest vyrovnaná hodnota úhlu mezi prvním a k-tým směrem, $u_k + b_{ki}$ jest hodnota naměřená při zaměření na k-tý bod v i-té skupině. — Normální rovnice budou

$$p_i x_i + p_{2i}\,(2) + p_{3i}\,(3) + \ldots + p_{si}\,(s) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

[1]) Instruction zur Ausführung der trigonometrischen und polygonometrischen Vermessungen, 5. Aufl., Wien 1904, str. 106—120.

$$\sum_i p_{ki} x_i + (k) \sum_i p_{ki} = \sum_i p_{ki} b_{ki}, \quad k = 2, 3, \ldots, s;$$

p_i značí počet předmětů zaměřených v i-té skupině, b_i součet odchylek b_{ki} v i-té skupině. — Vypočteme-li z prvních n rovnic veličiny x_i a dosadíme do dalších $s-1$ rovnic, dojdeme k rovnicím (3) pro neznámé (2), . . ., (s). V praksi se tyto rovnice (3) sestavují přímo. — Součet čtverců zbývajících odchylek je zase $M = I + II$, kde

$$I = \sum_{i=1}^{n} (p_{2i} b_{2i}^2 + \ldots + p_{si} b_{si}^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{p_i}.$$

Uvážíme-li význam veličin p_{ki}, vidíme, že

$$\sum_{i=1}^{n} (p_{2i} b_{2i}^2 + \ldots + p_{si} b_{si}^2)$$

se rovná součtu (σ) čtverců všech odchylek b_{ki}, tedy

$$I = \sigma - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{p_i}. \tag{8''}$$

Podle vzorce (9) dá se psáti I ve tvaru

$$\sum_i \left\{ p_{si} \left(\frac{b_i}{p_i}\right)^2 + p_{2i} \left(\frac{b_i}{p_i} - b_{2i}\right)^2 + \ldots + p_{si} \left(\frac{b_i}{p_i} - b_{si}\right)^2 \right\};$$

$\frac{b_i}{p_i}$ je aritmetický střed odchylek b_{ki} v jednotlivých skupinách. Označíme-li rozdíly $\frac{b_i}{p_i} - b_{ki}$ písmenem r_{ki}, (rozdíly odchylek naměřených v jednotlivých skupinách proti aritmetickému středu odchylek v uvažované skupině), bude,

$$I = \sum_{i,k} r_{ki}^2, \tag{9''}$$

součtu čtverců všech rozdílů r_{ki}.

Podle vzorců (10) a (11) jest konečně

$$II = L_1(2) + L_2(3) + \ldots + L_{s-1}(s), \tag{10''}$$

$$II = \frac{L_1^2}{B_{11}} - \frac{(L_2 . 1)^2}{(B_{22} . 1)} - \ldots - \frac{(L_{s-1} . \overline{s-2})^2}{(B_{s-1,s-1} . \overline{s-2})}. \tag{11''}$$

A. Ferrero[1]) doporučuje na př. počítati I podle vzorce (9'') a II podle vzorce (11'').

*

[1]) Annibale Ferrero: Esposizione del metodo dei minimi quadrati, Firenze 1876, str. 157—9.

Calcul de l'erreur moyenne de l'unité de poids.

(Extrait de l'article précédent).

L'auteur établit des formules pour le calcul de l'erreur moyenne de l'unité de poids, à savoir, pour la somme de carrés M des écarts résiduels, les équations de condition ayant la forme

$$v_i = a_{1i}\, x_1 + a_{2i}\, x_2 + \dots + a_{ni}\, x_n + b_{1i}\, y_1 + b_{2i}\, y_2 + \dots + b_{mi}\, y_m + l_i, \quad (1)$$

où ne sont à determiner que les inconnues $y_1, \dots, y_m$.

Considérons le déterminant $D = |[pa_i a_k]|$, $i, k = 1, \dots, n$, et désignons, respectivement, par D_{ik}, D_i les déterminants que l'on obtient en remplaçant la colonne i-ième de D, respectivement, par les colonnes $[pa_i b_k]$, $[pa_i l]$, $i = 1, \dots, n$. Les termes absolus des équations (3) obtenues en éliminant $x_1, \dots, x_n$ des équations normales (2), étant L_i, et $(L_2 . 1)$, $(L_3 . 2)$, $\dots$, $(L_m . \overline{m-1})$, $(B_{22} . 1)$, $(B_{33} . 2)$, $\dots$, $(B_{mm} . \overline{m-1})$ étant les coefficients usuels de l'algorithme de Gauss, on peut écrire les formules suivantes:

$$M = I + II, \text{ où } I = [pll] - \frac{1}{D} \sum_{\nu=1}^{n} [pa_\nu l]\, D_\nu, \text{ ou}$$

$$I = [pv_i^2], \text{ en } y \text{ substituant } x_i = -D_i : D,\ y_i = 0;$$

$$II = L_1 y_1 + L_2 y_2 + \dots + L_m y_m, \text{ ou}$$

$$II = -\frac{L_1^2}{B_{11}} - \frac{(L_2 . 1)^2}{(B_{22} . 1)} - \dots - \frac{(L_m . \overline{m-1})^2}{(B_{mm} . \overline{m-1})}.$$

L'auteur donne une application de ces formules au calcul de l'erreur moyenne de l'unité de poids dans le cas de recoupement et dans le cas de la compensation de station, lorsqu' on a employé la méthode des séries incomplètes.