Antonín Pleskot

K teorii kornoidy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 78--82

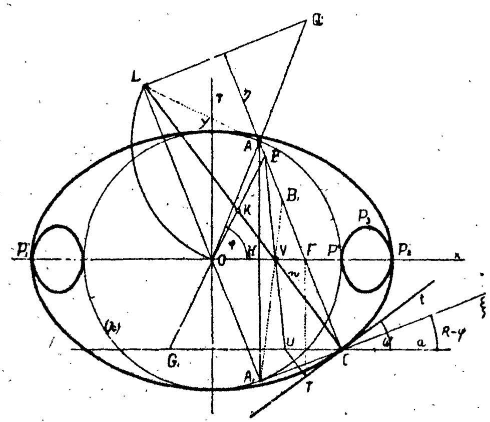
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108925`

K teorii kornoidy.

Dr. Ant. Pleskot, profesor v Plzni.

Ve svém pojednání: „Kinematické strojení tečny a středu křivosti kornoidy", uveřejněném v Rozpravách České Akademie r. 35 čís. 42, zmínil jsem se, že na jiném místě ukáži, že křivku tu opisuje jistý bod v elipse, když tato valí se po čtyrlisté růžici. To i konstrukce z toho plynoucí ukážeme v následujícím.

Kornoida vznikne takto: Středem O (obr.) kružnice (k) o poloměru r veďme libovolnou přímku x. Ke každému bodu A této



kružnice stanovme souměrný bod A_1 hledíce k ose x a pak s bodu A spusťme kolmici na tečnu v bodě A_1 ke kružnici vedenou; tu pata C této kolmice vytvořuje kornoidu.

Jsou-li x a y souřadnice bodu C hledíce k počátku O pravoúhlé soustavy o ose x, jíž přisoudíme určitý směr za kladný a ose y na ní kolmé a označíme-li φ úhel, který tvoří OA s kladným směrem osy x, tu dospějeme k rovnici kornoidy, jež zní:

$$\begin{aligned} x &= 3r\cos\varphi - 2r\cos^3\varphi, \\ y &= r\sin\varphi - 2r\sin^3\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Poněvadž $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ lze vyjádřiti racionálně veličinou $tg\ \frac{1}{2}\varphi$, jest křivka ta unikursální a sice stupně 6., která má dva reálné dvojné body oskulační P'_1 a P'_2 na ose x.

Abychom dospěli ke konstrukci normály této křivky, uvažujme pohyb neproměnného útvaru rovinného, jehož počátkem souřadnic jest bod C kornoidy a jehož osou ξ jest tečna v bodě A_1 ke kružnici vedená a osou η, osa na ní kolmo stojící, orientována k ose ξ tak, jako osa y k ose x. Za směr kladný osy ξ volme směr, v němž pohybuje se bod A na kružnici (k), tedy směr rostoucího φ.

Stanovme okamžitý střed otáčení této soustavy, sunou-li se body A_1 po kružnici a bod C po kornoidě.

Jsou-li ξ a η souřadnice libovolného bodu s pohyblivou soustavou pevně spojeného a X a Y souřadnice téhož bodu v soustavě pevné, tu platí:

$$\begin{aligned} X &= x + \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi, \\ Y &= y + \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi, \end{aligned} \tag{α}$$

při čemž x a y značí souřadnice pohyblivého počátku vzhledem k osám x a y, t. j. souřadnice bodů kornoidy (1).

Okamžitý střed otáčení L v soustavě pohyblivé určíme z podmínky, že rychlost jeho jest rovná nule.

Položíme tedy:

$$\frac{dX}{d\varphi} = \frac{dY}{d\varphi} = 0,$$

považujíce ξ a η za konstantní. Tím obdržíme:

$$\frac{dx}{d\varphi} + \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = 0,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} - \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi = 0.$$

Stanovíme-li $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$ z rovnice kornoidy, tu dospějeme k rovnicím:

$$\begin{aligned} \xi &= -r \sin 2\varphi, \\ \eta &= 4r \sin^2 \varphi - r; \end{aligned} \tag{2}$$

souřadnice téhož bodu L v soustavě pevné určíme, dosadíme-li předchozí souřadnice do (α); tím obdržíme:

$$\begin{aligned} X &= 2r \cos \varphi \cos 2\varphi, \\ Y &= -2r \sin \varphi \cos 2\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Bodem L jakožto okamžitým středem otáčení jdou normály všech bodů v soustavě pohyblivé, tedy i normála bodu C kornoidy. Je-li tedy stanoviti normálu pro bod C, určeme na prodlouženém poloměru OA bod Q, takže $OA = AQ$; s bodu Q spuštěná kolmice na OA_1, protne tuto v bodě L a pak LC jest hledanou normálou. Konstrukci tuto lze ještě zjednodušiti, neboť jak z obrazce patrno, jest $AL = r$. Obdržíme tedy normálu též tak, že z bodu A jakožto středu opíšeme kružnici poloměrem r, kterážto protne OA_1 mimo bod O ještě v bodě L a pak LC jest normálou.

Křivka (2) jest elipsa, jejíž rovnice v obvyklé formě jest

$$\frac{\xi^2}{r^2} + \frac{(\eta - r)^2}{4r^2} = 1. \qquad (2')$$

Poloosy této elipsy jsou r a $2r$ a střed její má souřadnice $\xi' = 0$, $\eta' = r$. Křivka (3) v soustavě pevné značí čtyrlistou růžici vepsanou v kružnici o poloměru $2r$ a středu O, již snadno sestrojíme jakožto geometrické místo bodů L. Pohyb rovinné soustavy ξ, η jest tedy takový, že vzniká valením elipsy (2) neb (2') po ružici (3) a proto možno říci, že kornoida jest křivka, již opisuje bod v elipse (2') o souřadnicích $\xi'' = 0$, $\eta'' = 0$, valí-li se tato po růžici (3); při valení dotýkají se křivky ty v bodech, jež v rovnicích (2) a (3) odpovídají témuž φ. Jsou-li tedy α a α_1 vrcholy růžice na kladné resp. záporné ose x a položíme-li elipsu (2') o vrcholech β a β_1 na ose hlavní na vrcholy α a α_1, pak křivky ty dotýkají se v těchto bodech. Tato poloha elipsy o poloosách $2r$ a r jest základní a to pro úhel $\varphi = 0$. Bod C kornoidy jest pak na kladné ose x ve vzdálenosti r od středu těchto křivek. Polovice obvodu jednoho listu růžice jest rovna obvodu kvadrantu elipsy, jak snadno lze ukázati a proto začne-li se z této polohy elipsa valiti po růžici, odvalí se elipsa úplně dvakráte, než přijde opět do své základní polohy a při tom bod C opíše celou kornoidu.

I mohli bychom na základě známé konstrukce odvoditi konstrukci středu křivosti kornoidy, ježto střed křivosti jak elipsy, tak růžice sestrojiti dovedeme. Volme ale cestu jinou, kratší.

Z té příčiny ukažme ještě jinou konstrukci normály kornoidy. Snadno poznáme, že normála LC protne osu x v bodě V a že platí:

$$\frac{OV}{VF} = 2, \text{ aneb } \frac{HV}{HF} = \frac{1}{3},$$

značí-li F bod, v němž přímka AC protne osu x a H průsečík přímky AA_1 s osou x. Abychom tedy v bodě C normálu sestrojili, stačí středem B_1 úsečky AF a bodem A_1 proložiti přímku, jež protne osu x v bodě V; přímka VC jest hledanou normálou kornoidy.

Abychom dále sestrojili střed křivosti pro bod C stačí sestrojiti průsečík normály s normálou nekonečně blízkou. Veďme proto bodem C rovnoběžku a s osou x a určeme diferenciály délek, jež vytnou na ose x a na přímce a normála VC a normála k této nekonečně blízká. Narýsujeme-li pak od bodu V na osu x a od bodu C na přímku a délky, jež jsou těmto diferenciálům úměrny, pak jak známo, spojnice koncových bodů těchto délek protne VC ve středu křivosti. Stanovme průsečík V normály s osou x. Ježto $OH = r \cos\varphi$ jest úsečka bodu V $x_1 = OV = \frac{4}{3} r \cos\varphi$ a tedy $dx_1 = -\frac{4}{3} r \sin\varphi d\varphi$.

Je-li $y = b$ rovnice přímky a, pak úsečka X průsečíku normály s přímkou a jest:

$$X = x - y'(b - y),$$

a tedy posunutí průsečíku dX, přejdeme-li k sousední normále, jest:

$$dX = dx - (b - y)\,dy' + y'^2 dx,$$

a poněvadž $y = b$ jest: $dX = (1 + y'^2)\,dx$, z čehož

$$\frac{dx_1}{dX} = -\tfrac{4}{3}\,\frac{r \sin \varphi d\varphi}{dx\,(1 + y'^2)}.$$

Z rovnice kornoidy plyne: $dx = 3r \sin \varphi \cos 2\,\varphi d\varphi$ a poněvadž

$$\frac{1}{1 + y'^2} = \cos^2 \omega,$$

kdež ω značí úhel, který tvoří tečna kornoidy s osou x, jest i

$$\frac{dx_1}{dX} = -\tfrac{4}{9}\,\frac{\cos^2 \omega}{\cos 2\varphi}.$$

Volme proto posunutí u na ose x a posunutí v na přímce a tak, že:

$$\frac{u}{v} = -\frac{4 \cos^2 \omega}{9 \cos 2\varphi}.$$

Položme $u = -\dfrac{4r \cos \varphi}{3}$, čímž koncový bod úsečky u spadne do středu kružnice (k) a pak $v = \dfrac{3r \cos \varphi \cos 2\varphi}{\cos^2 \omega}$.

Poněvadž pořadnice bodu C jest $y = r \sin \varphi \cos 2\varphi$, jest i

$$v = \frac{3y \operatorname{cotg} \varphi}{\cos^2 \omega},$$

kterýžto výraz lze snadno sestrojiti.

S bodu F spustíme kolmici na přímku a, jež protne tečnu kornoidy v bodě T; jest pak $CT = \dfrac{y \operatorname{cotg} \varphi}{\cos \omega}$; kolmice na tečnu v T vztyčená protne přímku a v bodě U a tu $CU = \dfrac{y \operatorname{cotg} \varphi}{\cos^2 \omega}$. Určíme-li nyní na přímce a bod G_1, takže $CG_1 = 3CU$, pak G_1O protne normálu ve středu křivosti K. Konstrukci tuto lze ještě zjednodušiti, uvážíme-li, že: $FV : FO = CU : CG_1 = 1 : 3$.

V bodě F vztyčíme kolmici na osu x, jež protne tečnu t kornoidy v bodě T; kolmice v T na tečnu vztyčená seče přímku a v bodě U a je-li B průsečík UV a AC, pak přímka OB seče normálu ve středu křivosti K. Z konstrukce této lze vypočísti souřadnice středu křivosti libovolného bodu křivky; z rovnic těch určíme jednoduché výrazy pro poloměry křivosti ve význačných bodech Y, P', P'_2, P_3, jakož jsme učinili v pojednání shora uvedeném.

Contribution à la théorie de la cornoïde.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur a considéré cette courbe au point de vue cinématique dans les „Rozpravy“ de l'Académie Tchèque des Sciences (II. classe, 35e année, no 42). Dans l'article précédent, il fait voir que la courbe en question est engendrée par un certain point, lorsqu'une ellipse roule sur la rosace à quatre branches. Si les équations de la rosace sont:

$$x = 2r \cos \varphi \cos 2\varphi, \quad y = -2r \sin \varphi \cos 2\varphi$$

et si l'on place l'ellipse aux demiaxes $2r$, r de sorte que l'axe principal de l'ellipse coïncide avec l'axe des x et que son centre coïncide avec le centre de la rosace, alors, le point de l'axe principal, situé à une distance égale à r du centre, décrit la cornoïde, lorsque l'ellipse se déroule deux fois sur la rosace. L'auteur en déduit la construction de la normale et du centre de courbure de la cornoïde. Ces constructions ne sont pas contenues dans l'oeuvre bien connue de M. Loria.