O tangentové křivce paraboly.

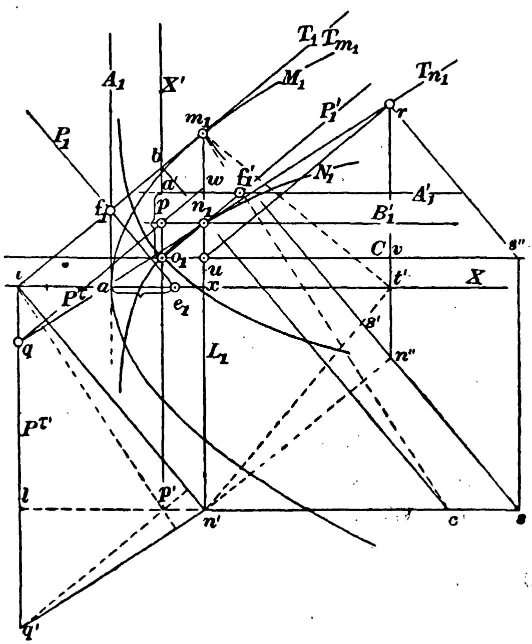
Napsal V. Jeřábek.

Jest dána parabola M_1 (obr. 1.), její vrchol a, vrcholová tečna A_1 a ohnisko e_1. Na parabole zvolme bod m_1, jehož tečna T_1 seče A_1 v bodě f_1 a osu $ae_1 \equiv X$ v bodě t. Kterýmkoli daným bodem o_1 v rovině π paraboly vedená rovnoběžka P'_1 s T_1 nechť protne pořadnici m_1x kolmou k ose X v bodě n_1. Obaluje-li T_1 parabolu M_1, otáčí se P'_1 okolo bodu o_1 a bod n_1 vytvoří křivku N_1, která sluje tangentová křivka paraboly.

1. Křivka N_1 je průmětem proniku N rovnostranného hyp. paraboloidu s parabolickou plochou válcovou.

Veďme vrcholem a přímku A odchýlenou od průmětny π o úhel $(A_1A) = \alpha$, na př. $\alpha = 45^0$, a předpokládejme, že části přímky A nad průmětnou π přináleží průmět A_1 nad osou X. Spojme bod f přímky A, který má svůj průmět v bodě f_1, s ohniskem e_1 a postavme v bodě f kolmici T rovnoběžně s π na e_1f. Mění-li bod f v přímce A svou polohu, vytvoří kolmice T hyperbolický paraboloid, jehož přímkou ležící v průmětně je A_1.

Zdánlivým obrysem paraboloidu je parabola M_1, do níž promítá se jeho skutečný obrys parabolický M jevící se jako geom. místo bodu m površky T, jenž má svůj průmět v m_1. Parabola M má se svým průmětem M_1 společnou osu X a vrchol a, její tečna T_m v bodě m promítá se do $T_{m1} \equiv T_1$ a protíná osu X v bodě t. Postavme kolmici E v bodě e_1 na π a veďme bodem f přímku P rovnoběžně s e_1f_1 protínající kolmici E v bodě e, jemuž přináleží průmět e_1. Pokládáme-li bod f na A za proměnlivý, vytvoří přímka $ef \equiv P$ rovnostranný hyp. paraboloid (P), jehož útvary řídící jsou přímky A, $E \perp \pi$ a průmětna π. Přijde-li bod f do a, stane se osa X přímkou paraboloidu (P) ležící v průmětně π. Otočme paraboloid (P) okolo přímky E, jež promítá se do e_1, na pravo o úhel pravý, pak jej pošiňme ve směru e_1o_1 tak, aby jeho přímka E připadla do kolmice O postavené v bodě o_1 na π. Při tom zaujme trojúhelník ae_1f_1 polohu $a'o_1f'_1$ $(o_1a' \perp X,\ o_1a' = e_1a)$ a trojúhelník v prostoru aef polohu $a'of'$, tak že $O \perp \pi$, $a'f' \equiv A'$ a π jsou útvary řídící přemístěného paraboloidu (P'). Jeho stopou je $o_1 a' \equiv X'$ a přímkou tvořící $P' \equiv of' \parallel \pi$, která má svůj průmět v přímce $o_1 f'_1 \equiv P'_1$ kolmé ku P_1. Že řídicí přímky O a $a'f' \equiv A'$ mají své průměty resp. v o_1 a $a'f'_1 \equiv A'_1$, jest patrno. Veďme bodem m přímku $L \parallel X'$, jejíž průmět $L_1 \parallel X'$ prochází průmětem m_1 bodu m. Přímky L a P' leží v téže rovině rovnoběžné s π, neboť jsou s průmětnou π rovnoběžny a vzdá-



Obr. 1.

lenosti jejich bodův o, m od π jsou stejny. Bod $(L_1 P'_1) \equiv n_1$ lze pokládati za průmět průsečíku $(LP') \equiv n$, a že geom. místem přímek L je parabolická plocha válcová (L) a přímky P' hyp. paraboloid (P'), jeví se geometrické místo N_1 bodu n_1 jako průmět křivky N, v níž (L) a (P') se pronikají.

Plochy tyto pronikají se v křivce stupně čtvrtého, která se rozpadá v křivku N třetího stupně a úběžnou přímku průmětny oběma plochám společnou; je tedy též křivka N_1 stupně třetího.

2. Tečna T_{n_1} křivky N_1 v bodě n_1 jest průmětem tečny T_n křivky N v bodě n, v níž se protínají roviny tečné τ, τ' ploch (P') a (L) v bodě n. Počítáme-li přímku $P' \parallel \pi$ k první soustavě přímek hyp. paraboloidu (P'), je A' jeho přímkou druhé soustavy, k níž náleží též přímka B' jdoucí bodem n rovnoběžně s druhou rovinou řídící A'_1A' a mající svůj průmět v rovnoběžce B'_1 vedené bodem n_1 s A'_1. Rovina tečná τ je stanovena přímka B', P', a poněvadž přímka B' má svou stopu v bodě p, v němž B'_1 protíná površku X' paraboloidu (P') ležící v průmětně, dostaneme stopu $P\tau$ roviny τ v rovnoběžce sestrojené bodem p s $P'_1 \parallel P'$. Rovina tečná plochy válcové obsahuje její površku L a tečnu T_m řídící paraboly M v bodě m. Uvedli jsme již dříve, že tečna T_m má svou stopu v průsečíku $t \equiv (XT_{m_1})$, vedeme-li tedy touto stopou rovnoběžku $P\tau'$ s $L_1 \parallel L$, obdržíme stopu roviny tečné τ'. Spojíme-li posléze průsečík $(P\tau, P\tau') \equiv q$ s bodem n, doděláme se tečny T_n křivky N, načež spojnice n_1q dává nám hledanou tečnu T_{n_1}.

3. Buď t' bodem souměrným k bodu t dle L_1. Kolmice postavená v bodě t na T_1 protniž L_1 v bodě n', pak spojnice $n't'$ stanoví bod s' na normále paraboly M_1 v bodě m_1. Učiňme $s's = m_1s'$ ve směru m_1s', tím dostaneme, jak známo, střed křivosti paraboly M_1 v bodě m_1. Spojme $n's$, pak úhel $tn'm_1 = s'n'm_1 = s'm_1n'$, tedy $s'm_1 = s'n' = ss'$, pročež má trojúhelník $m_1n's$ při vrcholu n' pravý úhel, je tedy $sn' \parallel X$ a $sn' \perp P\tau'$. Body, v nichž sn' seče pravoúhelně rovnoběžky X', $P\tau'$, buďtež p', l. Učiňme na $P\tau'$ délku $qq' = pp' = n_1n'$, tím vzniknou rovnoběžníky $pp'q'q$, $n_1n'q'q$ o společné straně qq'. Ježto jedna strana pq rovnoběžníka prvního stojí kolmo na spojnici tn', stojí na ní též kolmo druhá $p'q'$, a prodloužíme-li tuto až k tn', dostaneme jednu výšku trojúhelníka $tn'q'$. Jeho druhá výška je $n'p'l$ a třetí stanoví spojnice tp prodloužená až ku straně $n'q'$. Tedy $n_1q \parallel n'q'$ seče tp' pravoúhelně. Kolmice vztyčená v průsečíku $(XT) \equiv b$ na tečnu T_1 protniž $n's$ v bodě c. Poněvadž $P\tau' \parallel X' \parallel L_1$, jest $\frac{lp'}{n'p'} = \frac{tb}{m_1b}$, dále pak $tn' \parallel bc \parallel m_1s$, pročež $\frac{n'c}{sc} = \frac{tb}{m_1b}$, tak že $\frac{lp'}{n'p'} = \frac{n'c}{sc}$. Z toho pak, ježto strany trojúhelníků podobných tln', $m_1n'c$ jsou rovnoběžny, jde dále, že

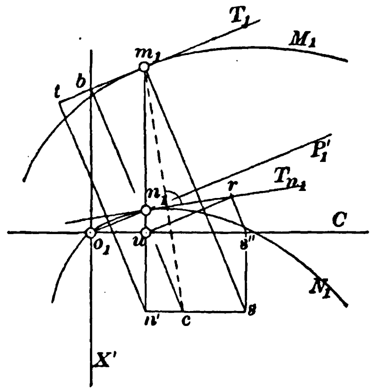
jejich stejnolehlé příčky tp', m_1c jsou rovnoběžny; první z nich tp' stojí kolmo na $n_1q \parallel n'q'$, má tedy i druhá m_1c polohu kolmou ku n_1q. Z toho jde tato konstrukce tečny T_{n_1}: *Sestrojme střed křivosti s paraboly M_1 v bodě m_1, postavme v průsečíku $(T_1X') \equiv b$ kolmici na T_1, protněme ji rovnoběžkou vedenou středem s ku X v bodě c a spusťme s bodu n_1 kolmici T_{n_1} na m_1c; T_{n_1} je tečnou hledanou.*

Protněme kolmici postavenou v bodě t' na osu X přímkou $o_1u \equiv C \parallel X$ v bodě v a tečnu T_{n_1} v bodě r. Spojme průsečík $(CL_1) \equiv u$ s bodem r a vyznačme přímkou qp na L_1 bod w. Ježto $tx = xt'$, vytínají rovnoběžky tq, n_1x, rt' na T_{n_1} stejné dílky qn_1, n_1r, a že $n_1w = o_1p = un_1$, je úsečka ur souměrna k úsečce wq dle středu n_1, jsou tudíž úsečky ur, qw a tm_1 rovnoběžny a stejny. Trojúhelníkem uvr shodným a rovnoběžně položeným s trojúhelníkem txm_1 lze sestrojiti bod r a pak i tečnu T_{n_1}.

Promítněme kolmo střed s na C do bodu s'' a bod n' na m_1s do n''. Úsečka $n'n''$ je rovnoběžna a stejna s úsečkou ur, neboť obě mají touž délku a týž směr jako úsečka tm_1; pročež jsou un', rn'', $s''s$ rovnoběžny a stejny. Trojúhelník urs'' lze pokládati za posunutou polohu trojúhelníka pravoúhlého $n'n''s$ ve směru kolmém ku C a o délku $n'u$. Z toho plyne též sestrojení tečny T_{n_1}, je-li znám střed křivosti s. Promítneme-li totiž pravoúhelně body m_1, s na C do bodův u, s'', jest vrchol r trojúhelníka pravoúhlého $us''r$, jehož jedna odvěsna ur je rovnoběžna s tečnou T_1 a druhá sr'' s normálou m_1s, bodem tečny T_{n_1}.

4. Dána-li v rovině π jakákoliv křivka M_1 (obr. 2.) a přetvoříme-li ji svrchu uvedenou konstrukcí ($o_1n_1 \parallel T$, $m_1n_1 \perp C$) v křivku N_1, pak parabola, která křivku M_1 v bodě m_1 oskuluje, přetvoří se v křivku mající s N_1 společnou tečnu T_{n_1} v bodě n_1. Je-li tedy s společným středem křivosti křivky M_1 a paraboly v bodě m_1, lze trojúhelníkem pravoúhlým $us''r$, jehož přepona us'' na C je průmětem normály m_1s a jehož odvěsna jedna ur je rovnoběžna s tečnou T_1 a druhá $s''r$ s normálou m_1s, sestrojiti tečnu T_{n_1} spojením vrcholu r s bodem n_1. Nebo: 1°. Sestrojme dle (3) bod $(T_1X') \equiv b$, $bc \parallel m_1s$, $sc \perp X'$;

kolmice spuštěná s bodu n_1 na m_1c je opět tečnou T_{n1}. 2°. Vyznačme bod $(m_1u, sc) \equiv n'$, veďme $n't \perp T_1$ a učiňme



Obr. 2.

$ur \equiv tm_1$ ve směru tm_1, tím opět dostaneme tečnu $T_{n1} \equiv n_1r$ křivky N_1.

O ploše kardioidicko-šroubové.

Napsal **Vladimír Mašek**, assistent české techniky v Brně.

Kardioida r_1, ležící v prvé průmětně (obr. 1.), vytvořena jest bodem A_1 kružnice l_1 při kotálení jejím po shodné kružnici k_1 o středu o_1 a poloměru r. Sestrojme rotační válec o řídící kružnici k_1 a na něm šroubovici levou $š$ vycházející z bodu A_1 o výšce závitu v. Uvažujme plochu vytvořenou kardioidou r_1, pohybuje-li se její bod vratu A_1 po dané šroubovici $š$, a zůstává-li její rovina stále kolmo ku ose o šroubovice $š$.

Táž plocha povstane, proložíme-li kružnicí l_1 rotační válec, na němž se nachází šroubovice pravá ${}^1š$, vycházející rovněž z bodu A_1 o téže výšce závitu v a kotálí-li se tato šroubovice po pevné šroubovici $š$ tak, by vždy v bodě styku obou šroubovic příslušné jich roviny oskulační splývaly. Každý bod šroubovice ${}^1š$ opíše v rovině kolmé ku ose o kardioidu, jejíž bod vratu nachází se na šroubovici $š$. Podobně mysleme si kardioidu r_1 vy-