Augustin Pánek

Experimentální určení Ludolfského čísla π

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 5, 272--275

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109385

Experimentální určení Ludolfského čísla π.

Napsal

Augustin Pánek.

Abychom spůsobem, jakýž název udává, určili Ludolfské číslo, položme si především úlohu tuto:

Na desce narýsujme v stejných vzdálenostech v rovnoběžek a nechme na tuže desku dopadnouti jehlu určité délky k. Jaká jest pravděpodobnost, že táž jehla s jednou z oněch rovnoběžek bude se křižovati.

Buďtež rovnoběžky na desce narýsované P_1, P_2, P_3 — obr. 5. — a dvě rovnoběžné polohy jehly $ab = a'b' = k$, kteréž naznačují nejkrajnější případy, ve kterých se jehla přímky narýsované (P_2) dotýká. Nechť má jehla kdekoli střed svůj na přímce ss', vždy protne přímku (P_2), když poloha její bude rovnoběžna s polohou ab; a protož představuje vzdálenosť středů obou poloh jehly ab, $a'b'$ případy příznivé

$$ss' = bb' = k \sin \varphi;$$

počet všech stejně možných případů vyjadřuje vzdálenost

$$mn = v.$$

Jest tedy pravděpodobnost p_1, že jehla v určitém směru dopadne,

$$p_1 = \frac{k \sin \varphi}{v}. \tag{1}$$

Pravděpodobnost, že dopadne jehla mezi φ a $\varphi + d\varphi$ je vyjadřena vzorcem

$$p_2 = \frac{d\varphi}{\pi} \text{*)}. \tag{2}$$

---

*) Tato pravděpodobnost p_2 jeví se též v následující úloze:

Vrhneme-li kouli z bodu A — obr. 6. — na přímku H, jaká jest pravděpodobnost, že dotkne se přímky mezi x a $x + dx$?

Spustíme-li z bodu A kolmici $AO = a$ na přímku H, a nazveme-li $OK = x$, $OK' = x + dx$, $\sphericalangle KAO = \varphi$, tedy $\sphericalangle K'AK = d\varphi$. Znamená proto $d\varphi$ případy příznivé a π všechny možné, tudíž jest žádaná pravděpodobnost

$$p = \frac{d\varphi}{\pi},$$

tedy táž jako nahoře p_2.

Složitá pravděpodobnost P bude

$$P = p_1 p_2 = \frac{k}{\pi v} \sin\varphi \, d\varphi. \tag{3}$$

Má-li se však jehla křižovati s jednou z narýsovaných přímek v jakém koli směru, představme si ji otočenu kolem středu jejího od o do π, načež bude pravděpodobnost v úloze žádaná

$$\Pi = \frac{k}{\pi v} \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2k}{\pi v}. \tag{4}$$

Jest-li $k = v$, bude tato pravděpodobnost v maximum

$$\Pi' = \frac{2}{\pi} > \frac{1}{2}.$$

Učiníme-li jehlou n skutečných pokusů a shledáme-li m případů, v kterých se jehla křižuje s jednou z rovnoběžek, bude nyní pravděpodobnost zkušeností čili pozorováním nabytá

Mimo to dá se tato pravděpodobnost p dále vyjádřiti takto: Poněvadž

$$tg\,\varphi = \frac{x}{a}, \quad \varphi = arc\,tg\,\frac{x}{a},$$

pak

$$d\varphi = \frac{a\,dx}{a^2 + x^2},$$

proto

$$p = \frac{a\,dx}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

Že se koule dotkne prvku v O, jest pravděpodobnost největší, neboť $AK = a$, tedy

$$p = \frac{dx}{\pi a}.$$

Má-li přímka H býti koulí dotknuta v úsečce JJ', mysleme si úsečku tuto rozdělenou na samé prvky; že koule dotkne se jednoho takového prvku ve vzdálenosti x, vyjadřuje svrchu určená pravděpodobnost p, a že se dotkne přímky H někde v rozsáhlosti $JJ' = OJ' - OJ = m - n$ udává pravděpodobnost

$$\Sigma p = P = \int_n^m \frac{a\,dx}{\pi(a^2 + x^2)}$$

aneb konečně

$$P = \frac{1}{\pi}\left(arc\,tg\,\frac{m}{a} - arc\,tg\,\frac{n}{a}\right).$$

$$\Pi = \frac{m}{n}. \tag{5}$$

Srovnáme-li pravděpodobnosti (4) a (5) obdržíme rovnici

$$\frac{2k}{\pi v} = \frac{m}{n},$$

z kteréž plyne Ludolfské číslo

$$\pi = \frac{2kn}{mv}. \tag{6}$$

Předloženou úlohu nejprvé sestavil a řešil *Buffon* ve svém spise „Essai d'Arithmétique morale, 1777". Úloha zní takto: Jaká bude pravděpodobnost, že tyčinka nějaká vyhozená nad podlahou sroubenou ze stejných a rovnoběžných prken, spadnouc skříží se s některou z rovnoběžných šterbin v podlaze.

Dále uvádí úlohu tuto *Bicquilley* ve svém spise o pravděpodobnosti. *)

Jiný způsob řešení této úlohy jest ve knize: *Laurent*, Traité du calcul des Probabilités, Paris, 1873, str. 120.

Slovutný *Lalanne* (Ingénieur-en-chef des ponts-et chaussées), který s několika spisovateli vydával „Un Million de faits", přiměl jednou svou poznámkou prof. *Wolf-a* v Zurichu ke skutečným pokusům jehlou 36^{mm} dlouhou na desce, na kteréž narýsovány byly rovnoběžky ve vzdálenosti 45^{mm}. Jehlu vrhal prof. *Wolf* na desku v seriích po sto pokusech čítajících a po každé serii otočil nepatrně desku; počet případů každé serie, v kterých se jehla křižovala s jednou rovnoběžkou, zapsal a shledal konečně že při 5000 pokusech vůbec, bylo příznivých 2532, tudíž dle (6)

$$\pi = \frac{2.36.5000}{2532.45} = 3{\cdot}1507.$$

Chceme-li π na větší počet míst desetinných určiti, nutno počet pokusů zvětšiti.

Dle referatu *Glaisher-ova* v „Jahrbuch über die Fortschritte d. Mathematik, herausgegeben von *Ohrtmann*, 4. díl, str. 255", učinil nejnověji *Hall* na vyzvání *Fox-ovo* pokusy jehlami různých délek a uveřejnil příslušná dáta v „The Messenger of Mathematics, edited by M. Allen *Whitworth*, *C. Tayler*, *R. Pendleburg*,

*) Německý překlad od *Rüdigier-a*: Die Rechnung des Wahrscheinlichen, Leipzig, 1788.

J. W. Z. Glaisher. London und Cambridge". Zde se však pan referent mýlí, připisuje-li *Buffon-ovu* úlohu slavnému *Laplace-ovi*, který ji arciť jinak řešenou podává ve svém epochalním díle „Théorie analytique des probabilités, 1812 aneb 1847, 5. kapitola".

Organické vytvořování čar a ploch 2. stupně.

Podává

J. S. Vaněček.

Staudt praví v předmluvě ku své geometrii polohy takto:

„Každé vyučování geometrii má vycházeti ze všeobecných úvah, které žáka s rozličnými druhy geometrických útvarů seznamují a jeho obrazotvornost cvičí. Učebné knihy přecházejí však namnoze příliš brzy ku zvláštnostem, totiž ku shodnosti a podobnosti trojúhelníků, a proto nepodávají mnohé pojmy v patřičné všeobecnosti ....

„Jak pro cvičeného geometra není již vyslovení reciproké věty dané větě žádným cvičením, tak jest to pro začátečníka velmi důležitou úlohou. Že však zákon duálný každého vnímavého žáka více ku přemýšlení povzbuzuje, než kterákoliv o sobě podaná věta, sezná každý učitel, který své žáky na něj upozorní".

Na doklad takového užitečného cvičení v převádění jedné věty na jinou, jí duálnou, či duálně odpovídající, podány zde některé souvislé příklady.

Jest známo, že v rovině odpovídá

bodu přímá čára a *přímé čáře bod;*

v prostoru pak zaměňuje se

bod rovinou a *rovina bodem.*

Přímá čára, jakožto uprostřed nich ležící útvar odpovídá *sama sobě.*

Newton podává ve svých „Základech" organické vytvořování kuželoseček, kterýžto způsob podáváme na levé a jemu odpovídající — dualný — na pravé straně: