Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Kopřiva

O jednom vztahu Fareyovy řady k Riemannově domněnce o nulových bodech funkce ζ

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 1, 49--55

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117062`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

O JEDNOM VZTAHU FAREYOVY ŘADY K RIEMANNOVĚ DOMNĚNCE O NULOVÝCH BODECH FUNKCE ζ

JIŘÍ KOPŘIVA, Praha.

(Došlo dne 12. června 1952.)

DT: 511.21
511.91

V práci jsou dokázány ekvivalence určitých jednoduchých podmínek pro zlomky Fareyovy řady s Riemannovou domněnkou o nulových bodech funkce $\zeta(s)$.

V polovici minulého století vyslovil Riemann domněnku, že všechny nereálné nulové body funkce $\zeta(s)$ (Riemannovy ζ-funkce), kde s značí komplexní proměnnou, mají reálnou část rovnou $\frac{1}{2}$. Ze správnosti této domněnky, kterou budeme v dalším nazývati Riemannovou domněnkou, plynuly by, jak známo, mnohé důležité důsledky na př. v nauce o rozdělení prvočísel.

Malá písmena latinské abecedy značí celá čísla, malá písmena řecké abecedy reálná čísla.

Budiž $q > 0$. Všechny redukované zlomky se jmenovatelem kladným a menším nebo nejvýše rovným q, t. j. čísla

$$\frac{a}{b}, \ (a, b) = 1, 0 < b \leqq q,$$

srovnaná podle velikosti, tvoří Fareyovu řadu indexu q. Jednotlivé zlomky nazýváme Fareyovými zlomky (indexu q). Značí-li $\varphi(a)$ Eulerovu funkci číselné theorie, je v každém intervalu $g < \xi \leqq g + 1$ právě $\sum_{a=1}^{q} \varphi(a)$ Fareyových zlomků indexu q. Při posunutí o jednotku přejde Fareyova řada sama v sebe. Stačí se tedy při jejím vyšetřování omeziti na jednotkový interval, na př. na interval $(0, 1\rangle$, což budeme v dalším činiti.

Jsou známy některé vztahy mezi jistými vlastnostmi Fareyovy řady a Riemannovou domněnkou. Značí-li (výjimečně) r_ν Fareyovy zlomky indexu q a je-li $l = \sum_{a=1}^{q} \varphi(a)$, je (viz Landau, 2), Riemannova domněnka ekvivalentní s platností těchto vztahů:

a) pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\sum_{\nu=1}^{l} \cos 2\pi r_\nu = 0(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

b) pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\sum_{\nu=1}^{l} \left(r_\nu - \frac{\nu}{l}\right)^2 = 0\left(\frac{1}{q^{1-\varepsilon}}\right), \tag{*}$$

c) pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\sum_{\nu=1}^{l} \left|r_\nu - \frac{\nu}{l}\right| = 0(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

V těchto vztazích považujeme obě strany za funkce q. Základem pro odvození těchto ekvivalencí je roku 1912 Littlewoodem dokázaná ekvivalence vztahu

(I) $$M(q) = 0(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

s Riemannovou domněnkou. Zde $M(\xi) = \sum_{a=1}^{[\xi]} \mu(a)$, kde $\mu(a)$ je Möbiusova funkce číselné theorie a ε má stejný význam jako nahoře. Vztah (*) pochází od Franela. V této práci jsou odvozeny vztahy podobné Franelovu, ale jednodušší.

Znak $a \subset d$ značí že je $0 < a \leqq d$, $(a, d) = 1$. Je-li n prvočíslo, jsou všechny zlomky

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

redukované. Není-li n prvočíslo, dají se některé z nich vykrátit. Pro každé d/n, $d > 1$, budou mezi vykrácením získanými zlomky všechny zlomky tvaru $\frac{a}{d}$, $a \subset d$, a každý z nich tam bude pouze jednou. Budiž $f(\eta)$ funkce, definovaná pro všechna racionální η. Podle předchozího bude

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right) = \sum_{d/n} \sum_{a \subset d} f\left(\frac{a}{d}\right), \tag{1}$$

kde bereme v počet všechna $d > 0$. Označíme-li

$$F(n) = \sum_{s=1}^{n} f\left(\frac{s}{n}\right), \quad \Phi(d) = \sum_{a \subset d} f\left(\frac{a}{d}\right),$$

můžeme (1) psáti ve tvaru

$$F(n) = \sum_{d/n} \Phi(d)$$

a z toho použitím Möbiusovy inverse

$$\Phi(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d).$$

Sečteme nyní všechny rovnice, které dostaneme z této pro $n = 1, 2, \ldots, q$. Levá strana součtu bude $\sum_{r_\nu}^{q} f(r_\nu)$, kde r_ν probíhá všechny Fareyovy zlomky indexu q z intervalu $0 < \xi \leqq 1$. Pro určení pravé strany součtu uvažme, že faktor $F(d)$ bude u těch sčítanců, ve kterých v $\mu\left(\frac{n}{d}\right)$ je n násobkem čísla d menším nebo nejvýše rovným q. Tedy příspěvek k součtu s faktorem $F(d)$ bude

$$\mu\left(\frac{d}{d}\right) + \mu\left(\frac{2d}{d}\right) + \ldots + \mu\left(\frac{\left[\frac{q}{d}\right]d}{d}\right) = \mu(1) + \mu(2) + \ldots + \mu\left(\left[\frac{q}{d}\right]\right) = M\left(\frac{q}{d}\right).$$

Dostáváme tedy

$$\text{(A)} \qquad \sum_{r_\nu}^{q} f(r_\nu) = \sum_{k=1}^{q} F(k) M\left(\frac{q}{k}\right).$$

Formuli (A) mohu zobecniti tím způsobem, že položím $f(\eta) = 0$ pro $\eta > \xi$, kde $0 < \xi \leqq 1$. Z (A) dostanu pak

$$\text{(B)} \qquad \sum_{r_\nu \leqq \xi}^{q} f(r_\nu) = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right)\left\{f\left(\frac{1}{k}\right) + f\left(\frac{2}{k}\right) + \ldots + f\left(\frac{[k\xi]}{k}\right)\right\}.$$

Položím-li $f(\eta) = 1$, dostanu z (B) počet $P_{\substack{q\\ r_\nu \leqq \xi}}(r_\nu)$ Fareyových zlomků indexu q menších nebo nejvýše rovných ξ

$$P_{\substack{q\\ r_\nu \leqq \xi}}(r_\nu) = \sum_{k=1}^{q} [k\xi] M\left(\frac{q}{k}\right) \tag{2}$$

a pro $\xi = 1$

$$P_{\substack{q\\ r_\nu \leqq 1}}(r_\nu) = \sum_{k=1}^{q} k M\left(\frac{q}{k}\right) = \sum_{k=1}^{q} \varphi(k). \tag{3}$$

Položme ve vzorci (A) $f(\eta) = \eta^2$. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{r_\nu}^{q} r_\nu^2 &= \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{1^2}{k^2} + \frac{2^2}{k_2} + \ldots + \frac{k^2}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^2} M\left(\frac{q}{k}\right)(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^2} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{q} k M\left(\frac{q}{k}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) + \tfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right).
\end{aligned}$$

První člen pravé strany je podle (3) roven $\frac{1}{3} P_{\substack{q\\ r_\nu \leqq 1}}(r_\nu)$, druhý člen má hodnotu $\frac{1}{2}$, neboť $\sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) = 1$ (Landau, 2). Můžeme tedy poslední rovnici přepsat na tvar

$$\sum_{r_\nu \leqq 1}^{q} (r_\nu^2 - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right)$$

nebo

$$\sum_{r_\nu < 1}^{q} (r_\nu^2 - \tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right),$$

čili

$$6\sum_{r_\nu < 1}^{q} (r_\nu^2 - \tfrac{1}{3}) + 1 = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right). \tag{4}$$

Položme $\sum\limits_{r_\nu<1}^{q}(r_\nu^2 - \frac{1}{3}) = H_2(q)$. Je-li správná Riemannova domněnka, platí (I), což pišme ve tvaru

(I′) $\qquad M(q) = 0(q^\alpha)$ pro každé α intervalu $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Potom
$$\left|\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right)\right| < \sum_{k=1}^{q} C_1 \frac{1}{k} \frac{q^\alpha}{k^\alpha} = C_1 q^\alpha \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{1+\alpha}},$$

kde C_1 jakož i v dalším se vyskytující C_i jsou kladné konstanty. Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$ je konvergentní, a je tedy součet $\sum\limits_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$ pro jakkoliv veliká q stále menší než C_2. Tedy
$$\left|\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right)\right| < C_3 q^\alpha$$

a z toho
$$H_2(q) = 0(q^\alpha). \tag{5}$$

Ukážeme, že i naopak z (5) plyne (I′) a tedy platnost Riemannovy domněnky. Utvořme výrazy $\frac{\mu(1)}{1}\overline{H}_2(q)$, $\frac{\mu(2)}{2}\overline{H}_2\left(\left[\frac{q}{2}\right]\right), \ldots, \frac{\mu(q)}{q}\overline{H}_2\left(\frac{q}{q}\right)$, kde $\overline{H}_2(p)$ značí levou stranu ve (4), a sečtěme je. Dostaneme vztah
$$\sum_{k=1}^{q} \frac{\mu(k)}{k} \overline{H}_2\left(\left[\frac{q}{k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{s\leq\frac{q}{k}} \frac{1}{s} M\left(\left[\frac{q}{k}\right]\frac{1}{s}\right) =$$
$$= \sum_{sk\leq q} \frac{\mu(k)}{ks} M\left(\frac{q}{ks}\right) = \sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n} M\left(\frac{q}{n}\right) \sum_{k/n} \mu(k)$$

a tedy
$$\sum_{k=1}^{q} \frac{\mu(k)}{k} \overline{H}_2\left(\left[\frac{q}{k}\right]\right) = M(q),$$

neboť $\sum\limits_{d/a} \mu(d) = 0$ pro $a > 1$. Předpokládáme-li nyní, že platí (5), a tedy také $\overline{H}_2(q) = 0(q^\alpha)$, odvodíme úplně stejným způsobem jako nahoře, že platí (I′). Je tedy vztah
$$\sum_{r_\nu<1}^{q}(r_\nu^2 - \tfrac{1}{3}) = 0(q^\alpha),\ \tfrac{1}{2} < \alpha < 1$$

ekvivalentní s Riemannovou domněnkou.

Porovnáme-li vztah, odvozený Franelem se vztahem zde získaným, vidíme, že druhý je jednodušší v tom smyslu, že od dvojmoci každého Fareyova zlomku je odečteno *stejné číslo*, totiž $\frac{1}{3}$, která je tedy jakýmsi *středem* pro druhé mocniny členů Fareyovy řady. A navíc se nám podaří odvodit podobný vztah pro *třetí* a pro *první mocniny*.

Položme v (A) $f(\eta) = \eta^3$. Dostaneme

$$\sum_{r_\nu \leqq 1}^{q} r_\nu^3 = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{1^3}{k^3} + \frac{2^3}{k^3} + \ldots + \frac{k^3}{k^3}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right)(1^3 + 2^3 + \ldots + k^3)$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{k^4}{4} + \frac{k^3}{2} + \frac{k^2}{4}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{q} kM\left(\frac{q}{k}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) + \tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right).$$

Podobně jako u druhých mocnin dostaneme za použití (3)

$$\sum_{r_\nu \leqq 1}^{q} (r_\nu^3 - \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right)$$

a konečně

$$4 \sum_{r_\nu < 1} (r_\nu^3 - \tfrac{1}{4}) + 1 = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right).$$

Položme zase $\sum_{r_\nu < 1}^{q} (r_\nu^3 - \tfrac{1}{4}) = H_3(q)$; srovnáním se vzorcem (4) a s výsledkem pro $\sum (r_\nu^2 - \tfrac{1}{3})$ dostáváme ihned ekvivalenci vztahu

$$H_3(q) = 0(q^\alpha), \quad \tfrac{1}{2} < \alpha < 1$$

s Riemannovou domněnkou. „*Středem*" třetích mocnin Fareyových zlomků je $\tfrac{1}{4}$.

Postupujeme-li v případě prvních mocnin Fareyových zlomků obdobně, t. j. dosadíme-li prostě do (A) $f(\eta) = \eta$, dostaneme trivialitu $\sum_{r_\nu < 1}^{q} (r_\nu - \tfrac{1}{2}) = 0$, která potvrzuje známý fakt, že Fareyovy zlomky jsou v intervalu $0 < \xi < 1$ symetricky rozloženy vzhledem k $\tfrac{1}{2}$. Použijeme tedy vzorce (B), kde klademe na př. $\xi = \tfrac{1}{2}$. Dostaneme

$$\sum_{r_\nu \leqq \frac{1}{2}}^{q} r_\nu = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \ldots + \frac{\left[\frac{k}{2}\right]}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(1 + 2 + \ldots + \left[\frac{k}{2}\right]\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{2}\right]^2\right).$$

Budeme sčítat zvlášť pro sudá a zvlášť pro lichá k. Pro k sudá položme $k = 2k'$; pak $\left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{2}\right]^2 = k' + k'^2$. Sčítáme od $k' = 1$ do $k' = \left[\frac{q}{2}\right] = s$. Část součtu pro sudá k bude (píši k místo k')

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{4k}M\left(\frac{q}{2k}\right)(k+k^2)=\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{s}M\left(\frac{q}{2k}\right)+\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{s}kM\left(\frac{q}{2k}\right).$$

Pro lichá k položme $k = 2k'' + 1$; pak $\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{2}\right]^2 = k'' + k''^2$. Sčítáme od $k'' = 0$ do $k'' = \left[\frac{q-1}{2}\right] = t$. Část součtu pro lichá k bude (píši k místo k'')

$$\sum_{k=0}^{t}\tfrac{1}{2}\frac{1}{2k+1}M\left(\frac{q}{2k+1}\right)(k+k^2)=$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{t}\frac{k}{2k+1}M\left(\frac{q}{2k+1}\right)+\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{t}\frac{k^2}{2k+1}M\left(\frac{q}{2k+1}\right).$$

Po rozkladu výrazů $\frac{k}{2k+1}$ a $\frac{k^2}{2k+1}$ v parciální zlomky dostáváme jako příspěvek k součtu pro lichá k

$$\tfrac{1}{8}\sum_{k=0}^{t}M\left(\frac{q}{2k+1}\right)-\tfrac{1}{8}\sum_{k=0}^{t}\frac{1}{2k+1}M\left(\frac{q}{2k+1}\right)+\tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{t}kM\left(\frac{q}{2k+1}\right). \tag{6}$$

Platí

$$\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{s}M\left(\frac{q}{2k}\right)=\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{s}M\left(\frac{\left[\frac{q}{2}\right]}{k}\right)=\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{s}M\left(\frac{s}{k}\right)=\tfrac{1}{4}. \tag{7}$$

Zřejmě

$$\tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{t}kM\left(\frac{q}{2k+1}\right)+\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{s}kM\left(\frac{q}{2k}\right)=\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{q}\left[\frac{k}{2}\right]M\left(\frac{q}{k}\right)=\tfrac{1}{4}\underset{r_\nu\leq\frac{1}{2}}{P_q}(r_\nu)$$

podle (2). První člen v (6) je roven nule. Neboť

$$\sum_{k=1}^{s}M\left(\frac{q}{2k}\right)+\sum_{k=0}^{t}M\left(\frac{q}{2k+1}\right)=1. \tag{8}$$

Jest však podle (7)

$$\sum_{k=1}^{s}M\left(\frac{q}{2k}\right)=1$$

a tedy druhý člen v (8) je roven nule. Nabude tedy vztah pro první mocniny po podobných úpravách jako u druhých a třetích mocnin tvaru

$$8\sum_{r_\nu<\frac{1}{2}}^{q}(\tfrac{1}{2}-r_\nu)=\sum_{k=0}^{t}\frac{1}{2k+1}M\left(\frac{q}{2k+1}\right).$$

Podrobným rozborem levé strany zjistíme, že zde vypadnou z počtu především všechny Fareyovy zlomky se sudými jmenovateli a za druhé všechny Fareyovy zlomky se jmenovateli lichými a menšími nebo nejvýše rovnými

$\frac{1}{2}q$. Sčítáme tedy na levé straně pouze přes Fareyovy zlomky r_ν se jmenovatelem lichým a větším než $\frac{q}{2}$.

Označíme-li $\sum_{r_\nu < \frac{1}{4}}^{q} (\frac{1}{4} - r_\nu) = H_1(q)$, dostaneme stejně jako pro druhé a třetí mocniny

$$(\mathrm{I}') \Rightarrow H_1(q) = 0(q^\alpha) \quad \tfrac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Po sečtení výrazů $\frac{\mu(1)}{1} H_1(q)$, $\frac{\mu(3)}{3} H_1\left(\left[\frac{q}{3}\right]\right)$, ..., $\frac{\mu(l)}{l} H_1\left(\left[\frac{q}{l}\right]\right)$ ($l = q$ pro q liché, $l = q - 1$ pro q sudé) odvodíme stejně jako pro druhé mocniny

$$H_1(q) = 0(q^\alpha) \Rightarrow (\mathrm{I}').$$

Je tedy vztah

$$\sum_{r_\nu < \frac{1}{4}}^{q} (\tfrac{1}{4} - r_\nu) = 0(q^\alpha) \quad \tfrac{1}{2} < \alpha < 1$$

ekvivalentní s Riemannovou domněnkou.

LITERATURA

Edmund Landau: Vorlesungen über Zahlentheorie, Band 2, Hirzel, Leipzig, 1927. (Citováno jako Landau, 2.)

Pracováno v matematickém ústavu Karlovy university.