Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Fiedler

Geometrie simplexu v E_n. III.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 2, 182--223

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117189

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

GEOMETRIE SIMPLEXU V E_n

(třetí část)

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 21. dubna 1955.) DT:513.821.2

V této závěrečné třetí části práce*) se studují vlastnosti některých speciálních druhů simplexů, jako pravoúhlých simplexů určitého typu, ortocentrických simplexů a t. zv. simplexů s hlavním bodem.

8. Speciální simplexy. Považujeme-li podobné trojúhelníky za ekvivalentní, závisí obecný trojúhelník na dvou parametrech. Obdobně obecný simplex (v tomto smyslu) závisí na $\binom{n+1}{2} - 1$ parametrech, takže počet parametrů vzrůstá asi jako čtverec dimense. To vede k tomu, že se některé vlastnosti trojúhelníka ve vyšších dimensích ztrácejí: tak v obecném simplexu neexistuje pro $n > 2$ průsečík výšek a pod. V tomto odstavci uvedeme vlastnosti některých speciálních druhů simplexů (jež obvykle závisí na n parametrech), které mají nějakou zobecněnou vlastnost trojúhelníka. Je to (kromě rovnostranného simplexu a pravoúhlého simplexu určitého druhu) jednak ortocentrický simplex, v němž existuje průsečík výšek, dále simplex se zobecněným Gergonneovým bodem, simplex s Torricelliho bodem, simplex se dvěma průsečíky všech Apolloniových sfér (s isodynamickými body) a j. Je zajímavé, že tyto simplexy lze zahrnout do společné větší třídy simplexů a studovat některé jejich vlastnosti společně.

Věta 31. *Pro každé přirozené n existuje v E_n rovnostranný simplex, totiž simplex, jehož všechny hrany jsou si rovny.*

Důkaz. Označme c společnou velikost všech hran, takže $c > 0$. Podle věty 4 stačí dokázat, že pro čísla e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$, $e_{ij} = c^2$ pro $i \neq j$, $e_{ii} = 0$, je splněna implikace: kdykoliv pro reálnou nenulovou soustavu čísel $x_1, \ldots, x_{n+1}$

*) První část práce byla publikována v tomto časopise *79* (1954), 270—297, druhá rovněž v tomto časopise *80* (1955), 462—476.

je $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, pak $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij}x_ix_j < 0$. Avšak $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij}x_ix_j = c^2(\sum_{i=1}^{n+1} x_i)^2 - c^2\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 < 0$ pro $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ a $(x_i) \neq (0)$.

Poznámka. Rovnostranný simplex je zřejmě jediný simplex v E_n, jehož grupa automorfismů je isomorfní celé permutační grupě $(n + 1)$-ho stupně. Podle věty 20 má tento simplex jediný (vlastní) význačný bod, totiž těžiště. Další charakteristická vlastnost rovnostranného simplexu je, že opsaný Steinerův elipsoid je $(n - 1)$-koulí. To plyne ihned z (7,2) pro $m = 0$ a (7,1). Lze bez obtíží ukázat, že provedeme-li na eukleidovský prostor, v němž je dán pevný obecný simplex, takovou afinní transformaci, že Steinerův opsaný elipsoid tohoto simplexu přejde v $(n - 1)$-kouli (taková afinní transformace vždy existuje), pak vrcholy původního simplexu přejdou ve vrcholy rovnostranného simplexu. Lze také ukázat, že Steinerův opsaný elipsoid je jediná kvadrika opsaná simplexu, která má tuto vlastnost.

Obrátíme se teď ke studiu pravoúhlého simplexu určitého typu. Viděli jsme (odst. 4, věta 12), že existují v E_n simplexy, které mají právě n ostrých vnitřních úhlů a všechny ostatní vnitřní úhly pravé (takové simplexy jsme nazvali *pravoúhlé*). Nejdůležitější jsou dva typy pravoúhlých simplexů: první typ má charakteristickou vlastnost, že všechny $(n - 1)$-rozměrné stěny, které procházejí jedním pevným vrcholem, jsou po dvou navzájem kolmé. Takový simplex je zároveň ortocentrický a budeme se jím zabývat později.

Druhý, zajímavější typ, který teď budeme studovat, je charakterisován tím, že jeho vrcholy (a tedy také stěny) lze očíslovat tak, že právě vnitřní úhly $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{34}, \ldots, \varphi_{n,n+1}$ jsou ostré, zatím co všechny ostatní vnitřní úhly jsou pravé.

Věta 32. *Nutná a postačující podmínka, aby simplex v E_n o čtvercích délek hran e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, byl pravoúhlý druhého typu, je: existují navzájem různá reálná čísla*[1] $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ *tak, že*

$$e_{ij} = |c_i - c_j| . \tag{8,1}$$

Důkaz. Předně platí, jak se lze snadno přesvědčit vynásobením, že součin AB (pro navzájem různá čísla $c_1, \ldots, c_{n+1}$) matic

$$A = \begin{Vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 0, & c_2 - c_1, & c_3 - c_1, & \ldots, & c_{n+1} - c_1 \\ 1, & c_2 - c_1, & 0, & c_3 - c_2, & \ldots, & c_{n+1} - c_2 \\ 1, & c_3 - c_1, & c_3 - c_2, & 0, & \ldots, & c_{n+1} - c_3 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1, & c_{n+1} - c_1, & c_{n+1} - c_2, & c_{n+1} - c_3, & \ldots, & 0 \end{Vmatrix},$$

[1]) Je možno ještě požadovat na př. $\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$.

$$B = \begin{Vmatrix} c_{n+1}, & -1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & -1 \\ -1, & -C_{12}, & C_{12}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & C_{12}, & C_{22}, & C_{23}, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & C_{23}, & C_{33}, & C_{34}, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & C_{n-1,n}, & C_{nn}, & C_{n,n+1} \\ -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & C_{n,n+1}, & -C_{n,n+1} \end{Vmatrix},$$

kde $C_{ij} = \dfrac{1}{c_i - c_j}$ pro $i \neq j$, $C_{rr} = \dfrac{c_{r+1} - c_{r-1}}{(c_r - c_{r-1})(c_{r+1} - c_r)}$ pro $r = 2, \ldots, n$, je roven

$$AB = -2I_{n+2},$$

kde I_{n+2} je jednotková matice řádu $n + 2$. Dále si všimněme, že jsou-li c_1, $c_2, \ldots, c_{n+1}$ navzájem různá reálná čísla, pak existuje v E_n simplex s $e_{ij} = |c_i - c_j|$. Můžeme totiž předpokládat, že $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n+1}$ (znamená to jen přečíslování vrcholů). Potom body v eukleidovském prostoru E_n^* reálných n-tic s obvyklou metrikou

$$\begin{aligned} O_1 &= (0, 0, \ldots, 0), \\ O_2 &= (\sqrt{c_2 - c_1}, 0, \ldots, 0), \\ O_3 &= (\sqrt{c_2 - c_1}, \sqrt{c_3 - c_2}, \ldots, 0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ O_{n+1} &= (\sqrt{c_2 - c_1}, \sqrt{c_3 - c_2}, \ldots, \sqrt{c_{n+1} - c_n}) \end{aligned} \tag{8,2}$$

jsou lineárně nezávislé, a přitom pro $i < j$ je

$$[\varrho(O_i, O_j)]^2 = e_{ij} = (\sqrt{c_j - c_{j-1}})^2 + \ldots + (\sqrt{c_{i+1} - c_i})^2 = c_j - c_i = |c_j - c_i|.$$

Nechť nyní je dán simplex v E_n tak, že (je již přečíslován) právě vnitřní úhly $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \ldots, \varphi_{n,n+1}$ jsou ostré a všechny ostatní vnitřní úhly pravé. Podle věty 6 a rovnic (4,2) lze pomocí vnitřních úhlů φ_{ij} najít čísla g'_{ij} tak, že pro příslušná g_{ij} daného simplexu, nalezená z rovnic (2,15), platí

$$g'_{ij} = \varrho g_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n + 1, \ \varrho \neq 0, \ g'_{11} > 0.$$

Vzhledem k (4,2) jsou z čísel g'_{ij}, $i < j$, jen čísla $g'_{12}, g'_{23}, \ldots, g'_{n,n+1}$ různá od nuly, a to vesměs ($g'_{11} > 0$) záporná. Zvolme teď libovolně reálné číslo c_1 a definujme čísla $c_2, \ldots, c_{n+1}$ vztahy

$$c_2 = c_1 - \frac{1}{g'_{12}}, \quad c_3 = c_2 - \frac{1}{g'_{23}}, \ldots, \ c_{n+1} = c_n - \frac{1}{g'_{n,n+1}}.$$

Jak jsme ukázali, existuje v E_n simplex, jehož čtverce délek hran $\bar{e}_{ij} = \bar{e}_{ji} = c_j - c_i$ pro $i < j$. Matice A je pak maticí $\|\bar{e}_{rs}\|$ tohoto simplexu s $\bar{e}_{00} = 0$, $\bar{e}_{0i} = 1$. To znamená, že matice B je až na nenulový faktor maticí $\|\bar{g}_{rs}\|$ z (2,15). Avšak čísla $\bar{g}_{rs}$ jsou, jak plyne ze zavedení čísel c_i a z toho, že jsou splněny i podmínky (podle 2,15d) $\sum_{j=1}^{n+1} g'_{ij} = 0$, úměrná číslům g'_{ij} ($\bar{g}_{ij} = \sigma g'_{ij}$), t. j. vnitřní úhly simplexu $\bar{e}_{ij}$ jsou rovněž φ_{ij}. Potom simplex $\bar{e}_{ij} = |\bar{c}_i - \bar{c}_j|$, kde $\bar{c}_i = \frac{e_{12}}{\bar{e}_{12}} c_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, je shodný podle věty 8 se simplexem e_{ij}, neboť $\bar{\bar{e}}_{12} = e_{12}$, $\bar{\bar{\varphi}}_{ij} = \varphi_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$ (simplexy $\bar{\bar{e}}_{ij}$ a $\bar{e}_{ij}$ mají stejné vnitřní úhly), t. j. (čísla $\bar{c}_i$ jsou opět navzájem různá)

$$e_{ij} = |\bar{c}_i - \bar{c}_j| .$$

Že obráceně simplex $e_{ij} = |c_i - c_j|$ je pravoúhlý druhého typu, plyne ihned vhodným přečíslováním na tvar $e_{ij} = c_j' - c_i'$ pro $i < j$ a z tvaru matice B, odpovídající matici g_{rs} tohoto simplexu (až na nenulový faktor).

Věta 33. *Každá m-rozměrná stěna pravoúhlého simplexu druhého typu, $1 < m \leqq n - 1$, je opět pravoúhlým simplexem druhého typu v příslušném E_m.*

Důkaz. Plyne ihned z věty 32, neboť každé stěně odpovídá podmnožina M_1 indexů $1, 2, \ldots, n + 1$, a pro příslušný simplex z E_m tedy platí

$$e_{ij} = |c_i - c_j| , \quad i, j \in M_1 ;$$

c_i, $i \in M_1$, jsou opět navzájem různá reálná čísla, t. j. podle věty 32 je stěna opět pravoúhlým simplexem druhého typu.

Speciálně každá dvojdimensionální stěna je pravoúhlý trojúhelník. Je zajímavé, že platí i obráceně:

Věta 34. *Každý simplex v E_n, jehož každá dvojdimensionální stěna je pravoúhlý trojúhelník, je pravoúhlý druhého typu.*

Důkaz. Nechť tedy simplex $\sum$ s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ má vlastnost, že všechny jeho dvojdimensionální stěny jsou pravoúhlé trojúhelníky. Všimněme si předně: je-li $\overline{O_iO_j}$ jedna z množiny nejdelších hran simplexu $\sum$, je to přepona ve všech trojúhelnících $O_iO_jO_k$ pro $k \neq i, j$, t. j. $(n - 1)$-koule, utvořená nad O_iO_j jako nad průměrem, je opsaná $(n - 1)$-koule simplexu $\sum$. To znamená, že taková nejdelší hrana je jen jedna (jinak by alespoň dvě různé hrany měly společný střed a čtyři vrcholy simplexu by ležely v rovině).

Dokážeme teď: jsou-li O_i, O_j, O_k, O_l čtyři různé vrcholy a platí-li, že O_iO_j je nejdelší ze šesti hran, spojujících tyto vrcholy, pak není možné, aby úhel $\sphericalangle O_kO_iO_l$ byl pravý. Předpokládejme totiž naopak, že $\sphericalangle O_kO_iO_l = \frac{1}{2}\pi$. Jsou dvě možnosti:

a) $\sphericalangle O_kO_jO_l = \frac{1}{2}\pi$; avšak střed S kulové plochy opsané čtyrstěnu $O_iO_jO_kO_l$ je podle předchozího ve středu hrany O_iO_j. Střed S_1 kružnice opsané trojúhelníku $O_kO_iO_l$ je ve středu strany O_kO_l, rovněž střed S_2 kružnice opsané trojúhelníku $O_kO_jO_l$ je ve středu strany O_kO_l. Nyní SS_1 je přímka kolmá k rovině $O_kO_iO_l$ a rovněž k rovině $O_kO_jO_l$. Obě tyto roviny mají společný bod O_k a jsou tedy totožné. To je spor, neboť všechny čtyři vrcholy neleží v rovině.

b) Jeden z úhlů $\sphericalangle O_kO_lO_j$, $\sphericalangle O_lO_kO_j$ je pravý. Protože oba případy se liší jen výměnou indexů k a l, můžeme předpokládat, že $\sphericalangle\, O_k O_l O_j = \frac{1}{2}\pi$. Pak platí pro čtverce délek hran podle Pythagorovy věty

$$e_{ik} + e_{jk} = e_{ij}\,, \quad e_{il} + e_{jl} = e_{ij}\,,$$
$$e_{ik} + e_{il} = e_{kl}\,, \quad e_{kl} + e_{jl} = e_{jk}\,.$$

Avšak odtud je

$$e_{ik} + e_{il} + e_{jl} = e_{kl} + e_{jl} = e_{jk}\,,$$

a současně

$$e_{ik} + e_{il} + e_{jl} = e_{ik} + e_{ij} = 2e_{ik} + e_{jk}\,, \quad \text{t. j.} \quad e_{ik} = 0\,.$$

Z tohoto sporu už plyne, že $\sphericalangle\, O_k O_i O_l \neq \frac{1}{2}\pi$.

Přejdeme teď k vlastnímu důkazu věty 34. Nechť $O_i O_j$ je nejdelší hrana. Zvolme libovolně reálné číslo c_i a položme pro každé $k = 1, 2, \ldots, n + 1$

$$c_k = c_i + e_{ik}\,. \tag{8,3}$$

Dokážeme, že platí (8,1) a že čísla c_k jsou navzájem různá. Kdyby předně $c_k = c_l$ pro $k \neq l$, pak nutně $j \neq k$, $j \neq l$ ($O_i O_j$ je jediná nejdelší hrana) a podle předchozího je $\sphericalangle\, O_k O_i O_l \neq \frac{1}{2}\pi$, t. j. právě jedna z hran $O_i O_k$, $O_i O_l$ je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku $O_i O_k O_l$, t. j. $e_{ik} \neq e_{il}$ ve sporu s $c_k = c_l$. Z (8,3) plyne

$$e_{ik} = c_k - c_i = |c_k - c_i|\,; \tag{8,4a}$$

poněvadž je $e_{ij} = e_{ik} + e_{jk}$ pro všechna k, je rovněž

$$e_{jk} = c_j - c_k = |c_j - c_k|\,. \tag{8,4b}$$

Jsou-li k, l, i, j vesměs navzájem různé, pak podle předchozího je $\sphericalangle\, O_k O_i O_l \neq \frac{1}{2}\pi$, t. j. platí buď $e_{ik} + e_{kl} = e_{il}$ nebo $e_{il} + e_{kl} = e_{ik}$. V prvním případě je $e_{kl} = c_l - c_i - c_k + c_i = c_l - c_k$, v druhém je $e_{kl} = c_k - c_l$, tedy vždy

$$e_{kl} = |c_k - c_l|\,. \tag{8,4c}$$

Rovnice (8,4a), (8,4b) a (8,4c) dávají celkem (8,1) a věta je dokázána.

Věta 35. *Pravoúhlý simplex druhého typu v E_n má ještě tyto vlastnosti:*

1. *Střed opsané $(n - 1)$-koule leží ve středu nejdelší hrany, která je jediná.*

2. *Existuje v E_n kvádr, mezi jehož vrcholy jsou obsaženy všechny vrcholy tohoto simplexu.*

Důkaz. První část jsme dokázali v důkazu věty 34. Druhá část plyne takto: Z rovnic (8,2) je zřejmé, že body $O_1, \ldots, O_{n+1}$ jsou obsaženy v množině vrcholů kvádru (vyjádřených v E_n^*)

$$V(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\eta_1\sqrt{c_2 - c_1}, \eta_2\sqrt{c_3 - c_2}, \ldots, \eta_n\sqrt{c_{n+1} - c_n})\,,$$

kde $\eta_i = 0$ nebo 1. Protože každý takový pravoúhlý simplex lze po případném přečíslování umístit jako v (8,2), je tím věta 35 dokázána.

Přejdeme teď ke studiu t. zv. ortocentrických simplexů v E_n, t. j. simplexů, pro které existuje průsečík výšek (kolmic s vrcholu na protější $(n - 1)$-rozměrnou stěnu). Uvedeme nejprve některé známé výsledky o ortocentrických simplexech:[2])

A) Simplex v E_n o vrcholech O_i, $i = 1, \ldots, n+1$, $[\varrho(O_i, O_j)]^2 = e_{ij}$, je ortocentrický tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla $\pi_1, \ldots, \pi_{n+1}$ tak, že pro $i \neq j$ je $e_{ij} = \pi_i + \pi_j$, při čemž nejvýše jedno z čísel π_i je nekladné; je-li jedno z nich záporné, jsou ostatní kladná a $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} < 0$.

B) Průsečík výšek pro nulový ortocentrický simplex [3]) splývá s vrcholem O_k pro $\pi_k = 0$. Průsečík výšek nenulového ortocentrického simplexu je v barycentrických souřadnicích bod $O = \left(\frac{1}{\pi_1}, \frac{1}{\pi_2}, \ldots, \frac{1}{\pi_{n+1}}\right)$.

C) Vrcholy a průsečík výšek nenulového ortocentrického simplexu tvoří v E_n t. zv. ortocentrickou soustavu $n + 2$ bodů, která má tyto vlastnosti:

a) každých m, $2 < m \leq n + 1$, z bodů této soustavy tvoří ortocentrický simplex (o $m - 1$ dimensích), který má za průsečík výšek bod, který leží i v lineárním prostoru, vytvořeném zbylými $(n - m + 2)$-ma body (speciálně každých $n + 1$ bodů této soustavy tvoří ortocentrický simplex, který má zbylý bod za průsečík výšek);

b) čtverce vzájemných vzdáleností těchto bodů $O_1, \ldots, O_{n+1}$ a $O_{n+2} \equiv O$ splňují vztahy $(i \neq j)$

$$e_{ij} = \pi_i + \pi_j\,, \quad \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{\pi_k} = 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, n+2\,.$$

D) Průsečík výšek, těžiště a střed opsané $(n - 1)$-koule leží v přímce (zobecněné Eulerově přímce, viz Enciclopedia [4], str. 186).

E) Existuje $n - 1$ zobecněných Feuerbachových $(n - 1)$-koulí[4]) $K_1, \ldots, K_{n-1}$ (opsanou $(n - 1)$-kouli lze považovat za nultou K_0), těchto vlastností:

1. K_m prochází těžišti a průsečíky výšek ve všech m-rozměrných stěnách daného simplexu;

2. K_m patří témuž svazku $(n - 1)$-koulí vytvořenému opsanou $(n - 1)$-koulí a polární $(n - 1)$-sférou, která existuje právě jen v ortocentrickém simplexu;

---

[2]) Na př. *E. Egerváry:* On orthocentric simplexes, Acta Math. Szeged; IX (1940), str. 218—226.

[3]) Budeme zde užívat tohoto označení: jsou-li všechna čísla π_i kladná, $i = 1, \ldots, n + 1$, budeme ortocentrický simplex nazývat kladný; je-li pro některé k $\pi_k = 0$, nazveme ortocentrický simplex nulový. Je-li konečně pro jedno k $\pi_k < 0$, nazveme ortocentrický simplex záporný $\left(\text{v tom případě je ještě } \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} < 0\right)$. Simplexy kladné a záporné nazveme souhrnně nenulové. Nulové ortocentrické simplexy jsou pravoúhlé ve smyslu naší definice (prvního typu).

[4]) Jejich rovnice v bar. souřadnicích jsou

$$K_m \equiv -2(m+1) \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i x_i \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\,.$$

3. středy všech K_m (a všech $(n-1)$-koulí svazku 2) leží v Eulerově přímce.

Tyto známé výsledky doplníme ještě ve větách 36 a 37, v nichž se zobecňují známé vlastnosti příslušných útvarů v rovině.

Nejprve nazveme *rovnoosou n-hyperbolou v E_n* takovou racionální normální křivku n-tého stupně v E_n, která má n asymptotických směrů po dvou navzájem kolmých. Dále dvě takové rovnoosé n-hyperboly budeme na okamžik nazývat *nezávislé*, jestliže obě n-tice jejich asymptotických směrů jsou *nezávislé*, t. j. platí-li: v žádném k-rozměrném (nevlastním) lineárním prostoru, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, určeném $k+1$ z asymptotických směrů jedné určité z obou n-hyperbol (nezáleží na tom, které), neleží víc než k asymptotických směrů druhé.[5])

Věta 36. *Jestliže existují dvě nezávislé rovnoosé n-hyperboly, procházející $(n+2)$-ma různými body v E_n, pak soustava těchto $n+2$ bodů v E_n je ortocentrická. Každá racionální algebraická křivka n-tého stupně, procházející $(n+2)$-ma body ortocentrické soustavy v E_n, je rovnoosá n-hyperbola.*

Důkaz. Dokážeme nejprve tuto pomocnou větu:

Jsou-li v projektivním $(n-1)$-rozměrném prostoru P_{n-1} dvě soustavy po n lineárně nezávislých bodech nezávislé (ve smyslu uvedeném před chvílí), existuje nejvýše jedna regulární kvadrika v P_{n-1}, která má obě tyto soustavy za polární.

Důkaz pomocné věty. Zvolme body jedné soustavy za vrcholy soustavy projektivních souřadnic $O_1, O_2, \ldots, O_n$. V druhé soustavě nechť jsou pak body $Y_i = (\overset{i}{y}_1, \overset{i}{y}_2, \ldots, \overset{i}{y}_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Předpokládejme, že existují dvě různé regulární kvadriky, které mají obě soustavy za polární. Jejich rovnice jsou

$$a \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = 0\,, \quad b \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 = 0\,,$$

kde a_i, b_i jsou nenulová čísla, a přitom hodnost matice $\left\| \begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix} \right\|$ je 2. Z podmínky, že i druhá soustava je polární vzhledem k a i b, plyne, že existují nenulová čísla $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ tak, že pro $r = 1, 2, \ldots, n$ je identicky

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{r}{y}_i x_i \equiv \sigma_r \sum_{i=1}^{n} b_i \overset{r}{y}_i x_i \tag{8,5}$$

čili

$$(a_i - \sigma_r b_i)\, \overset{r}{y}_i = 0 \tag{8,5'}$$

pro $i, r = 1, \ldots, n$.

[5]) To je na př. splněno, jestliže jeden z asymptotických směrů jedné n-hyperboly neleží v žádném $(n-2)$-rozměrném lineárním prostoru, určeném vždy $n-1$ asymptotickými směry druhé.

Definujme teď mezi indexy $1, \ldots, n$ tuto ekvivalenci: $i \sim j$, jestliže $a_i b_j - a_j b_i = 0$.

Kdyby všechny indexy $1, \ldots, n$ byly v téže třídě vzhledem k této ekvivalenci, pak by matice $\left\| \begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix} \right\|$ měla hodnost menší než 2, což je spor.

Odtud plyne, že označíme-li M_1 třídu indexů, ekvivalentních s indexem 1, pak množina M_2 zbylých indexů je neprázdná. Nechť s je počet prvků M_1, tedy $1 \leqq s \leqq n - 1$, pak počet prvků M_2 je $n - s$.

Je-li nyní $Y_r = (\overset{r}{y}_k)$ jeden z bodů Y, pak nenulové souřadnice $\overset{r}{y}_k$ mají indexy buď vesměs z M_1, nebo vesměs z M_2: kdyby totiž pro $i \in M_1$, $j \in M_2$ platilo $\overset{r}{y}_i \neq 0$, $\overset{r}{y}_j \neq 0$, pak by z (8,5') plynulo

$$a_i = \sigma_r b_i\ , \quad a_j = \sigma_r b_j\ ,$$

t. j. $i \sim j$, což je spor s definicí M_1 a M_2.

Označme p_1 resp. p_2 počet bodů Y_r, pro které nenulové souřadnice jsou z M_1 resp. M_2. Je $p_1 + p_2 = n$; z lineární nezávislosti bodů Y_r plyne, že $p_1 \leqq s$, $p_2 \leqq n - s$. To však znamená, že $p_1 = s$, $p_2 = n - s$. Leží tedy v lineárním prostoru dimense $s - 1$, vytvořeném body O_i pro $i \in M_1$, s bodů Y_r, ve sporu s nezávislostí obou soustav.

Nyní přejdeme k důkazu vlastní věty. Předpokládejme, že existují dvě nezávislé rovnoosé n-hyperboly, procházející $(n + 2)$-ma body v E_n. Vyberme z nich libovolných $n + 1$ bodů $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$; ty jsou nutně lineárně nezávislé (kdyby ležely v nadrovině, pak by rovnoosá n-hyperbola měla s touto nadrovinou alespoň $n + 1$ bodů společných a ležela by celá v této nadrovině). Nechť zbylý bod má v barycentrických souřadnicích vzhledem k simplexu s těmito $n + 1$ vrcholy souřadnice $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$; ze stejných důvodů jako dříve je $y_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n + 1$. Označme opět e_{ij} čtverce vzdáleností bodů $O_i O_j$.

Snadno se zjistí, že každá reálná racionální normální křivka n-tého stupně, procházející body $O_1, \ldots, O_{n+1}, Y$, má tvar

$$x_1 = \frac{y_1}{t - t_1}, \quad x_2 = \frac{y_2}{t - t_2}, \ \ldots, \ x_n = \frac{y_{n+1}}{t - t_{n+1}}, \text{ [6]} \tag{8,6}$$

kde $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ jsou navzájem různá reálná čísla. Mají tedy obě rovnoosé n-hyperboly tento tvar (druhá s čísly $t'_1, t'_2, \ldots, t'_{n+1}$). Poněvadž jsou podle předpokladu nezávislé, jsou obě n-tice jejich asymptotických směrů nezávislé a existuje podle předchozí pomocné věty v nevlastní nadrovině jediná regulární kvadrika, k níž jsou obě n-tice polární. Jedna taková kvadrika je imaginární průsečnice opsané $(n - 1)$-koule $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j = 0$ s nevlastní nadrovinou $\sum x_i = 0$.

[6]) Na obvyklý parametrický tvar se tyto rovnice převedou vynásobením pravých stran součinem $(t - t_1) \ldots (t - t_{n+1})$.

Ukážeme teď, že i průsečnice kvadriky $a \equiv \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0$, $a_{ij} = 0$ pro $i = j$, $a_{ij} = \dfrac{1}{y_i} + \dfrac{1}{y_j}$ pro $i \neq j$, s nevlastní nadrovinou má tu vlastnost. Je totiž první n-hyperbola tvaru (8,6); označme Z_r, $r = 1, \ldots, n$, její nevlastní body. Jsou to body $Z_r = (\overset{r}{z}_1, \ldots, \overset{r}{z}_{n+1})$, kde $\overset{r}{z}_i = \dfrac{y_i}{\tau_r - t_i}$ a $\tau_1, \ldots, \tau_n$ jsou kořeny rovnice

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\tau - t_i} = 0\,. \tag{8,7}$$

Platí však pro $r \neq s$

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\overset{r}{z}_i\overset{s}{z}_j = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n+1} \left(\frac{1}{y_i} + \frac{1}{y_j}\right) \frac{y_iy_j}{(\tau_r - t_i)(\tau_s - t_j)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{y_i + y_j}{(\tau_r - t_i)(\tau_s - t_j)} - 2\sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{(\tau_r - t_i)(\tau_s - t_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\tau_r - t_i} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\tau_s - t_j} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{y_j}{\tau_s - t_j} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\tau_r - t_i} -$$

$$- \frac{2}{\tau_s - \tau_r} \left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\tau_r - t_i} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\tau_s - t_i}\right] = 0$$

vzhledem k (8,7); přitom $\tau_s \neq \tau_r$, protože příslušné asymptotické směry jsou ortogonální podle předpokladu. Jsou tedy body Z_r a Z_s sdružené vzhledem ke kvadrice a.

Odtud plyne, že kvadrika a je $(n - 1)$-koule, a protože prochází vrcholy $O_1, \ldots, O_{n+1}$, je to opsaná $(n - 1)$-koule. Je proto pro $\varrho \neq 0$ a $i \neq j$

$$e_{ij} = \varrho\left(\frac{1}{y_i} + \frac{1}{y_j}\right), \tag{8,8}$$

t. j.

$$e_{ij} = \pi_i + \pi_j \quad \text{pro} \quad i \neq j\,.$$

Simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$ je tedy ortocentrický a bod $Y = \left(\dfrac{1}{\pi_i}\right)$ je jeho průsečíkem výšek. Protože tento ortocentrický simplex není nulový, je daná soustava $n + 2$ bodů ortocentrická.

Je-li obráceně soustava $n + 2$ bodů ortocentrická, pak volbou $n + 1$ z těchto bodů za vrcholy základního simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$ dosáhneme, že platí (8,8), kde $Y = (y_i)$ je zbylý bod. Již jsme zjistili, že pro každou reálnou racionální normální křivku n-tého stupně, procházející body $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}, Y$, platí vzhledem k (8,6), že její nevlastní body jsou po dvou sdruženy vzhledem ke kvadrice $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij}x_ix_j = 0$, t. j. vzhledem k opsané $(n-1)$-kouli. To však znamená, že každá taková křivka je rovnoosou n-hyperbolou.

Věta 37. *Nechť v nenulovém ortocentrickém simplexu v E_n průsečík výšek neleží v žádné z nadrovin souměrnosti hran. Potom existuje (právě jedna) rovnoosá n-hyperbola, která prochází všemi vrcholy, průsečíkem výšek a těžištěm.*

Její asymptotické směry splývají se směry os Steinerových elipsoidů (ty jsou jednoznačně stanoveny); je Apolloniovou křivkou průsečíku výšek vzhledem ke Steinerovu opsanému elipsoidu[7]) *a obsahuje paty všech normál spuštěných s průsečíku výšek simplexu na libovolnou kvadriku ze Steinerova systému kvadrik* (viz pozn. za větou 24).

Důkaz. Nechť v tomto simplexu je $e_{ij} = \pi_i + \pi_j$, $i \neq j$. To, že průsečík výšek neleží v žádné z nadrovin souměrnosti hran, znamená, že

$$\pi_i \neq \pi_j \quad \text{pro} \quad i \neq j \tag{8,9}$$

a rovněž $\pi_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n+1$, t. j. $O = \left(\frac{1}{\pi_i}\right)$.

Racionální křivka K n-tého stupně tvaru $(i = 1, \ldots, n+1)$

$$x_i = \frac{1}{t - \pi_i}, \tag{8,10}$$

skutečně má (po transformaci parametru) tvar (8,6); je to tedy podle věty 36 rovnoosá n-hyperbola, která zřejmě prochází těžištěm (pro $t \to \infty$).

Dokážeme teď, že K je Apolloniovou křivkou průsečíku výšek vzhledem ke každé kvadrice ze Steinerova systému. Odtud již budou zřejmé ostatní vlastnosti ve větě uvedené.

Předně čísla

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{00} &= \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} - (n-1)^2, \\
\bar{g}_{0i} &= \frac{n-1}{\pi_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_j}, \\
\bar{g}_{ii} &= \frac{1}{\pi_i}\left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_j} - \frac{1}{\pi_i}\right), \\
\bar{g}_{ij} &= -\frac{1}{\pi_i\pi_j} \quad (i \neq j)
\end{aligned} \tag{8,11}$$

jsou, jak se snadno zjistí dosazením do vztahů (2,15), úměrná (se společným nenulovým koeficientem) číslům g_{ij}, příslušným k $e_{ij} = \pi_i + \pi_j$ pro $i \neq j$.

---

[7]) Apolloniova křivka bodu P k regulární kvadrice je množina bodů takových, že přímka x, procházející bodem X a kolmá k polární nadrovině bodu X, obsahuje bod P.

Budiž pro pevné $m > -1$

$$(m+1)\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 = 0 \tag{8,12}$$

kvadrika ze Steinerova systému. Předpokládejme, že nějaký bod $Y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ má vlastnost bodu Apolloniovy křivky průsečíku výšek vzhledem k (8,12). Potom $(m+1)\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n+1} x_i \sum_{i=1}^{n+1} y_i = 0$ je rovnice polární nadroviny bodu Y dle (8,12); pro směr $Z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ k ní kolmý je $z_j = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{g}_{ij}[(m+1)\, y_i - \sum_{k=1}^{n+1} y_k]$, čili po dosazení z (8,11) a po úpravě je (až na nenulový faktor)

$$z_j = \frac{y_j}{\pi_j} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} - \frac{1}{\pi_j} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\pi_i}.$$

Podle předpokladu je $z_j = \alpha y_j + \beta \dfrac{1}{\pi_j}$;[8]) sečteme-li tyto rovnice, dostaneme $\alpha \sum_{i=1}^{n+1} y_i + \beta \sum_{i=1}^{n+1} \dfrac{1}{\pi_i} = 0$; existuje tedy číslo ϱ tak, že

$$\alpha = \varrho \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i}, \quad \beta = -\varrho \sum_{i=1}^{n+1} y_i.$$

Celkem je

$$\frac{y_j}{\pi_j} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} - \frac{1}{\pi_j} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\pi_i} = \varrho y_j \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} - \varrho \frac{1}{\pi_j} \sum_{i=1}^{n+1} y_i,$$

t. j. až na faktor $y_j = \dfrac{1}{1 - \varrho \pi_j}$. Položíme-li ještě $\varrho = \dfrac{1}{t}$ (a připouštíme-li i hodnotu $t = \infty$), dostaneme skutečně, že bod Y leží na K. Že obráceně každý bod z K má uvedenou vlastnost, zjistí se obrácením postupu nebo přímo výpočtem.

Poznámka. Křivka z věty 37 je zobecněním t. zv. Kiepertovy hyperboly trojúhelníka (viz Enciclopedia [4], str. 207).

Věta 38. *Simplex je kladně ortocentrický tehdy a jen tehdy, existuje-li takový jeho vnitřní bod P, že pro každý samodružný bod S (pokud je různý od P) reciproké transformace*[9]) *vzhledem k simplexu, v níž si odpovídají těžiště T a bod P, platí, že přímka PS je kolmá k harmonické poláře*[10]) *bodu S vzhledem k simplexu. Bod P je pak průsečíkem výšek.*

---

[8]) Pro $Y \neq O$; že O vyhovuje, je evidentní.

[9]) Reciproká transformace vzhledem k simplexu má v barycentrických souřadnicích tvar $x_i' = \dfrac{c_i}{x_i}$, kde c_i jsou nenulová reálná čísla.

[10]) Harmonická polára bodu $Y = (y_1, \dots, y_{n+1})$, $y_i \neq 0$ pro $i = 1, \dots, n+1$, vzhledem k základnímu simplexu je nadrovina o rovnici $\sum_{i=1}^{n+1} \dfrac{x_i}{y_i} = 0$.

Důkaz. Nejprve dokážeme tuto pomocnou větu:

Simplex v E_n, $n > 1$, je ortocentrický tehdy a jen tehdy, existují-li čísla $c_1, \ldots, c_{n+1}$ tak, že pro čísla g_{ij} z (2,15) je hodnost matice

$$M = \begin{Vmatrix} c_1, & g_{12}, & g_{13}, & \ldots g_{1,n+1} \\ g_{21}, & c_2, & g_{23}, & \ldots g_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n+1,1}, & g_{n+1,2}, & g_{n+1,3}, & \ldots c_{n+1} \end{Vmatrix}$$

rovna jedné. Průsečík výšek má pak barycentrické souřadnice úměrné libovolnému nenulovému řádku této matice.

Důkaz. Je-li simplex ortocentrický, věta platí vzhledem ke vztahům (8,11). Je-li obráceně pro čísla c_i hodnost matice M rovna jedné, pak bod, jehož barycentrické souřadnice jsou úměrné libovolnému nenulovému řádku matice M, je vlastní (jinak by $c_i = g_{ii}$ a matice $\|g_{ij}\|$ by měla hodnost 1) a kolmice, spuštěné na $(n-1)$-rozměrné stěny simplexu, procházejí vždy příslušným protějším vrcholem; tento bod je tedy průsečíkem výšek a simplex je ortocentrický.

Budiž nyní dán kladně ortocentrický simplex, $e_{ij} = \pi_i + \pi_j$ pro $i \neq j$, $\pi_i > 0$. Potom pro průsečík výšek je $P = \left(\frac{1}{\pi_i}\right)$, příslušná reciproká transformace

$$x_i' = \frac{1}{\pi_i x_i}.$$

Každý samodružný bod této transformace je tvaru $S = \left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\pi_i}}\right)$, kde $\varepsilon_i = \pm 1$. Nechť $S \neq P$; máme dokázat, že přímka PS je kolmá k nadrovině (která je pak vlastní)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i x_i \sqrt{\pi_i} = 0.$$

Podle (8,11) je tato podmínka ekvivalentní s tím, že matice

$$\left\| \sum_{j=1}^{n+1} g_{ij}\varepsilon_j \sqrt{\pi_j}, \quad \frac{1}{\varepsilon_i \sqrt{\pi_i}}, \quad \frac{1}{\pi_i} \right\| =$$

$$= \left\| \left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_j}\right) \frac{1}{\varepsilon_i \sqrt{\pi_i}} - \frac{1}{\pi_i} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\varepsilon_j \sqrt{\pi_j}}, \quad \frac{1}{\varepsilon_i \sqrt{\pi_i}}, \quad \frac{1}{\pi_i} \right\|$$

má hodnost 2. To však zřejmě platí.

Nechť obráceně je $P = (p_i)$ bod, který má požadovanou vlastnost; můžeme tedy předpokládat, že všechna $p_i > 0$.

I. Nechť $P \neq T$. Potom každý samodružný bod S transformace $x_i' = \frac{p_i}{x_i}$,

$S = (\varepsilon_i \sqrt{p_i})$, $\varepsilon_i = \pm 1$, je různý od P. Podle předpokladu má pro každou soustavu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}$ čísel 1 a -1 matice

$$\left\| \sum_{j=1}^{n+1} \frac{g_{ij}}{\varepsilon_j \sqrt{p_j}}, \quad \varepsilon_i \sqrt{p_i}, \; p_i \right\|$$

hodnost dvě.

a) Budiž $n > 2$ a i, j, k navzájem různé indexy z $1, 2, \ldots, n+1$. Pak platí, označíme-li $\sum^*$ sčítání přes indexy $l = 1, 2, \ldots, n+1$, různé od i, j a k:

$$\begin{vmatrix} \sum_l^* \frac{g_{il}}{\varepsilon_l \sqrt{p_l}} + \frac{g_{ii}}{\varepsilon_i \sqrt{p_i}} + \frac{g_{ij}}{\varepsilon_j \sqrt{p_j}} + \frac{g_{ik}}{\varepsilon_k \sqrt{p_k}}, & \varepsilon_i \sqrt{p_i}, & p_i \\ \sum_l^* \frac{g_{jl}}{\varepsilon_l \sqrt{p_l}} + \frac{g_{ji}}{\varepsilon_i \sqrt{p_i}} + \frac{g_{jj}}{\varepsilon_j \sqrt{p_j}} + \frac{g_{jk}}{\varepsilon_k \sqrt{p_k}}, & \varepsilon_j \sqrt{p_j}, & p_j \\ \sum_l^* \frac{g_{kl}}{\varepsilon_l \sqrt{p_l}} + \frac{g_{ki}}{\varepsilon_i \sqrt{p_i}} + \frac{g_{kj}}{\varepsilon_j \sqrt{p_j}} + \frac{g_{kk}}{\varepsilon_k \sqrt{p_k}}, & \varepsilon_k \sqrt{p_k}, & p_k \end{vmatrix} = 0 . \qquad (8,13)$$

Odtud vhodnými záměnami $\varepsilon_s \to -\varepsilon_s$ a sčítáním resp. odčítáním příslušných výrazů plyne, že pro všechny trojice i, j, l, $i \neq j \neq l \neq i$, je

$$\begin{vmatrix} g_{il}, & p_i \\ g_{jl}, & p_j \end{vmatrix} = 0 .$$

Podle pomocné věty je daný simplex ortocentrický s průsečíkem výšek P; je tedy kladně ortocentrický.

b) Pro $n = 2$ plyne z (8,13) (pro prázdný součet $\sum^*$) platnost rovnic

$$\begin{aligned} \frac{g_{11}}{p_1} - \frac{g_{22}}{p_2} + \frac{g_{23} - g_{13}}{p_3} &= 0 , \\ \frac{g_{13} - g_{12}}{p_1} + \frac{g_{22}}{p_2} - \frac{g_{33}}{p_3} &= 0 , \\ -\frac{g_{11}}{p_1} + \frac{g_{12} - g_{23}}{p_2} + \frac{g_{33}}{p_3} &= 0 . \end{aligned} \qquad (8,14)$$

Snadno se přesvědčíme vzhledem k (2,15d), že této soustavě pro $\frac{1}{p_i}$ vyhovují čísla $p_1 = \frac{1}{g_{23}}$, $p_2 = \frac{1}{g_{13}}$, $p_3 = \frac{1}{g_{12}}$; přitom čísla g_{12}, g_{13}, g_{23} jsou nutně různá od nuly (kdyby $g_{12} = 0$, pak z (2,15d) a (8,14) by $g_{13} = g_{23} = -g_{11} = -g_{22}$, $p_1 = p_2$ a z poslední z rovnice (8,14) $g_{33} = 0$, což je spor) a matice soustavy (8,14) má hodnost 2. To však podle pomocné věty znamená, že P je průsečík výšek; trojúhelník $O_1O_2O_3$ je tedy *kladně* ortocentrický.

II. Pro $P = T$ se obdobným postupem jako v a) zjistí, že T je průsečík výšek (simplex je rovnostranný) a věta 38 rovněž platí.

Z uvedené pomocné věty a rovnic (4,2) ihned plyne věta:

Věta 39. *Simplex v E_n s vnitřními úhly φ_{ij} je ortocentrický tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, z nichž nejvýše jedno je rovno nule, tak, že*

$$\cos \varphi_{ij} = c_i c_j \ \textit{pro} \ i \neq j \, .$$

Dokážeme teď dvě věty o jiných druzích simplexů:

Věta 40. *Nutná a postačující podmínka, aby v simplexu splývaly dva z těchto bodů: těžiště, střed vepsané $(n - 1)$-koule a Lemoinův bod, je, aby simplex byl rovnostěnný, t. j., aby $(n - 1)$-dimensionální obsahy všech jeho $(n - 1)$-rozměrných stěn byly stejné. Potom splývají všechny tři z uvedených bodů.*

Důkaz. Dva z uvedených bodů (podle věty 30) splývají právě tehdy, je-li $g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{n+1,n+1}$. Podle (3,11) je čtverec $(n - 1)$-dimensionálního obsahu stěny protější k O_i roven

$$\frac{|g_{ii}|}{2^{n-1}(n-1)!}\, ;$$

odtud snadno plyne věta vzhledem k (4,3).[11]

Věta 41. *Nutná a postačující podmínka, aby v simplexu splývalo těžiště se středem opsané $(n - 1)$-koule, je: součet čtverců délek hran, jdoucích do jednoho vrcholu, je pro všechny vrcholy stejný.*

Důkaz plyne ihned odtud, že čtverec vzdálenosti těžiště od vrcholu O_i je podle (2,9) roven

$$\varrho^2(T, O_i) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} e_{ij} - \frac{1}{2(n+1)^2} \sum_{j,k=1}^{n+1} e_{jk} \, .$$

Poznámka. Lze ukázat, že pro $n = 3$ jsou simplexy tohoto typu jediné simplexy (čtyrstěny), které mají jediný vlastní význačný bod.

Pro $n > 3$ rovněž existují nerovnostranné simplexy, které mají jediný význačný bod. To vyplývá z této věty:

Věta 42. *Pro každé $n > 2$ existuje n-rozměrný simplex, který není rovnostranný a který má jediný význačný bod.*

Důkaz. Podle věty 4 existuje simplex Σ se čtverci délek hran $e_{ij} = 2 - \cos \frac{2\pi(i-j)}{n+1}$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n+1$, $e_{ii} = 0$, neboť $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j =$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n+1} \left(\cos\frac{2\pi i}{n+1}\cos\frac{2\pi j}{n+1} + \sin\frac{2\pi i}{n+1}\sin\frac{2\pi j}{n+1}\right) x_i x_j =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \cos\frac{2\pi i}{n+1}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \sin\frac{2\pi i}{n+1}\right)^2 < 0$$

pro $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, $(x) \neq (0)$. Tento simplex není rovnostranný. Protože lineární

[11]) Plyne to ostatně ze známých vět z elementární geometrie v E_n, že těžiště dělí těžnice ve stejném poměru, že n-dimensionální obsah simplexu je až na faktor $\frac{1}{n}$ roven součinu $(n - 1)$-dimensionálního obsahu stěny a délky příslušné výšky a z věty, že splynou-li dva z uvedených bodů, splynou všechny tři (z věty 30).

transformace prostoru, která převádí vrcholy simplexu O_1 v O_2, O_2 v O_3, ..., O_{n+1} v O_1, zachovává délky všech hran simplexu, je to isometrie a v grupě automorfismů simplexu Σ lze každý vrchol O_i převést v každý jiný. Má tedy grupa automorfismů tohoto simplexu jediný systém transitivity. Podle věty 20 (z druhé části) má Σ jediný význačný bod (těžiště), což jsme měli dokázat.

Než přejdeme k dalším typům simplexů, dokážeme tuto pomocnou větu.

Věta 43. *Nutná a postačující podmínka, aby existoval v E_n, $n > 1$, simplex, jehož čtverce délek hran e_{ij} vyhovují (kromě $e_{ii} = 0$) pro $i \neq j$ vztahům (α, β, t_i reálná)*

$$e_{ij} = \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta t_i t_j \,, \tag{8,15}$$

je, aby jednak

$$\alpha + \beta > 0 \,, \tag{8,16}$$

jednak, aby nastala jedna z těchto eventualit:

A) *pro všechna $i = 1, \ldots, n + 1$ je $t_i \neq 0$ a platí*

$$\beta\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{t_i}\right)^2 + (\alpha - n\beta) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{t_i^2} > 0 \,; \quad ^{12)} \tag{8,17}$$

B) *právě pro jeden index k je $t_k = 0$, a přitom*

$$\alpha > (n - 1)\beta \,. \tag{8,18}$$

D ů k a z. Podle obecné věty 4 je podmínka existence simplexu ekvivalentní s tím, že pro každou nenulovou soustavu (reálných) čísel $x_1, \ldots, x_{n+1}$ takovou, že $\sum_i x_i = 0$,[13]) platí $\sum_{i,j} e_{ij} x_i x_j < 0$. Avšak po snadném výpočtu

$$\sum_{i,j} e_{ij} x_i x_j = 2\alpha \sum_i t_i^2 x_i \sum_i x_i + 2\beta(\sum_i t_i x_i)^2 - 2(\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2 \,; \tag{8,19}$$

stačí tedy vyšetřit, kdy pro $\sum_i x_i = 0$ je

$$f = \beta(\sum_i t_i x_i)^2 - (\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2 < 0 \,. \tag{8,20}$$

Kdyby předně $\alpha + \beta \leqq 0$, pak by pro každé nenulové společné řešení rovnic $\sum_i x_i = 0$, $\sum_i t_i x_i = 0$ bylo $f \geqq 0$. Odtud plyne nutnost (8,16).

Nechť tedy platí (8,16), nechť všechna $t_i \neq 0$ a nechť neplatí (8,17). Potom pro

$$x_k = \frac{1}{t_k} \sum_i \frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{t_k^2} \sum_i \frac{1}{t_i}$$

---

[12]) Vzhledem k (8,16) je podle Schwarzovy nerovnosti tato podmínka splněna automaticky pro $\alpha > n\beta$ (anebo pro $\alpha = n\beta$ a $\sum^{n+1} \frac{1}{t_i} \neq 0$).

[13]) Ve všech součtech v tomto důkazu se u indexů i, j sčítá od 1 do $n + 1$.

je

$$\sum_i x_i = 0\,,$$

avšak

$$f = \beta\left[(n+1)\sum_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2\right]^2 - (\alpha+\beta)\left[(n+1)\left(\sum_i \frac{1}{t_i^2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 \sum_i \frac{1}{t_i^2}\right] = - \left[(n+1)\sum_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2\right]\left[\beta\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + (\alpha - n\beta)\sum_i \frac{1}{t_i^2}\right] \geqq 0\,,$$

neboť první závorka je podle Schwarzovy nerovnosti nezáporná a druhá podle předpokladu o (8,17) nekladná. Příslušný simplex tedy v tomto případě neexistuje.

Nechť opět platí (8,16) a nechť pro alespoň jedno k je $t_k = 0$. Je-li pro $l \neq k$ také $t_l = 0$, je $e_{kl} = 0$ a simplex neexistuje. Nechť tedy všechna ostatní t_l jsou nenulová; předpokládejme, že neplatí (8,18). Potom pro

$$x_k = - \sum_{i, i \neq k} \frac{1}{t_i}\,, \quad x_i = \frac{1}{t_i} \text{ pro } i \neq k, \text{ je } \sum_i x_i = 0\,,$$

a přitom příslušné

$$f = \beta n^2 - (\alpha + \beta)\, n = n[(n-1)\,\beta - \alpha] \geqq 0\,.$$

Tím jsme ukázali, že uvedená podmínka ve větě je nutná.

Předpokládejme teď, že platí podle A) nerovnosti (8,16) a (8,17). Nechť $x_1, \ldots, x_{n+1}$ je nějaká nenulová soustava, pro kterou $\sum_i x_i = 0$. Dokážeme, že $f < 0$. Rozlišujme tyto případy:

1. $\beta \leqq 0$; podle (8,16) a (8,20) je zřejmě $f < 0$;

2. $\beta > 0$, $\alpha > n\beta$; potom $f = \beta(\sum_i t_i x_i)^2 - (\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2 < \beta[(\sum_i t_i x_i)^2 - (n+1) \,.\, \sum_i t_i^2 x_i^2] \leqq 0$;

3. $\beta > 0$, $\alpha = n\beta$; pak $f = \beta[(\sum_i t_i x_i)^2 - (n+1) \sum_i t_i^2 x_i^2] \leqq 0$; přitom však nemůže nastat rovnost: pak by totiž pro $\lambda \neq 0$ bylo $x_i = \dfrac{\lambda}{t_i}$, $\sum_i \dfrac{1}{t_i} = 0$, což vede ke sporu s (8,17);

4. $\beta > 0$, $\alpha < n\beta$; je opět $\sum_i \dfrac{1}{t_i} \neq 0$ vzhledem k (8,17). Platí tedy postupně

$$f = \beta(\sum_i t_i x_i)^2 - (\alpha + \beta)\sum_i t_i^2 x_i^2 = \frac{1}{n+1}\Big\{(n\beta - \alpha)(\sum_i t_i x_i)^2 -$$

$$-(\alpha + \beta)[(n+1)\sum_i t_i^2 x_i^2 - (\sum_i t_i x_i)^2]\Big\} =$$

$$= \frac{n\beta - \alpha}{(n+1)\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2}\left\{- \frac{\alpha + \beta}{n\beta - \alpha}\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2\left[(n+1)\left(\sum_i t_i x_i\right)^2 - \sum_i t_i^2 x_i^2\right] + \right.$$

$$\left. + \left[(n+1)\sum_i x_i - \sum_i \frac{1}{t_i}\sum_i t_i x_i\right]^2\right\} <$$

$$< \frac{n\beta - \alpha}{(n+1)\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2}\left\{\left[(n+1)\sum_i x_i - \sum_i \frac{1}{t_i}\sum_i t_i x_i\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \left[(n+1)\sum_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2\right]\left[(n+1)\sum_i t_i^2 x_i^2 - \left(\sum_i t_i x_i\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{n\beta - \alpha}{(n+1)\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2}\left\{\left[\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)(t_i x_i - t_j x_j)\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)^2 \sum_{\substack{i,j\\ i<j}}(t_i x_i - t_j x_j)^2\right\} \leqq 0$$

podle Schwarzovy nerovnosti.

Zbývá dokázat, že je-li splněno B), t. j. $t_k = 0$, $t_l \neq 0$ pro $l \neq k$, a (8,18), že pro $(x_i) \neq (0)$, $\sum_i x_i = 0$ je $f < 0$. Rozlišujme dva případy:

1. $\beta \leqq 0$; pak podle (8,16) a (8,20) je zřejmě $f < 0$;
2. $\beta > 0$; potom

$$f = \beta(\sum_{\substack{i\\ i \neq k}} t_i x_i)^2 - (\alpha + \beta)\sum_{\substack{i\\ i \neq k}} t_i^2 x_i^2 <$$

$$< \beta[(\sum_{\substack{i\\ i \neq k}} t_i x_i)^2 - n\sum_{\substack{i\\ i \neq k}} t_i^2 x_i^2] \leqq 0\,.$$

Tím je věta 43 úplně dokázána.

Uveďme teď několik vět o určitých typech simplexů; o dimensi E_n v nich předpokládejme, že $n > 1$.

Věta 44. *Nutná a postačující podmínka, aby v simplexu o vrcholech $O_1, O_2, \ldots O_{n+1}$ v E_n existoval vlastní bod $P \neq O_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n+1$, takový, že úhly (neorientovaných) přímek PO_i, PO_j pro $i \neq j$ jsou si vesměs navzájem rovny,*[13]) *je, aby platilo* (8,15) *pro $\alpha = n\beta$ a $t_i \neq 0$.*

[13]) Bod P je pak zřejmě zobecněným Torricelliho bodem trojúhelníka (viz Enciclopedia [4], str. 193).

Důkaz. Nechť předně v simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$ existuje bod P uvedených vlastností. To znamená, že existuje v E_n rovnostranný simplex $\overline{O}_1, \overline{O}_2, \ldots, \overline{O}_{n+1}$ o hraně délky $c > 0$ s těžištěm P tak, že vrcholy daného simplexu O_i leží na přímkách $P\overline{O}_i$. Jsou-li (v barycentrických souřadnicích vzhledem k simplexu $\overline{O}_1, \ldots, \overline{O}_{n+1}$) O_i body [14]) $O_i = (z^i_k)$, $z^i_k = 1 - t_i + (n + 1)\, t_i\delta_{ik}$, $t_i \neq 0$ vzhledem k $P \neq O_i$, pak čtverce vzdáleností bodů O_i, O_j jsou[15]) pro $i \neq j$

$$e_{ij} = c^2 \left[- \frac{\sum\limits_{k \neq l} z^i_k z^i_l}{2\left(\sum\limits_k z^i_k\right)^2} + \frac{\sum\limits_{k \neq l} z^i_k z^j_l}{\sum\limits_k z^i_k \sum\limits_l z^j_l} - \frac{\sum\limits_{k \neq l} z^j_k z^j_l}{2\left(\sum\limits_k z^j_k\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{c^2}{2(n+1)^2} [- (n + 1)^2 + (n + 1)(1 - t_i)^2 + 2(n + 1)\, t_i(1 - t_i) + (n + 1)^2 t_i^2 +$$
$$+ 2(n + 1)^2 - 2(n + 1)(1 - t_i)(1 - t_j) - 2(n + 1)\, t_i(1 - t_j) -$$
$$- 2(n + 1)\, t_j(1 - t_i) - (n + 1)^2 + (n + 1)(1 - t_j)^2 + 2(n + 1)\, t_j\, .$$
$$.\, (1 - t_j) + (n + 1)^2 t_j^2] = \frac{c^2}{2(n+1)} [n(t_i^2 + t_j^2) + 2t_it_j]\,,$$

t. j. skutečně tvaru (8,15) pro $\alpha = n\beta$, $t_i \neq 0$.

Jestliže obráceně v simplexu platí (8,15) pro $\alpha = n\beta$ a $t_i \neq 0$, pak se výpočtem z (2,9) a (8,19) pro $\alpha = n\beta$ zjistí, že pro vlastní bod $P = \left(\frac{1}{t_i}\right)$ v barycentrických souřadnicích[16]) je $\varrho^2 (O_i, P) = \alpha t_i^2$. Z kosinové věty pro trojúhelník O_i, O_j, P, $i \neq j$, ihned plyne, že kosinus úhlu přímek PO_i, PO_j je roven $\frac{1}{n}$, a tedy stejný pro všechny dvojice i, j, $i \neq j$.

Věta 45. *Nutná a postačující podmínka, aby dotykové body $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ $(n - 1)$-koule, vepsané[17]) simplexu s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$, v příslušných stěnách ω_i měly vlastnost, že přímky P_iO_i procházejí týmž bodem Q, je, aby platilo* (8,15) *pro $\alpha = (n - 1)\,\beta$ a $t_i \neq 0$.*

Důkaz. Nechť předně v simplexu existuje bod Q uvedené vlastnosti. Protože dotykové body vepsané $(n - 1)$-koule leží vždy v jediné $(n - 1)$-rozměrné stěně, neleží bod $Q = (q_i)$ v žádné stěně, $q_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$. Dále existuje jediná (regulární) kvadrika, dotýkající se stěn ω_i v průmětech P_i bodu Q z O_i, o rovnici

$$n \sum_i \left(\frac{x_i}{q_i}\right)^2 - \left(\sum_i \frac{x_i}{q_i}\right)^2 = 0\,. \quad ^{18}) \tag{8,21}$$

Poněvadž je to právě vepsaná $(n - 1)$-koule podle předpokladu, má (8,21) také rovnici (podle (5,1))

---

[14]) Vhodnou volbou t_i toho lze vždy dosáhnout.

[15]) V těchto vzorcích se sčítá pro k, l od 1 do $n + 1$.

[16]) Bod P je vlastní podle poznámky [12]) na str. 24.

[17]) V širším slova smyslu, přesněji vepsané nebo připsané.

[18]) To je projektivně ekvivalentní věta s větou 24 pro n — 1. Bod Q je zobecněným Gergonneovým bodem (viz Enciclopedia [4], str. 190).

$$\alpha_0\sum_{i,j} e_{ij}x_ix_j - 2\sum_i x_i\sum_i \alpha_i x_i = 0\,; \quad \alpha_0 \neq 0\,;$$

srovnáním vyplývá $\alpha_i = -\dfrac{n-1}{2q_i^2}$; pro $i \neq j$

$$-2\alpha_0 e_{ij} = (n-1)\left(\frac{1}{q_i^2} + \frac{1}{q_j^2}\right) + \frac{2}{q_iq_j},$$

t. j. platí (8,15) pro $\alpha = (n-1)\,\beta$ a $t_i = \dfrac{1}{q_i}$.

Obráceně se snadno zjistí, že pro $\alpha = (n-1)\,\beta$ a $t_i = \dfrac{1}{q_i}$ je (8,21) rovnice vepsané $(n-1)$-koule a že bod $Q = \left(\dfrac{1}{t_i}\right)$ má uvedenou vlastnost.

Věta 46. *Nutná a postačující podmínka, aby v simplexu v E_n existovala $(n-1)$-koule, dotýkající se všech jeho (i prodloužených) hran, je, aby platilo* (8,15) *pro* $\alpha = \beta$ *a* $t_i \neq 0$.

Potom existuje bod R, který leží ve všech nadrovinách, spojujících dotykový bod v některé hraně s $(n-2)$-dimensionální stěnou, protější k této hraně.[19])

Důkaz. Nechť předně existuje $(n-1)$-koule, jak o ní mluví věta. Její rovnice budiž podle věty 5

$$\alpha_0\sum_{i,j} e_{ij}x_ix_j - 2\sum_i x_i\sum_i \alpha_i x_i = 0\,, \quad \alpha_0 \neq 0\,.$$

Poněvadž se pro $i \neq j$ podle předpokladu dotýká hrany O_iO_j, je diskriminant rovnice

$$-\alpha_i x_i^2 + (\alpha_0 e_{ij} - \alpha_i - \alpha_j)\,x_ix_j - x_jx_j^2 = 0$$

roven nule,

$$(\alpha_0 e_{ij} - \alpha_i - \alpha_j)^2 = 4\alpha_i\alpha_j\,.$$

Odtud plyne, že všechna nenulová α_k jsou téhož znamení; nechť $\alpha_i \geqq 0$. Pak

$$\alpha_0 e_{ij} = \alpha_i + \alpha_j + 2\varepsilon_{ij}\sqrt{\alpha_i}\sqrt{\alpha_j} = (\sqrt{\alpha_i} + \varepsilon_{ij}\sqrt{\alpha_j})^2\,, \qquad (8,22)$$
$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \pm 1\,.$$

Ukážeme, že platí pro $i \neq j \neq k \neq i$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} = 1\,. \qquad (8,23)$$

Kdyby totiž $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} = -1$, pak by pro $x_l = 0$ pro $l \neq i, j, k$, $x_i + x_j + x_k = 0$ platilo předně $\sum\limits_{r=1}^{n+1} x_r = 0$, jednak po úpravě

$$\sum_{p,q} e_{pq}x_px_q = e_{ij}x_ix_j + e_{ik}x_ix_k + e_{jk}x_jx_k = -\alpha_i x_i^2 - \alpha_j x_j^2 -$$
$$-\alpha_k x_k^2 + 2\varepsilon_{ij}\sqrt{\alpha_i}\sqrt{\alpha_j}x_ix_j + 2\varepsilon_{ik}\sqrt{\alpha_i}\sqrt{\alpha_k}x_ix_k +$$
$$+ 2\varepsilon_{jk}\sqrt{\alpha_j}\sqrt{\alpha_k}x_jx_k = -(\varepsilon_{jk}\sqrt{\alpha_i}x_i + \varepsilon_{ik}\sqrt{\alpha_j}x_j + \varepsilon_{ij}\sqrt{\alpha_k}x_k)^2\,,$$

[19]) Tento bod R je tedy jiným zobecněním Gergonneova bodu trojúhelníka.

což nabývá pro některá nenulová x_i, x_j, x_k, $x_i + x_j + x_k = 0$; hodnoty nula ve sporu s větou 4.

Označme nyní $t_1 = \sqrt{\alpha_1}$ a definujme pro $i > 1$ $t_i = \varepsilon_{1i}\sqrt{\alpha_i}$. Potom platí podle (8,22)

$$\alpha_0 e_{1i} = (t_1 + t_i)^2 \text{ pro } i > 1 ;$$

jsou-li $i, j > 1$, $i \neq j$, pak

$$\alpha_0 e_{ij} = (\varepsilon_{1i} t_i + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{1j} t_j)^2 = (t_i + t_j)^2$$

podle (8,23). Platí tedy

$$\alpha_0 e_{ij} = t_i^2 + t_j^2 + 2t_i\, t_j ,$$

t. j. skutečně (8,15) pro $\alpha = \beta$. Kdyby některé $t_k = 0$, pak podle věty 43 by platilo (8,18), tedy $\alpha > (n - 1)\,\alpha$, což je spor s $n > 1$.

Snadno se zjistí, že potom bod $R = \left(\frac{1}{t_i}\right)$ má vlastnost uvedenou ve větě.

Obráceně, platí-li (8,15) pro $\alpha = \beta$ a $t_i \neq 0$, je, jak plyne z (8,19),

$$2\sum_i t_i^2 x_i^2 - (\sum_i t_i x_i)^2 = 0$$

rovnice $(n - 1)$-koule, která se dotýká hran v průmětech bodu $R = \left(\frac{1}{t_i}\right)$ z protější $(n - 2)$-rozměrné stěny. Tím je věta 46 dokázána.

Věta 47. *Nutná a postačující podmínka, aby pro simplex v E_n mělo $\frac{1}{2}(n^2 - 1)\, n$ $(n - 1)$-sfér $K_{ij}^k = K_{ji}^k$, $i \neq j \neq k \neq i$, které budeme nazývat Apolloniovými $(n - 1)$-sférami simplexu*[20]*), společný vlastní bod,*[21]*) je, aby pro $\alpha = 0$ platilo (8,15) a $t_i \neq 0$.*

Důkaz. Nechť předně se všechny K_{ij}^k protínají ve (vlastním) bodě $D = (d_i)$. Ze vztahu v poznámce[20]) plyne, že K_{ij}^k má rovnici

$$e_{ik}[\sum_{p,q=1}^{n+1} e_{pq}x_p x_q - 2\sum_p e_{jp}x_p \sum_q x_q] -$$

$$- e_{jk}[\sum_{p,q=1}^{n+1} e_{pq}x_p x_q - 2\sum_p e_{ip}x_p \sum_q x_q] = 0 . \qquad (8,23)$$

Označíme-li t_i čísla

$$t_i = \sum_{p,q=1}^{n+1} e_{pq}d_p d_q - 2\sum_p e_{ip}d_p \sum_q d_q ,$$

nejsou všechna rovna nule, neboť pak by $D = O_1$, $D = O_2$, ..., $D = O_{n+1}$ (je $\varrho^2(D, O_i) = -\dfrac{t_i}{2(\sum \alpha_i)^2}\Big)$.

20) K_{ij}^k je $(n - 1)$-sféra, která obsahuje právě ty body $X \in E_n$, pro které $\overline{XO_i} : \overline{XO_j} = \overline{O_kO_i} : \overline{O_kO_j}$.

21) Takový bod je zobecněním isodynamického centra trojúhelníka (viz Enciclopedia [4], str. 194).

Budiž tedy $t_k \neq 0$ a nechť $l \neq k$; pro index i, $i \neq l \neq k \neq i$, který vzhledem k $n > 1$ existuje, platí podle (8,23), které bod D vyhovuje, $e_{ik}t_l = e_{il}t_k$, takže i $t_l \neq 0$ pro $l \neq k$. Z (8,23) pak plyne, že čísla $\frac{e_{ik}}{t_i t_k}$ jsou pro $i \neq k$ vesměs navzájem stejná, že tedy

$$e_{ij} = \varrho t_i t_j \; ; \tag{8,24}$$

platí tudíž skutečně (8,15) a $t_i \neq 0$.

Jestliže obráceně jsou splněny vztahy (8,24), pak se snadno zjistí, že bod $D = \left(\frac{c}{t_i} + \frac{1}{t_i^2}\right)$, kde c je kořenem rovnice $n(n+1)\,c^2 + 2cn \sum \frac{1}{t_i} + \left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2 - \sum \frac{1}{t_i^2} = 0$ (její diskriminant je $n\left[(n+1)\sum \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum \frac{1}{t_i}\right)^2\right] \geqq 0$ a tedy c existuje), vyhovuje všem rovnicím (8,23) a má tedy vlastnost vyslovenou ve větě.

Než uvedeme další větu, podáme dvě definice. Nazveme *pravidelnou* $(n+1)$-*hvězdou* množinu $n+1$ navzájem různých orientovaných přímek v E_n, procházejících jedním bodem (*středem* hvězdy) a svírajících navzájem týž úhel.[22]) Dále nazveme *neúplnou n-hvězdou* množinu n navzájem různých orientovaných přímek v E_n, procházejících jedním bodem, neležících v nadrovině a svírajících navzájem týž úhel.

Věta 48. *Nutná a postačující podmínka, aby k danému simplexu v* E_n *existovala v* E_{n+1}, *obsahujícím* E_n, *neúplná* $(n+1)$-*hvězda tak, že vrcholy tohoto simplexu jsou průsečíky přímek této* $(n+1)$-*hvězdy s* E_n, *je, aby platilo* (8,15) *pro* $\alpha > n\beta$ *a* $t_i \neq 0$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že existuje v E_{n+1} neúplná $(n+1)$-hvězda uvedených vlastností. Potom existuje simplex v E_{n+1} s vrcholy O'_1, $O'_2, \ldots, O'_{n+2}$ tak, že přímky $(n+1)$-hvězdy jsou přímky $O'_{n+2}O'_i$ pro $i < n+2$ a že pro nějaká čísla $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ platí (pro $i, j < n+2$, $i \neq j$)

$$\varrho^2(O'_i, O'_{n+2}) = \bar{\alpha}\,, \quad \varrho^2(O'_i, O'_j) = 2(\bar{\alpha} + \bar{\beta})\,. \tag{8,25}$$

Protože vrcholy O_i daného simplexu jsou různé od O'_{n+2} a leží na přímkách $O'_{n+2}O'_i$ (tak lze body O'_i očíslovat), existují čísla φ_i, $i = 1, \ldots, n+1$, tak, že v barycentrických souřadnicích vzhledem k simplexu $O'_1, \ldots, O'_{n+2}$ je

$$\begin{aligned} O_1 &= (1, 0, \ldots, 0, \varphi_1 - 1)\,, \\ O_2 &= (0, 1, \ldots, 0, \varphi_2 - 1)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ O_{n+1} &= (0, 0, \ldots, 1, \varphi_{n+1} - 1)\,. \end{aligned}$$

[22]) Je to na př. množina orientovaných přímek TO_i, kde O_i jsou vrcholy a T těžiště rovnostranného simplexu v E_n. Jestliže obráceně zvolíme na přímkách pravidelné $(n+1)$-hvězdy se středem T body O_i ve stejné (orientované) vzdálenosti od T, dostaneme rovnostranný simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$ s těžištěm T. Ze vzorců (3,2) pro úhel orientovaných přímek se zjistí, že úhel φ dvou z těchto přímek je už jednoznačně určen a že $\cos\varphi = -\frac{1}{n}$.

Čísla φ_i jsou nenulová, neboť O_i jsou vlastní body E_n, a tedy i E_{n+1}. Pro čtverce vzdáleností bodů O_i, O_j pro $i \neq j$, t. j. pro e_{ij}, platí podle (2,9) vzhledem k

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n+1} e'_{\mu\nu}x'_\mu x'_\nu = 2(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x'_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} x'^2_i\right] + 2\bar{\alpha}x'_{n+2}\sum_{i=1}^{} x'_i:$$

$$e_{ij} = -\frac{2\bar{\alpha}(\varphi_i - 1)}{2\varphi_i^2} + \frac{2(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) + \bar{\alpha}(\varphi_i - 1) + \bar{\alpha}(\varphi_j - 1)}{\varphi_i\varphi_j} - \frac{2\bar{\alpha}(\varphi_j - 1)}{2\varphi_j^2} =$$

$$= \bar{\alpha}\left(\frac{1}{\varphi_i^2} + \frac{1}{\varphi_j^2}\right) + \frac{2\bar{\beta}}{\varphi_i\varphi_j}.$$

Je tedy vztah (8,15) splněn pro $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$, $t_i = \dfrac{1}{\varphi_i} \neq 0$. Že je $\alpha > n\beta$, plyne z existence simplexu $O'_1, \ldots, O'_{n+2}$: pro $x'_i = 1$, $i = 1, \ldots, n+1$, $x'_{n+2} = -(n+1)$ je $\sum_{\mu=1}^{n+2} x'_\mu = 0$, takže podle (2,9)

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n+2} e'_{\mu\nu}x'_\mu x'_\nu = 2(\bar{\alpha}+\bar{\beta})[(n+1)^2 - (n+1)] - 2\bar{\alpha}(n+1)^2 =$$

$$= 2(n+1)(n\bar{\beta} - \bar{\alpha}) < 0\,.$$

Nechť obráceně platí (8,15) pro $\alpha > n\beta$ a $t_i \neq 0$. Podle věty 43 existuje v E_{n+1} simplex $O_1, O_2, \ldots, O_{n+2}$ tak, že platí (8,15) pro $i, j = 1, 2, \ldots, n+2$, položíme-li $t_{n+2} = 0$ (je totiž splněna nerovnost (8,18) i nerovnost (8,16), která je splněna vzhledem k existenci simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$). Podle kosinové věty je kosinus úhlu φ_{ij} orientovaných přímek $O_{n+2}O_i$ a $O_{n+2}O_j$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n+1$ (přitom orientace je provedena souhlasně se směrem O_{n+2}, O_i nebo opačně podle toho, je-li $t_i > 0$ nebo $t_i < 0$), roven $\cos\varphi_{ij} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (je $(n+1)\,\alpha > n(\alpha+\beta) > 0$, t. j. $\alpha > 0$), nezávisí tedy na dvojici i, j a existuje neúplná $(n+1)$-hvězda požadované vlastnosti.

Poznámka. Snadno se zjistí, že osa neúplné hvězdy[23]) protíná E_n v bodě $B = \left(\dfrac{1}{t_i}\right)$ v barycentrických souřadnicích vzhledem k $O_1, \ldots, O_{n+1}$. Nadrovina bodem O_{n+2}, k této ose kolmá, protíná E_n v nadrovině (v E_n) o rovnici

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = 0\,. \tag{8,26}$$

Nazveme nyní *pravidelnou $(n+2)$-soustavou v E_n* množinu $n+2$ vlastních bodů v E_n takových, že v E_{n+1}, obsahujícím E_n, existuje pravidelná $(n+2)$-hvězda se středem mimo E_n tak, že body $(n+2)$-soustavy jsou průsečíky přímek této hvězdy s E_n.

---

[23]) Je to orientovaná přímka společným průsečíkem, svírající se všemi přímkami hvězdy týž úhel. Osa existuje právě jedna (může být různě orientována).

Věta 49. *Nutná a postačující podmínka, aby soustava $n + 2$ bodů $O_0, O_1, \ldots, O_{n+1}$ v E_n byla pravidelná, je, aby existovala nenulová čísla $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ tak, že*

$$\sum_{r=0}^{n+1} \frac{1}{t_r} = 0 \tag{8,27}$$

a že

$$\varrho^2(O_r, O_s) = (n + 1)(t_r^2 + t_s^2) + 2t_r t_s \,. \tag{8,28}$$

Důkaz. Nechť předně soustava $n + 2$ vlastních bodů $O_0, \ldots, O_{n+1}$ v E_n je pravidelná. Pak v nějakém E_{n+1}, obsahujícím E_n, existuje bod O_{n+2} (nikoliv v E_n) tak, že (podle pozn.[22]) na str. 202) pro úhly ψ_{ij} orientovaných (v $(n + 2)$-hvězdě) přímek $O_{n+2}O_r$, $O_{n+2}O_s$ je $\cos \psi_{rs} = - \frac{1}{n+1}$. Označíme-li orientované vzdálenosti bodů $O_{n+2}O_r$ čísly $t_r\sqrt{n+1}$, platí podle kosinové věty skutečně (8,28).

Kdyby $\sum_{r=0}^{n+1} \frac{1}{t_r} \neq 0$, pak by podle poznámky[12]) na str. 196 existoval v E_{n+1} simplex $\bar{O}_0, \ldots, \bar{O}_{n+1}$ ve sporu (vzhledem k jednoznačnosti útvaru $O_0, \ldots, O_{n+1}$ až na isometrii) s tím, že body $O_0, \ldots, O_{n+1}$ jsou lineárně závislé a mají stejné vzdálenosti. Odtud plyne (8,27).

Nechť obráceně pro $n + 2$ bodů v E_n platí (8,27) a (8,28). Podle věty 48 existuje v E_{n+1}, obsahujícím E_n, simplex $O_1, O_2, \ldots, O_{n+2}$ tak, že vhodně orientované přímky $O_{n+2}O_i$ svírají navzájem úhel φ, $\cos \varphi = - \frac{1}{n+1}$. Lze tedy osu této neúplné $(n + 1)$-hvězdy orientovat tak, že připojením této osy vznikne v E_{n+1} pravidelná $(n + 2)$-hvězda. Věta bude dokázána, ukážeme-li, že průsečík O_0^* osy s E_n, který má podle poznámky na str. 203 barycentrické souřadnice (vzhledem k $O_1, \ldots, O_{n+1}$) $O_0^* = \left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \ldots, \frac{1}{t_{n+1}}\right)$, splývá s O_0. Snadno se však zjistí, že čtverce vzdáleností bodu O_0^* od O_i jsou vzhledem k (8,27) rovny

$$(n + 1)(t_i^2 + t_{n+2}^2) + 2t_i t_{n+2} \,,$$

takže jsou stejné jako pro bod O_0. Podle pomocné věty ve větě 2 tedy body O_0 a O_0^* splývají.

Vzhledem k poznámce [12]) na str. 196 odtud ihned plyne věta:

Věta 50. *Nutná a postačující podmínka, aby vrcholy simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$ v E_n bylo možno doplnit dalším bodem O_0 v pravidelnou $(n + 2)$-soustavu, je, aby pro simplex platilo* (8,15) *pro* $\alpha = (n + 1)\,\beta$ *a* $t_i \neq 0$, $\sum \frac{1}{t_i} \neq 0$. *Bod O_0 má pak barycentrické souřadnice* $O_0 = \left(\frac{1}{t_i}\right)$.

Pro úplnost vyslovíme zřejmou větu, vyplývající z vět o ortocentrických simplexech:

Věta 51. *Nutná a postačující podmínka, aby simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$ v E_n byl kladně ortocentrický, je, aby platilo* (8,15) *pro* $\beta = 0$ *a* $t_i \neq 0$.

Věta 44 až 51 ukazují, že řadu typů simplexů lze zahrnout do širší třídy simplexů tvaru (8,15) s $t_i \neq 0$. Z jednotlivých vět je patrno, že v nich hraje roli bod $\left(\frac{1}{t_i}\right)$ (tak i ve větě 51 je bod $\left(\frac{1}{t_i}\right)$ totožný s některým z bodů S ve větě 38). Všechny uvedené typy zachytíme touto definicí, v níž předpokládáme $n > 1$.

Bod H simplexu (vlastní nebo nevlastní) se nazývá *hlavním bodem simplexu* (a příslušný simplex *simplexem s hlavním bodem*), jestliže je *buď* $H \neq T$ (T je těžiště simplexu) a platí

a) H neleží na žádné $(n - 1)$-rozměrné stěně simplexu;

b) kvadratická polára Q bodu H vzhledem k simplexu je rotační kolem osy HS, kde S je střed Q (je $S \neq H$ a přímka HS je vlastní[24])), *anebo* $H = T$ a simplex je rovnostranný.[25])

Věta 52. *Nechť* $\sum$ *je simplex s hlavním bodem* $H \neq T$. *Ve svazku kvadrik určeném kvadratickou polárou* Q *bodu* H *vzhledem k* $\sum$ *a dvojnásobnou lineární polárou bodu* H *dle* $\sum$ *existuje právě jedna* $(n - 1)$-*sféra.*[26])

Důkaz. Že v uvedeném svazku kvadrik existuje nejvýše jedna $(n - 1)$-sféra, plyne odtud, že podle poznámky na předchozí straně je lineární polára bodu H vlastní nadrovina, a tedy její čtverec nemůže patřit do svazku $(n - 1)$-sfér. Že existuje alespoň jedna $(n - 1)$-sféra, vzhledem k $n > 1$ vyplývá takto: každá kvadrika uvedeného svazku kvadrik je rotační kolem osy HS, kde S je střed kvadratické poláry, neboť i lineární polára bodu H má tuto vlastnost. Protože však v rovině platí, že k regulární kuželosečce a vlastní přímce, kolmé k ose této kuželosečky, existuje alespoň jedna 1-sféra (reálná, bodová nebo formálně reálná kružnice) ve svazku určeném touto kuželosečkou a dvojnásobnou přímkou, platí i naše věta.

Definice. Je-li Σ simplex s hlavním bodem $H \neq T$, pak $(n - 1)$-sféru z věty 52 budeme nazývat *hlavní* $(n - 1)$-*sférou*, polární nadrovinu bodu H vzhledem k simplexu (čili vzhledem k této hlavní $(n - 1)$-sféře) *hlavní nadrovinou* sim-

---

[24]) Kdyby $S = H$, pak by pro $H = (h_i)$ v barycentrických souřadnicích $Q \equiv \left(\sum_i \frac{x_i}{h_i}\right)^2 - \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} = 0$ byla polára bodu H dle Q o rovnici $\sum_i \frac{x_i}{h_i} = 0$ nevlastní nadrovina a $H = T$. Je-li bod H nevlastní, pak střed kvadriky Q je bod $S = (h_i^2)$ a je tedy vlastní.

[25]) Vylučujeme tedy případ, kdy $H = T$, kvadratická polára je rotační, ale simplex není rovnostranný.

[26]) V širším slova smyslu, t. j. reálná, bodová nebo formálně reálná.

plexu, osu rotace kvadratické poláry bodu H *hlavní osou*. Dále nazveme hlavní bod *hlavním bodem typu* μ, platí-li, že dvojpoměr

$$(P, Q, L^2, K) = -\mu\,, \tag{8,29}$$

kde L je lineární polára bodu H dle simplexu, Q kvadratická polára, P polární kvadrika dle simplexu[27]) ve svazku určeném Q a L^2 a K hlavní $(n - 1)$-sféra. Je-li pro simplex s hlavním bodem $H = T$ (t. j. simplex je rovnostranný), pak typem μ označíme libovolné číslo $\mu \neq -1$.[28]) Dále hlavní $(n - 1)$-sféru K k bodu H a typu μ definujeme vztahem (8,29).

Poznámka. Slovo „hlavní" v definicích má ten smysl, že útvar patří k příslušnému hlavnímu bodu. Nebudeme se zde zabývat otázkou, zda simplex může mít několik hlavních bodů (to se ostatně může stát). Je-li však dán hlavní bod, potom všechny ostatní hlavní útvary i typ už jsou jednoznačně stanoveny (kromě případu $H = T$).

Věta 53. *Nerovnostranný simplex v* E_n *má hlavní bod typu* μ *tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla* $t_1, \ldots, t_{n+1}, \alpha, \beta$ $(t_i \neq 0$ *pro* $i = 1, \ldots, n + 1)$ *tak, že pro čtverce délek hran simplexu platí* $(i \neq j)$

$$e_{ij} = \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta t_i t_j\,, \tag{8,15'}$$

kde

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta}\,. \text{ [29])} \tag{8,30}$$

Důkaz. Nechť předně v simplexu existuje hlavní bod $H = (h_i)$ (v barycentrických souřadnicích) typu μ. Potom v (8,29) je $(h_i \neq 0)$

$$L \equiv \sum_i \frac{x_i}{h_i} = 0\,, \quad P \equiv \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} = 0\,, \quad Q \equiv \left(\sum_i \frac{x_i}{h_i}\right)^2 - \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} = 0\,,$$

tedy $L^2 = P + Q$.

Kvadrika $K \equiv \bar{\alpha}P - \bar{\beta}Q = 0$ má dvojpoměr

$$(P, Q, L^2, K) = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\,, \tag{8,31}$$

takže podle (8,29) pro $\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \mu$ platí, že

$$K \equiv (\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} - \bar{\beta}\left(\sum_i \frac{x_i}{h_i}\right)^2 = 0$$

je rovnicí regulární $(n - 1)$-sféry. Podle věty 14 a poznámky II za větou 15 má tedy K tvar

[27]) Je-li opět $H = (h_i)$, pak $P \equiv \sum_i \left(\dfrac{x_i}{h_i}\right)^2 = 0$.

[28]) Připouštíme i $\mu = \infty$.

[29]) Této rovnici v širším smyslu vyhovují $\beta = 0$, $\mu = \infty$.

$$\alpha_0(exx) - 2\sum_i \alpha_i x_i \sum x_i = 0 \quad \text{čili} \quad (\alpha_0 \neq 0)$$

$$(exx) = \frac{2}{\alpha_0} \sum_i \alpha_i x_i \sum x_i + \frac{1}{\alpha_0} (\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} - \frac{\bar{\beta}}{\alpha_0} \left(\sum_i \frac{x_i}{h_i}\right)^2 .$$

Odtud ($e_{ii} = 0$) $2\alpha_i = -\dfrac{\bar{\alpha}}{h_i^2}$, takže

$$e_{ij} = -\frac{\bar{\alpha}}{2\alpha_0}\left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_j^2}\right) - \frac{2\bar{\beta}}{2\alpha_0} \cdot \frac{1}{h_i h_j} .$$

Položíme-li $h_i = \dfrac{1}{t_i}$, $-\dfrac{\bar{\alpha}}{2\alpha_0} = \alpha$, $-\dfrac{\bar{\beta}}{2\alpha_0} = \beta$, pak skutečně platí (8,15′) i (8,30).

Nechť obráceně platí (8,15′). Potom

$$(exx) \equiv 2\alpha \sum_i t_i^2 x_i \sum x_i + 2\beta(\sum_i t_i x_i)^2 - 2(\alpha + \beta)\sum_i t_i^2 x_i^2 ,$$

takže podle věty 14 je

$$K \equiv (\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2 - \beta(\sum_i t_i x_i)^2 = 0 \tag{8,32}$$

rovnice (n — 1)-sféry. To znamená, že každá kvadrika svazku $\sigma K + \tau L^2 = 0$, kde $L \equiv \Sigma t_i x_i = 0$, je buď ($n$ — 1)-sféra, je-li L nevlastní nadrovina, anebo rotační s osou rotace r procházející středem (n — 1)-sféry K a kolmou k L, je-li L vlastní nadrovina. V prvním případě je simplex rovnostranný s hlavním bodem T, který je každého typu $\mu \neq -1$. V druhém případě je bod $H = \left(\dfrac{1}{t_i}\right)$ buď středem K pro $\alpha = n\beta$ (a pak ovšem H leží na r), nebo pro $\alpha \neq n\beta$ polára bodu H dle K je L, což opět znamená, že H leží na r. Je tedy bod H hlavním bodem simplexu, a to typu μ podle (8,30) a (8,31) pro $h_i = \dfrac{1}{t_i}$.

Z této věty ihned plyne věta:

Věta 54. *Vlastnost simplexu mít hlavní bod typu μ je dědičná, t. j., má-li simplex v E_n, $n > 2$, hlavní bod typu μ, pak každá jeho m-rozměrná stěna, $1 < m < n$, má hlavní bod typu μ* (dokonce takový hlavní bod, který vznikne promítnutím hlavního bodu simplexu do této stěny z protějšího vrcholového prostoru).

Věta 55. *Nechť m je přirozené číslo, $m \leq n - 1$. Pro každý simplex s hlavním bodem typu m existuje (n — 1)-koule, dotýkající se všech m-rozměrných stěn simplexu. Přitom lineární prostory, spojující dotykový bod v takové stěně[30]) s protějším vrcholovým prostorem, procházejí jedním bodem. Tato vlastnost je charakteristická pro simplexy s hlavním bodem typu m, $m = 1, \ldots, n - 1$.*

Důkaz. Nechť $H = \left(\dfrac{1}{t_i}\right)$ je hlavní bod typu m. Z věty 53 plyne, že (8,32) pro $\alpha = m\beta$ je rovnice (n — 1)-sféry

[30]) Tento bod je pro $m > 1$ hlavním bodem (typu m) v té stěně a je tedy Torricelliho bodem této stěny (viz též pozn. [13])).

$$(m+1)\sum_i t_i^2 x_i^2 - (\sum_i t_i x_i)^2 = 0\,. \qquad (8{,}32')$$

Ostatní plyne úplně analogicky jako v důkazu věty 24.

Věta 56. *Nechť $\sum$ je simplex v E_n, $n > 2$, s hlavním bodem H typu μ s osou rotace r. Pak existuje kladně ortocentrický simplex $\sum_0$, jehož dilatací*[31]) *ve směru osy r vznikne simplex $\sum$.*

Důkaz. Označme P_i, $i = 1, 2, \dots, n+1$, paty kolmic spuštěných s vrcholů O_i simplexu $\sum$ na r. Je-li koeficient dilatace $k > 0$, pak dilatací dostaneme ze $\sum$ opět simplex $\sum^*$ s vrcholy $O_1^*, \dots, O_{n+1}^*$, pro jehož čtverce délek hran e_{ij}^* platí podle Pythagorovy věty

$$e_{ij}^* = e_{ij} - \varrho^2(P_i, P_j) + k^2\varrho^2(P_i, P_j)$$

čili

$$e_{ij}^* = e_{ij} + (k^2 - 1)\,\varrho^2(P_i, P_j)\,. \qquad (8{,}33)$$

Jestliže hlavní bod H splývá s těžištěm simplexu T, je simplex rovnostranný a takový simplex $\sum_0$ existuje pro $k = 1$. Nechť tedy dále $H \neq T$. Potom bod $M = \left(\frac{1}{t_i^2}\right)$ je různý od H a je středem kvadriky P z (8,29). Leží tedy M rovněž na ose r. Bod P_k najdeme jako průsečík přímky HM s nadrovinou $\sum_i t_i x_i - t_k \sum x_i = 0$, která prochází bodem O_k kolmo k HM. Je-li $P_k = (\overset{k}{p}_i)$, platí

$$\overset{k}{p}_i = \frac{n+1}{t_i^2} - \frac{1}{t_i}\sum_j \frac{1}{t_j} + t_k\left(\frac{1}{t_i}\sum_j \frac{1}{t_j^2} - \frac{1}{t_i^2}\sum_j \frac{1}{t_j}\right),$$

takže

$$\sum_i \overset{k}{p}_i = (n+1)\sum_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 = \sum_{i,j}\left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)^2 = V > 0$$

vzhledem k $H \neq T$. Čtverec vzdálenosti P_k, P_l je tedy podle (2,9) roven

$$\varrho^2(P_k, P_l) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} e_{ij}\left(\frac{\overset{k}{p}_i}{\sum_m \overset{k}{p}_m} - \frac{\overset{l}{p}_i}{\sum_m \overset{l}{p}_m}\right)\left(\frac{\overset{k}{p}_j}{\sum_m \overset{k}{p}_m} - \frac{\overset{l}{p}_j}{\sum_m \overset{l}{p}_m}\right) = -\frac{W}{2V^2}(t_k - t_l)^2\,,$$

kde

$$W = \sum_{i,j} e_{ij} z_i z_j\,, \quad z_i = \frac{1}{t_i}\sum_j \frac{1}{t_j^2} - \frac{1}{t_i^2}\sum_j \frac{1}{t_j}\,.$$

Je-li e_{ij} dáno vztahem (8,15), pak po snadném výpočtu

$$(ezz) = -2V\left[\beta\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 + (\alpha - n\beta)\sum_i \frac{1}{t_i^2}\right],$$

[31]) Dilatací ve směru r s koeficientem $k > 0$ rozumíme transformaci v E_n, která zachovává všechny body nějaké nadroviny ν, kolmé k r, zatím co ostatním vlastním bodům X, X non $\in \nu$, přiřazuje body X' tak, že X' leží jednak na přímce bodem X, rovnoběžné s r, jednak v témže poloprostoru dle ν jako X, avšak vzdálenost bodu X' od ν je k-násobek vzdálenosti X od ν.

takže celkem

$$\varrho^2(P_k, P_l) = c(t_k - t_l)^2\,, \tag{8,34}$$

kde

$$c = \frac{\beta\left(\sum\limits_i \frac{1}{t_i}\right)^2 + (\alpha - n\beta)\sum\limits_i \frac{1}{t_i^2}}{(n+1)\sum\limits_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum\limits_i \frac{1}{t_i}\right)^2}\,. \tag{8,35}$$

Je tedy

$$e_{ij}^* = [\alpha + c(k^2 - 1)](t_i^2 + t_j^2) + 2[\beta - c(k^2 - 1)]\,t_it_j\,, \tag{8,36}$$

t. j.

$$e_{ij}^* = \alpha^*(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta^* t_it_j\,. \tag{8,15*}$$

Protože $c > 0$ podle (8,17) a $c > -\beta$ $\left(\text{neboť z (8,35) } c + \beta = \frac{\alpha + \beta}{V}\sum\limits_i \frac{1}{t_i^2} > 0\right)$, lze najít $k > 0$ tak, aby $\beta^* = 0$. Tím je věta 56 dokázána. Zároveň je dokázána věta:

Věta 57. *Dilatací simplexu s hlavním bodem různým od těžiště ve směru hlavní osy se dostane opět simplex s hlavním bodem, který má stejné barycentrické souřadnice jako hlavní bod původního simplexu, ale případně jiný typ. Každý simplex s hlavním bodem lze utvořit dilatací z kladně ortocentrického simplexu ve směru jeho hlavní osy, procházející průsečíkem výšek a některým z bodů S z věty 24.*

Z věty 56 a 57 plynou dva důsledky:

Věta 58. *Je-li $\sum$ simplex s hlavním bodem, různým od těžiště, pak všechny výšky simplexu protínají hlavní osu.*

Důkaz. Vznikne-li totiž $\sum$ dilatací z kladně ortocentrického simplexu $\sum_0$ ve směru hlavní osy, pak výšky ortocentrického simplexu procházejí bodem na hlavní ose (neboť hlavní osa je společná všem takto vzniklým simplexům). Dilatací však každá výška zůstane v rovině, určené hlavní osou a příslušným vrcholem, takže všechny výšky protínají hlavní osu.

Věta 59. *Střed opsané $(n - 1)$-koule simplexu s hlavním bodem $H \neq T$ leží v (každé) rovině, která obsahuje hlavní osu simplexu a těžiště simplexu.*

Důkaz. Poněvadž opsaná $(n - 1)$-koule simplexu s hlavním bodem patří síti (případně degenerované), která obsahuje kvadriky P, Q a kvadriku, která odpovídá $(n - 1)$-kouli opsané ortocentrickému simplexu $\sum_0$, jehož dilatací daný simplex vznikne, leží střed této $(n - 1)$-koule v rovině (příp. přímce) středů všech kvadrik uvedené sítě. Tato rovina obsahuje osu rotace, kde leží střed Q a P, a také těžiště simplexu: střed $(n - 1)$-koule opsané $\sum_0$ leží totiž na spojnici průsečíku výšek $\sum_0$ a těžiště $\sum_0$, při dilataci však těžiště zůstane na přímce rovnoběžné s hlavní osou. Tím je věta dokázána.

Podáme teď tuto definici, kterou se zobecňuje pojem úhlu (orientovaných) $(n - 1)$-koulí:

Nechť K_1, K_2 jsou orientované regulární $(n-1)$-sféry[32]) o čtvercích poloměrů e_1, e_2 (v širším slova smyslu, t. j. připouštíme i e_k záporná), které jsou téhož druhu, t. j. $e_1e_2 > 0$. Nazveme *charakteristikou* té dvojice číslo

$$\chi(K_1, K_2) = \frac{e_{12} - e_1 - e_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{e_1e_2}}\,\varepsilon\,, \tag{8,36}$$

kde e_{12} je čtverec vzdálenosti obou středů, $\varepsilon_i = \pm 1$ je znaménko orientace K_i a $\varepsilon = \operatorname{sign} e_1 = \operatorname{sign} e_2$ je $+1$ pro K_i reálné, -1 pro K_i formálně reálné.

Pomocná věta. *Ve sférických barycentrických souřadnicích z odst.* 5 *je* (při označení jako v tomto odst.) *pro* $K_1 = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, $K_2 = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ *a znaménka orientací* $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \alpha_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \beta_0$ $(\alpha_0\beta_0 \neq 0)$, $\varepsilon_0 = \pm 1$

$$\chi(K_1, K_2) = \frac{-\eta(g\alpha\beta)}{\sqrt{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}}\,, \tag{8,37}$$

kde $\eta = \operatorname{sign}(g\alpha\alpha) = \operatorname{sign}(g\beta\beta)$.

Důkaz. Pomocí vzorců (5,4) a (2,15) se zjistí, že $(\alpha_0\beta_0 \neq 0)$

$$e_{12} = -\frac{1}{2\Delta}\left[\frac{(g\alpha\alpha)}{\alpha_0^2} - 2\frac{(g\alpha\beta)}{\alpha_0\beta_0} + \frac{(g\beta\beta)}{\beta_0^2}\right], \tag{8,38}$$

$e_1 = -\dfrac{(g\alpha\alpha)}{2\Delta\alpha_0^2}$, $e_2 = -\dfrac{(g\beta\beta)}{2\Delta\beta_0^2}$. Je tedy $(g\alpha\alpha)(g\beta\beta) > 0$, $\eta = -\varepsilon \operatorname{sign} \Delta$ a

$$\chi(K_1, K_2) = \frac{-\eta(g\alpha\beta) \operatorname{sign} \alpha_0 \operatorname{sign} \beta_0}{\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}}\,,$$

takže pro $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \alpha_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \beta_0$ (což pro $\varepsilon_0 = \pm 1$ zachycuje obě možnosti společné orientace) platí (8,37).

Poznámka. Mají-li K_1, K_2 společný bod, pak jejich charakteristika je kosinus úhlu obou (orientovaných) $(n-1)$-koulí.

Věta 60. *Nechť K_1, K_2 jsou orientované regulární $(n-1)$-sféry téhož druhu v E_n a nechť K je regulární $(n-1)$-sféra. Označíme-li K_1^* resp. K_2^* orientované $(n-1)$-sféry, vzniklé inversí*[33]) *K_1 resp. K_2 vzhledem ke K, pak jestliže K_1^* i K_2^* jsou opět regulární $(n-1)$-sféry, jsou obě téhož druhu a charakteristiky obou dvojic K_1, K_2 a K_1^*, K_2^* jsou si rovny:*

$$\chi(K_1, K_2) = \chi(K_1^*, K_2^*)\,. \tag{8,39}$$

Důkaz. Bez důkazu uvedeme, že je-li $K_1 = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, $K = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$, pak $K^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_{n+1}^*)$, kde $\alpha_r^* = (-1)^{n+1}[(g\omega\omega)\,\alpha_r - 2(g\alpha\omega)\,\omega_r]$. Z tohoto faktu plyne ihned, že $(g\alpha^*\alpha^*) = (g\omega\omega)^2(g\alpha\alpha)$, $(g\alpha^*\beta^*) = (g\omega\omega)^2(g\alpha\beta)$ atd., takže zřejmě obě $(n-1)$-sféry K_1^*, K_2^* jsou téhož druhu $((g\alpha\alpha)(g\beta\beta) > 0)$ a podle (8,37) platí (8,39).

[32]) To jsou, stručně řečeno, $(n-1)$-sféry opatřené znaménkem $+$ nebo $-$.

[33]) Inverse vzhledem k regulární $(n-1)$-sféře o čtverci poloměru e (v širším smyslu) a středu S je příbuznost, která bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že X i X' leží v přímce bodem S a orientované vzdálenosti SX, SX' vyhovují vztahu $GX \,.\, SX' = e$.

Zavedeme ještě tento pojem:

Soustava $n + 1$ orientovaných regulárních $(n - 1)$-sfér $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}$ v E_n vesměs téhož druhu se nazývá *pravidelná $(n + 1)$-soustava $(n - 1)$-sfér*, jestliže charakteristiky

$$\chi(K_i, K_j) = c \neq -1$$

pro $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n + 1$. Číslo $\mu = \dfrac{1}{c}$ se nazývá *typem* té soustavy (připouštíme i typ ∞).

Platí teď věta:

Věta 61. *Jsou-li středy $(n - 1)$-sfér pravidelné $(n + 1)$-soustavy typu μ v E_n lineárně nezávislé, pak simplex s těmito vrcholy je simplex s hlavním bodem typu μ. Obráceně ke každému simplexu s hlavním bodem typu μ, $\mu \neq 0$, existuje pravidelná $(n + 1)$-soustava $(n - 1)$-sfér typu μ se středy ve vrcholech simplexu.*

Důkaz. Předpokládejme předně, že je dána pravidelná $(n + 1)$-soustava $(n - 1)$-sfér $K_i = (\overset{i}{\alpha}_0, \overset{i}{\alpha}_1, \ldots, \overset{i}{\alpha}_{n+1})$, $i = 1, \ldots, n + 1$, takže $\overset{i}{\alpha}_0 \neq 0$, $\eta(g\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\alpha}) > 0$ pro pevné $\eta = \pm 1$,

$$\chi(K_i, K_j) = \frac{1}{\mu}, \tag{8,40}$$

a přitom středy O_i $(n - 1)$-sfér K_i jsou lineárně nezávislé. Podle (8,38) tedy s použitím (8,37) platí

$$\varrho^2(O_i, O_j) = e_{ij} = -\frac{1}{2\Delta}\left[\frac{(g\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\alpha})}{\overset{i}{\alpha}{}_0^2} + 2\frac{\sqrt{(g\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\alpha})(g\overset{j}{\alpha}\overset{j}{\alpha})}}{\eta\mu\overset{i}{\alpha}_0\overset{i}{\alpha}_0} + \frac{(g\overset{j}{\alpha}\overset{j}{\alpha})}{\overset{j}{\alpha}{}_0^2}\right] =$$
$$= \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta t_i t_j$$

pro

$$\alpha = -\frac{1}{2\Delta\eta}, \quad \beta = -\frac{1}{2\Delta\eta}, \quad t_i = \frac{\sqrt{\eta(g\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\alpha})}}{\overset{i}{\alpha}_0}.$$

Je tedy $\mu = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $t_i \neq 0$, a podle věty 52 je simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$ simplex s hlavním bodem typu μ; přitom $\mu \neq 0$.

Jestliže obráceně jsou body $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ vrcholy simplexu s hlavním bodem typu $\mu \neq 0$, pak platí (8,15) a $t_i \neq 0$. Označme $e_i = \alpha t_i^2$ a definujme orientované $(n - 1)$-sféry K_i vždy středem O_i, čtvercem poloměru (v širším smyslu) e_i a znamením $\varepsilon_i = \operatorname{sign} t_i$. Potom charakteristika dvojice K_i, K_j je podle (8,36) (je $\alpha \neq 0$)

$$\chi(K_i, K_j) = \frac{2\beta t_i t_j \varepsilon}{2\varepsilon_i\varepsilon_j|\alpha||t_i||t_j|} = \frac{\beta}{|\alpha|}\,\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\mu},$$

neboť K_i je reálné pro $\alpha > 0$, imaginární pro $\alpha < 0$. Je tedy $K_1, \ldots, K_{n+1}$ pravidelná $(n + 1)$-soustava $(n - 1)$-sfér typu μ, vyhovující větě.

Jak snadno plyne z věty 60, dostaneme z pravidelné $(n+1)$-soustavy $(n-1)$-sfér typu μ inversí dle regulární $(n-1)$-sféry (za předpokladu, že žádná transformovaná $(n-1)$-sféra nebude planární) opět pravidelnou $(n+1)$-soustavu typu μ. Poněvadž jedna taková pravidelná soustava typu μ se dostane, zvolíme-li za středy $(n-1)$-sfér vrcholy rovnostranného simplexu a jejich poloměry stejné (vhodně volené), máme tím možnost pomocí věty 61 studovat různé simplexy s hlavním bodem jednoho typu μ, obdobně jako věta 57 dává možnost studovat simplexy různých typů, avšak s hlavními body o stejných barycentrických souřadnicích.

Poznámka. Jako doplněk k větě 61 lze bez obtíží ukázat, že vrcholy simplexu s hlavním bodem typu 0 vzniknou inversí z vrcholů rovnostranného simplexu.

Věta 62. *Nechť $\sum$ je simplex v E_n s hlavním bodem H typu $\mu \neq n$ a nechť střed hlavní $(n-1)$-sféry K neleží na žádné stěně simplexu. Pak polární nadroviny vrcholů simplexu $\sum$ vzhledem ke K tvoří $(n-1)$-rozměrné stěny simplexu $\sum^*$, který má týž hlavní bod H typu*

$$\mu^* = n - \mu - 1 \tag{8,40}$$

(tedy $\mu^* \neq n$) *a touž hlavní $(n-1)$-sféru K.*

Poznámka. Protože stejným postupem dostaneme ze $\sum^*$ opět $\sum$, nazveme takové simplexy sdružené.

Důkaz věty 62. Je pro $H = \left(\frac{1}{t_i}\right)$, $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$

$$K \equiv (\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2 - \beta(\sum_i t_i x_i)^2 = 0 ,$$

střed K je bod $S = (s_k)$,

$$s_k = (\alpha - n\beta) \frac{1}{t_k} + \beta \sum_i \frac{1}{t_i} , \tag{8,41}$$

neboť jeho polára dle K je $\sum x_i = 0$.

Polární nadrovina bodu O_k je

$$\overline{\omega}_k \equiv (\alpha + \beta)\, t_k x_k - \beta \sum t_i x_i = 0 .$$

Protože $\mu \neq n$, je K regulární a $\overline{\omega}_k$ lineárně nezávislé. Podle předpokladu neleží S na žádné stěně $\sum$, takže póly těchto stěn jsou vesměs vlastní body a tvoří tedy vrcholy simplexu $\sum^*$. Vyjádříme barycentrické souřadnice x_k^* v $\sum^*$ pomocí barycentrických souřadnic v $\sum$. Je pro $\varrho_k \neq 0$

$$\varrho_k x_k^* = (\alpha + \beta)\, t_k x_k - \beta \sum_i t_i x_i ,$$

a přitom $\sum x_k^* \equiv \lambda \sum x_k$. Odtud vzhledem k (8,41) $\varrho_k s_k = c \neq 0$,

$$x_k^* = s_k((\alpha + \beta)\, t_k x_k - \beta \sum_i t_i x_i) . \tag{8,42}$$

Bod H má v nových souřadnicích tvar $H = (s_k)$; jeho kvadratická polára dle $\sum^*$ je

$$\left(\sum_k \frac{x_k^*}{s_k}\right)^2 - \sum_k \left(\frac{x_k^*}{s_k}\right)^2 = 0\,.$$

V původních souřadnicích je její rovnice podle (8,42) tvaru

$$\lambda(\sum_k t_k x_k)^2 + \sigma \sum_k t_k^2 x_k^2 = 0\,,$$

je to tedy rotační kvadrika a H je hlavní bod $\sum^*$. Je-li jeho typ μ^*, $\alpha^* = \mu^*\beta^*$, pak

$$(\alpha^* + \beta^*) \sum_k \left(\frac{x_k^*}{s_k}\right)^2 - \beta^* \left(\sum_k \frac{x_k^*}{s_k}\right) = 0$$

je $(n - 1)$-sféra. To však nastane, jak se snadno zjistí dosazením z (8,42), pro

$$\alpha^* = (n - 1)\,\beta - \alpha\,, \quad \beta^* = \beta\,,$$

kdy dostáváme právě K. Je tedy $\mu^* = n - \mu - 1$, t. j. platí (8,40) a věta je dokázána ($\mu \neq -1$, takže $\mu^* \neq n$).

Z této věty plynou důsledky pro simplexy různých druhů z vět 45—51, které již nebudeme formulovat. Závěrem dokážeme tuto větu:

Věta 63. *Je-li hlavní bod H simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$ v E_n vlastní, pak má tuto vlastnost: Označme Q_i, $i = 1, \ldots, n + 1$, průsečíky (vlastní nebo nevlastní) lineární poláry L bodu H dle simplexu s přímkami HO_i. Potom existuje na kolmici z H k L vlastní bod R (neexistuje-li kolmice, pak $R = H$), z něhož se body Q_i promítají pravidelnou $(n + 1)$-hvězdou (jsou-li tedy všechny Q_i vlastní, tvoří Q_i pravidelnou $(n + 1)$-soustavu v L).*

Důkaz. Je-li $H = T$, věta platí pro $R = H$. Je-li $H \neq T$, pak nejprve ukážeme, že v soustavě simplexů, které vzniknou dilatací daného simplexu ve směru osy, existuje simplex typu n: znamená to dokázat, že v (8,36) existuje k tak, že $\alpha + c(k^2 - 1) = n(\beta + c(k^2 - 1))$, kde c je definováno v (8,35) a $H = \left(\frac{1}{t_i}\right)$. Uvedená rovnice však skutečně platí pro

$$k^2 = \frac{(\alpha + \beta)\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2}{(n + 1)\left[\beta\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 + (\alpha - n\beta)\sum_i \frac{1}{t_i^2}\right]}$$

(pravá strana je vzhledem k (8,16), (8,17) a $\sum \frac{1}{t_i} \neq 0$ skutečně kladná).

Poznámka. Lze bez obtíží ukázat, že uvedená vlastnost je charakteristická pro vlastní hlavní bod.

Simplexy s hlavním bodem mají řadu dalších vlastností, a to jednak pro specialisovaná μ resp. t_i, jednak v rámci vlastností soustav $n + 2$ bodů v E_n, z nichž každých $n + 1$ tvoří simplex s hlavním bodem (tyto soustavy existují pro každé μ, $-1 < \mu \leqq n$). Studium těchto soustav však přesahuje rámec geometrie simplexu.

9. Závěr. Tato práce byla pojata trochu šíře, aby byl získán materiál, o který se může zájemce o studium geometrie simplexů opřít. Z neřešených problémů zde stojí za zmínku zobecnění Brocardových útvarů pro simplex. Rovněž kvalitativní stránka geometrie simplexu (t. j. studium nejen rovností, ale i nerovností) zasluhuje pozornosti.

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský:* Základy teorie determinantů a matic a jich užití, Praha 1930.

[2] *E. Čech:* Základy analytické geometrie, I, II, Praha 1951, 1952.

[3] *E. Egerváry:* On orthocentric simplexes, Acta Math. Szeged. IX (1950), 218—226.

[4] Enciclopedia d. matematiche elementari, II. 1, Milano 1937.

[5] *I. M. Gelfand:* Lineární algebra, Praha 1953.

[6] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[7] *P. H. Schoute:* Mehrdimensionale geometrie I, Leipzig 1902.

Резюме

ГЕОМЕТРИЯ СИМПЛЕКСА В E_n, III

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Прага.
(Поступило в редакцию 21/IV 1955 г.)

В этой третьей, завершающей части работы, первая часть которой была опубликована в настоящем журнале *79* (1954), 270—297, а вторая часть также в настоящем журнале *80* (1955), 462—476, автор исследует специальные виды симплексов.

Прежде всего рассматривается прямоугольный n-симплекс определенного типа, $(n - 1)$-мерные грани которого можно занумеровать номерами $1, 2, \ldots, n + 1$ так, что как раз внутренние углы φ_{12} (между гранями 1 и 2), $\varphi_{23}, \varphi_{34}, \ldots, \varphi_{n,n+1}$ являются острыми, все же остальные внутренние углы между этими гранями — прямые.

В теореме 32 доказывается, что *необходимым и достаточным условием для того, чтобы n-симплекс был прямоугольным симплексом этого типа, является существование отличных друг от друга чисел* $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ *таких, что квадраты длин ребер* e_{ij} *удовлетворяют соотношениям*

$$e_{ij} = |c_i - c_j| \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)\ .$$

Отсюда непосредственно следует (теорема 33), что *каждая m-мерная грань* ($1 < m \leqq n - 1$) *является в свою очередь прямоугольным симплексом этого типа*. В частности каждая двумерная грань будет прямоугольным треугольником. Справедливо, однако, и обратное урверждение (теорема 34): *n-симплекс, каждая двумерная грань которого является прямоугольным треугольником, представляет собой прямоугольный симплекс рассматриваемого типа.*

В теореме 35 доказываются еще два свойства прямоугольного n-симплекса этого типа:

1. *Центр описанного* ($n - 1$)*-шара лежит в центре единственного самого длинного ребра*;

2. *в E_n, содержащем этот n-симплекс, существует прямоугольный параллелепипед, среди вершин которого встречаются все вершины n-симплекса.*

В дальнейших теоремах 36—39 исследуются некоторые свойства ортоцентрических симплексов и ортоцентрических систем $n + 2$ точек в E_n (т. е. $n + 1$ вершин ортоцентрического n-симплекса и точки пересечения его высот).

Прежде всего для сжатости изложения вводится понятие *равносторонней n-гиперболы*, как рациональной алгебраической кривой n-й степени в E_n, имеющей n взаимно перпендикулярных асимптотических направлений. Две такие n-гиперболы в E_n называются для краткости *независимыми*, если обе системы их n асимптотических направлений *независимы* в следующем смысле: ни в одном k-мерном (несобственном) линейном пространстве ($0 \leqq k \leqq n - 1$), определенном $k + 1$ асимптотическими направлениями одной n-гиперболы, не лежит больше чем k асимптотических направлений другой.

Если теперь (теорема 36) *система $n + 2$ точек в E_n обладает тем свойством, что существуют две независимые равносторонние n-гиперболы, проходящие обе через все точки системы, то эта система является ортоцентрической. Всякая рациональная алгебраическая кривая n-й степени, проходящая через $n + 2$ точки ортоцентрической системы в E_n, является равносторонней n-гиперболой.*

Доказательство теоремы основывается на вспомогательной теореме, утверждающей, что *для двух независимых* (в указанном выше смысле) *систем, состоящих из n линейно независимых точек каждая, в проективном* ($n - 1$)*-мерном пространстве существует не более одной регулярной гиперквадрики, по отношению к которой обе системы являются автополярными.*

Далее (теорема 37), *для ортоцентрического n-симплекса, точка пересечения высот которого не лежит ни в одной из гиперплоскостей симметрии ребер, существует точно одна равносторонняя n-гипербола, проходящая* *через вершины и через центр тяжести. Эта равносторонняя n-гипербола*, являющаяся обобщением известной гиперболы Киперта для треугольника, *имеет асимптотические направления, тождественные с направлениями осей гиперэллипсоидов Штейнера* (эти оси определяются однозначно) *и содержит основания всех нормалей, опущенных из точки пересечения высот симплекса на произвольную регулярную гиперквадрику из штейнеровской системы гиперквадрик* (это связка гиперквадрик, содержащая описанный гиперэллипсоид Штейнера и двойную несобственную гиперплоскость).

В следующей теореме 38 сформулировано одно характерное свойство ортоцентрических симплексов, для которых точка пересечения высот является внутренней точкой (т. наз. *положительно ортоцентрических симплексов*). *Симплекс является положительно ортоцентрическим тогда и только тогда, если существует такая внутренняя его точка P, что для каждой самосопряженной точки S (поскольку она отлична от P) того взаимно-обратного преобразования по отношению к симплексу* (т. е. преобразования, имеющего в барицентрических координатах вид $x_i' = \frac{c_i}{x_i}$ для действительных $c_i \neq 0$), *при котором центр тяжести и точка P соответствуют друг другу, справедливо утверждение, что прямая PS перпендикулярна к гармонической поляре точки S относительно симплекса. P будет тогда точкой пересечения высот симплекса.*

Другой *характерной* особенностью ортоцентрических n-симплексов (теорема 39) является то, что *для внутренних углов φ_{ij} $(n - 1)$-мерных граней существуют действительные числа c_i так, что*

$$\cos \varphi_{ij} = c_i c_j \quad \text{для} \quad i \neq j \,.$$

В теореме 40 показано, что *характерным свойством т. наз. равногранних n-симплексов, у которых объёмы всех $(n - 1)$-мерных граней одинаковы, является то, что совпадают две* (а тогда и все три) *из следующих трех точек: центр тяжести, центр вписанного $(n - 1)$-шара и точка Лемуана. Для того, чтобы в n-симплексе центр тяжести совпадал с центром описанного $(n - 1)$-шара, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов длин ребер, выходящих из одной вершины, была для всех вершин одна и та же* (теорема 41).

В теореме 42 показано, что *для любого $n > 2$ существуют неравносторонние n-симплексы с одной единственной замечательной точкой* (центром тяжести).

В дальнейших теоремах исследуется другой класс симплексов, а именно тех, для которых существуют действительные числа α, β и ненулевые действительные числа $t_1, \ldots, t_{n+1}$ так, что квадраты длин ребер e_{ij} n-симплекса можно выразить в виде

$$e_{ij} = \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2t_i t_j\,, \quad i \neq j\,. \tag{*}$$

В этот класс симплексов можно при специальном выборе отношения $\alpha : \beta$ включить ряд типов симплексов, имеющих определенное простое свойство, получающееся путем обобщения какого-либо свойства треугольника.

Итак (теорема 44) *для того, чтобы для n-симплекса с вершинами $O_1, \ldots, \ldots, O_{n+1}$ существовала точка $P \neq O_i$ так, что все углы между (неориентированными) прямыми PO_i, PO_j для $i \neq j$ равны между собой (таким образом P является обобщенной точкой Торричелли в треугольнике), необходимо и достаточно, чтобы симплекс был типа* (*) *для $\alpha = n\beta$.*

Для того, чтобы (теорема 45) *точки касания $P_1, \ldots, P_{n+1}$ $(n - 1)$-шара, вписанного (в более широком смысле слова) в n-симплекс с вершинами $O_1, \ldots, \ldots, O_{n+1}$ (P_i лежат в грани, противолежащей O_i), обладали тем свойством, что прямые O_iP_i проходят через одну и ту же точку Q, необходимо и достаточно, чтобы n-симплекс был типа* (*) *для $\alpha = (n - 1)\,\beta$. Точка Q является таким образом обобщенной точкой Жергонна в треугольнике.*

В теореме 46, далее, показано, что *необходимое и достаточное условие для того, чтобы для n-симплекса существовал $(n - 1)$-шар, касающийся всех его* (если нужно, продолженных) *ребер, имеет вид: n-симплекс принадлежит типу* (*) *для $\alpha = \beta$. Тогда существует точка R* (другое обобщение жергонновой точки треугольника), *которая лежит во всех гиперплоскостях, соединяющих точки касания $(n - 1)$-шара в каком-либо ребре с $(n - 2)$-мерной гранью, противолежащей этому ребру.*

В указанный класс можно включить и *изодинамические симплексы*, для которых существуют два (или один) изодинамических центра, в которых пересекаются все $(n - 1)$-шары K_{ij}^k, $k \neq i \neq j \neq k$, содержащие точки X, для которых

$$\overline{XO_i} : \overline{XO_j} = \overline{O_kO_i} : \overline{O_kO_j}\,,$$

где $O_1, \ldots, O_{n+1}$ — вершины симплекса.

Изодинамические симплексы (теорема 47) — *это те симплексы типа* (*), *для которых $\alpha = 0$.*

К симплексам типа (*) можно отнести еще другие типы специальных симплексов, напр., положительно ортоцентрические симплексы для $\beta = 0$ и т. п.

В теореме 53 дана геометрическая характеристика n-симплексов указанного типа. Прежде всего вводится понятие *главной точки n-симплекса: это* (поскольку такая точка существует) *точка H, которая не лежит ни* *в одной грани симплекса и или не совпадает с центром тяжести, и тогда его квадратичная поляра относительно симплекса является квадрикой вращения с осью, проходящей через H, или совпадает с центром тяжести, и тогда симплекс равносторонний.* В первом случае соответственная ось вращения называется *главной осью* n-симплекса, а (единственный) $(n - 1)$-шар, входящий в связку, определенную квадратичной полярой точки H относительно симплекса и двойной линейной полярой точки H относительно симплекса, называется *главным* $(n - 1)$*-шаром*. Если еще ввести число μ (*тип* главной точки) при помощи определенного двойного отношения в указанной связке квадрик, то можно утверждать, что *n-симплекс будет вида* (*) *тогда и только тогда, если это n-симплекс с главной точкой (типа $\mu = \alpha/\beta$).*

Из выражения (*) следует, что *все грани n-симплекса с главной точкой типа μ являются в свою очередь симплексами с главной точкой типа μ* (теорема 54).

Если дан n-симплекс с главной точкой типа μ, где μ — целое, $0 < \mu \leq \leq n - 1$, то (теорема 55) *существует* $(n - 1)$*-шар* (главный $(n - 1)$-шар), *касающийся всех μ-мерных граней n-симплекса, причем все линейные пространства, каждое из которых соединяет точку касания в такой грани с противолежащей $(n - \mu - 1)$-мерной гранью, проходят через одну и ту же точку* (главную точку). *Это свойство характерно для n-симплексов с главной точкой типа μ, $\mu = 1, \ldots, n - 1$.*

В дальнейших теоремах показано, что *всякий n-симплекс с главной точкой возникает из некоторого положительно ортоцентрического n-симплекса путем растяжения в определенном направлении* (теорема 56). Отсюда легко следует (теорема 58), что *n-симплекс с главной точкой обладает тем* (не характерным) *свойством, что все высоты пересекают одну прямую* (главную ось).

Другое свойство n-симплекса с главной точкой, являющиеся *характерным*, состоит в том, что *для симплекса существует система $n + 1$ ориентированных $(n - 1)$-шаров (причем центр каждого из них лежит в одной из вершин), пересекающихся под одним и тем же (обобщенным) углом* (теорема 61). С этим связан второй способ образования n-симплексов с главной точкой: *Если построить вокруг всех вершин равностороннего n-симплекса $(n - 1)$-шары одинаковых радиусов* (действительных или чисто мнимых) *и если преобразовать эту систему $n + 1$ $(n - 1)$-шаров при помощи какой-либо шаровой инверсии, то центры преобразованных $(n - 1)$-шаров, если они не лежат в гиперплоскости, образуют вершины n-симплекса с главной точкой. Этим способом можно образовать каждый n-симплекс с главной точкой.*

В теореме 62 показано, что *если центр главного $(n - 1)$-шара K n-сим-*

плекса $\sum$ *с главной точкой типа* $\mu \neq n$ *не лежит ни в одной грани, то полярные гиперплоскости вершин* $\sum$ *образуют опять n-симплекс* $\sum^*$ *с той же самой главной точкой, с тем же самым главным* $(n - 1)$*-шаром, однако типа* $\mu^* = n - \mu - 1$ (и здесь $\mu^* \neq n$).

Summary

GEOMETRY OF THE SIMPLEX IN E_n (3rd part)

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Received April 21, 1955.)

This is the third and final part of the paper, the first part of which was published in Čas. pro pěst. mat. *79* (1954), 297—320, the second in the same journal *80* (1955), 462—476. In the present part special types of simplexes in Euclidean spaces are studied.

First, a special type of rectangular n-simplexes is treated, the $(n - 1)$-dimensional faces of which may be numerated in such a way that exactly the interior angles φ_{12} (of the faces 1 a 2), φ_{23}, φ_{34}, ..., $\varphi_{n,n+1}$ are acute, all remaining interior angles right.

In the theorem 32 is shown that *the necessary and sufficient condition for an n-simplex to be rectangular of the type mentioned is that real numbers* $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ *(different from each other) exist so that the lengths* d_{ij} *of the edges of the simplex satisfy the relations*

$$d_{ij}^2 = |c_i - c_j| \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)\,.$$

It follows (theorem 33) that *every m-dimensional face* $(1 < m \leqq n - 1)$ *of such an n-simplex is a rectangular m-simplex of this type.* Especially, every two-dimensional face of such an n-simplex is a rectangular triangle. Conversely, *an n-simplex, each two-dimensional face of which is rectangular, is rectangular of the type mentioned* (theorem 34). In the theorem 35 the following properties of such a rectangular n-simplex are proved:

(i) *the centre of the circumscribed hypersphere is in the middle of the (unique) longest edge,*

(ii) *in the* E_n *considered there exists a rectangular parallelepiped the vertices of which include all vertices of the simplex.*

In the further theorems 36—39 some properties of the *orthocentric n-simplex* and *orthocentric sets of* $n + 2$ points in E_n (i. e. $n + 1$ vertices and the orthocentre) are studied.

First, the idea of an *orthogonal n-hyperbola* is established as such a rational

algebraic curve of degree n in E_n, the n asymptotic directions of which are mutually rectangular. For the sake of brevity two of such n-hyperbolae in E_n are called *independent* if there is no k-dimensional $(0 \leqq k \leqq n - 1)$ linear improper subspace of E_n spanned by $k + 1$ asymptotic directions of one n-hyperbola containing more than k asymptotic directions of the other (i. e. if the asymptotic n-tuples of the both n-hyperbolae are *independent*).

Let a set of $n + 2$ points in E_n be of that kind that there exist two independent orthogonal n-hyperbolae both passing through all the points of the set. Then the set is orthocentric. Conversely, every rational algebraic curve of degree n passing through $n + 2$ points of an orthocentric set in E_n is an orthogonal n-hyperbola (theorem 36). The proof of this theorem is based upon this lemma: *if in the projective $(n - 1)$-space S_{n-1} two independent* (in the preceding sense) *sets of n points are given then there exists at most one regular hyperquadric with respect to which both n-tuples are autopolar.*

For an orthocentric n-simplex, the orthocentre of which not lying in any hyperplane of symmetry of an edge, there exists (theorem 37) *exactly one orthogonal n-hyperbola passing through all the vertices and the centre of gravity of the n-simplex.* This n-hyperbola being a generalized Kiepert's hyperbola of the triangle, has the following properties:

(i) *the asymptotic directions of it are the axes-directions* (uniquely determined) *of Steiner hyperellipsoids,*

(ii) *it contains the feet of all normals from the orthocentre to any regular hyperquadric of the Steiner system* (i. e. the pencil of hyperquadrics including the Steiner's circumscribed hyperellipsoid and the double improper hyperplane).

In the next theorem 38 a characteristic property of those orthocentric simplexes is formulated, the orthocentre of which is an interior point of the simplex (so called *positively orthocentric simplexes*). *An n-simplex is positively orthocentric if and only if there exists such an interior point P (the orthocentre) that for every selfadjoint point S (as far as $S \neq P$) of the reciprocal transform with respect to the simplex* (i. e. a transform of the type $x'_i = \frac{c_i}{x_i}$ for $c_i \neq 0$ real where x_i and x'_i are the barycentric homogeneous coordinates), *for which the centre of gravity and the point P correspond each other, holds that the line PS is orthogonal to the harmonic polar of S with respect to the simplex.*

Another characteristic property of an orthocentric n-simplex (theorem 39) is that *there exist real numbers $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, such that* ($\varphi_{ij}$ being interior angles)

$$\cos \varphi_{ij} = c_i c_j \text{ for } i \neq j .$$

Theorem 40 shows that *a characteristic property of equifacial simplexes* (with all the $(n - 1)$-dimensional faces of the same volume) *is that two* (and then three) *of the three points coincide: the centre of gravity, the centre of the inscribed* *hypersphere and the Lemoine point of the simplex* (i. e. the point with the property the sum of the squares of the distances between this point and the $(n - 1)$-dimensional faces is minimum).

A necessary and sufficient condition (theorem 41) *for an n-simplex with the vertices $O_1, \ldots, O_{n+1}$ that its centre of gravity and the centre of the circumscribed hypersphere coincide is that for $i = 1, \ldots, n + 1$*

$$\sum_{j=1}^{n+1} \overline{O_iO_j^2} = \text{const} .$$

Theorem 42 shows that *for every $n > 2$ there exist not equilateral n-simplexes with a unique distinguished point.*

In the further theorems other types of n-simplexes are treated. For these n-simplexes there exist real numbers $\alpha, \beta, t_1 \neq 0, \ldots, t_{n+1} \neq 0$, such that ($\sqrt{e_{ij}}$ is the length of the edge O_iO_j)

$$e_{ij} = \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta t_i t_j , \quad i \neq j . \tag{*}$$

This class (*) of n-simplexes includes for special $\alpha : \beta$ some types of simplexes with certain generalized properties of the triangle.

Let Σ be an n-simplex in E_n with vertices $O_1, \ldots, O_{n+1}$. A necessary and sufficient condition for the existence of such a point $P \neq O_i$ in E_n that the angles of the (not oriented) lines PO_i, PO_j $[i \neq j]$ be all equal is that Σ be of the type (*) *with* $\alpha = n\beta$ [theorem 44; P is then the generalized point of Torricelli].

Let $P_1, \ldots, P_{n+1}$ be the points in which a hypersphere inscribed (in the wider sense) in Σ touches the faces $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$ (ω_i opposite to O_i). *The lines O_iP_i pass through a point Q if and only if Σ is of the type* (*) *for* $\alpha = (n - 1)\beta$ [theorem 45; Q is a generalized point of Gergonne].

Further, *a hypersphere touching all the lines O_iO_j $(i \neq j)$ exists if and only if Σ is of the type* (*) *for* $\alpha = \beta$ [theorem 46]. *Then a point R exists* [another generalization of the point of Gergonne] *such that all hyperplanes joining the point of contact in the line O_iO_j with the $(n - 2)$-dimensional face opposite to O_iO_j, pass through R.*

If for Σ all the hyperspheres K_{ij}^k $(k \neq i \neq j \neq k)$ containing the points X such that

$$\overline{XO_i} : \overline{XO_j} = \overline{O_kO_i} : \overline{O_kO_j}$$

intersect (in two or one points called *isodynamic centres*) *then Σ is of the type* (*) *with* $\alpha = 0$. Conversely, *an n-simplex of the type* (*) *with* $\alpha = 0$ *is isodynamic,* i. e. the hyperspheres intersect in isodynamic centres (theorem 47).

The class (*) includes some more types of special simplexes, for example the positively orthocentric simplexes etc.

In the theorem 53 a geometrical characteristic of these simplexes is given. At first, *the principal point of an n-simplex* Σ ($n \geqq 2$) is defined (as far as it exists): *it is a point H not lying in any* $(n - 1)$*-dimensional face of* Σ, *of the manner that either* $H \neq T$ (T being the centre of gravity of Σ) *and the quadratic polar Q of H with respect to* Σ *is a hyperquadric of revolution with its axis passing through H, or* $H = T$ *and* Σ *is equilateral.* In the first case the axis mentioned is called *the principal axis of* Σ, the (unique) hypersphere in the pencil of hyperquadrics determined by Q and the double linear polar of H with respect to Σ *the principal hypersphere of* Σ. (A definition of the principal hypersphere in the second case is also added.) The principal point H is of *the type* μ if a certain crossratio in the pencil mentioned is $-\mu$. For such *n-simplexes with a principal point* the following theorem 53 holds:

An n-simplex Σ *is of the type* (*) *if and only if* Σ *is an n-simplex with a principal point* $\left(\textit{of the type } \mu = \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.

From (*) it follows immediately that *all faces of an n-simplex with a principal point of the type* μ *are also simplexes with a principal point of the type* μ (theorem 54).

Let Σ be an n-simplex with a principal point of the type μ. *If* μ *is an integer,* $0 < \mu \leqq n - 1$, *then* (theorem 55) *there exists a hypersphere* (the principal hypersphere) *touching all the* μ*-dimensional faces of* Σ. Besides, *all the linear spaces joining the point of contact in such a* μ*-dimensional face with the opposite* $(n - \mu - 1)$*-dimensional face of* Σ, *pass through a common point* (the principal point). *This property is characteristic for the n-simplexes with a principal point of the types* μ, $\mu = 1, \ldots, n - 1$.

Further it is shown that *every n-simplex with a principal point may be obtained from some positively orthocentric simplex by a dilatation in a certain direction* (theorem 57). It follows (theorem 58) that *all the altitudes of an n-simplex with a principal point intersect a line* (the principal axis). This last property is not yet characteristic.

Another *characteristic* property of an n-simplex with a principal point is the following: *there exists a set of* $n + 1$ *oriented hyperspheres in* E_n *with the centres in the vertices* O_i *intersecting each another under equal* (generalised) *angles.* From this, another way of constructing the simplexes with a principal point follows:

Let Σ' *be an equilateral n-simplex in* E_n *and let* $S_1', \ldots, S_{n+1}'$ *be hyperspheres with centres in the vertices of* Σ' *and with equal radii* (real or purely imaginary). *By every hyperspherical inversion the* S_i' *are transformed in the hyperspheres* S_i, *the centres of which* (if not in a hyperplane) *are vertices of an n-simplex* Σ *with a principal point. Every n-simplex with a principal point may be constructed this way.*

Finally, in the theorem 62 it is shown that a kind of duality in the class of

n-simplexes with a principal point of the type $\mu \neq n$ may be defined. *Let Σ be an n-simplex with a principal point H of the type $\mu \neq n$. If the centre of the principal hypersphere S is not lying in any $(n - 1)$-dimensional face of Σ, the polar hyperplanes of the vertices of Σ with respect to S are faces of another n-simplex Σ^* with the same principal point H, with the same principal hypersphere S, but of the type $\mu^* = n - \mu - 1$.*