Časopis pro pěstování matematiky

Tibor Šalát

O jednej aplikácii reťazových zlomkov v teorii nekonečných radov

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 3, 317--326

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117312`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O JEDNEJ APLIKÁCII REŤAZOVÝCH ZLOMKOV V TEORII NEKONEČNÝCH RADOV

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

DT: 517.52.001, 511.138

(Došlo dne 27. srpna 1958)

V práci [1] vyšetruje J. D. HILL niektoré zaujímavé vlastnosti čiastočných radov. V tomto článku ukážeme, že analogické výsledky možno dostať aj u radov obecnejšej štruktúry, ak použijeme k naším úvahám niektoré základné vlastnosti reťazových zlomkov.

Úvod

Ku štúdiu vlastností čiastočných radov radu $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ používa J. D. HILL dyadické rozvoje reálnych čísel intervalu $(0, 1\rangle$. Každému $x = 0. \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \ldots \alpha_n \ldots$ (vpravo máme dyadický rozvoj čísla x obsahujúci nekonečne mnoho jedničiek), $x \in (0, 1\rangle$, priradí čiastočný rad $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k$ radu $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

V týchto úvahách možno ísť v určitom smere ďalej. Predpokladajme, že pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ je daná nekonečná postupnosť reálnych čísel

$$M_k = (c_1^k, c_2^k, c_3^k, \ldots, c_n^k, \ldots)$$

a nech $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ je rad s reálnymi členmi. V tomto článku budeme sa zaoberať štúdiom vlastností množiny všetkých radov tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k u_k$, kde ε_k je pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ členom postupnosti M_k, tj. $\varepsilon_k = c_r^k$ pre vhodné r.

I

V tejto časti práce budeme predpokladať, že je daný rad $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ s reálnymi členmi. Nech je ďalej pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$M_k = (c_1^k, c_2^k, c_3^k, \ldots, c_n^k, \ldots)$$

nekonečná postupnosť reálnych čísel. Pri pevnom k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) položme $A_k = \sup_{n=1,2,3,\ldots} |c_n^k|$ a nech je splnená podmienka

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k |u_k| < \infty \,. \tag{1}$$

Táto podmienka je splnená napríklad vtedy, ak $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ absolútne konverguje a $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená.

Označme ďalej znakom W množinu všetkých súčtov radov tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k u_k$, kde ε_k je členom postupnosti M_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$),

Nech x je iracionálne číslo intervalu $(0, 1)$, potom, ako je známe (pozri [2] str. 20) možno x vyjadriť jednoznačne pomocou nekonečného reťazového zlomku s prirodzenými členmi

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots + \cfrac{1}{n_l + \cdots}}}} \,. \tag{2}$$

Definujme teraz na $\langle 0, 1\rangle$ funkciu φ takto: Pre x iracionálne (2) kladieme: $\varphi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} c_{m_l}^l u_l$. Rad vpravo vzhľadom na (1) absolútne konverguje. Ďalej položme $\varphi(0) = 0$ a pre x racionálne, $x \in (0, 1\rangle$, kladieme

$$\varphi(x) = \sum_{l=1}^{r} c_{m_l}^l u_l, \text{ ak } x = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cdots + \cfrac{1}{m_r}}} \,, \tag{3}$$

pri tom vpravo máme (ukončený) rozvoj čísla x v reťazový zlomok (pozri [2] str. 19).

Zrejme je množina všetkých hodnôt funkcie φ na množine všetkých iracionálnych čísel intervalu $\langle 0, 1\rangle$ totožná s množinou W. Ak pre každé k je množina členov postupnosti M_k kompaktná, potom aj W je kompaktná a ak okrem toho je $u_l \neq 0$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$) a pre nekonečne mnoho k je množina členov postupnosti M_k aspoň dvojbodová, potom je W dokonca perfektná (pozri [3]).

Veta 1. *Funkcia φ je integrácie schopná v zmysle Riemannovom na intervale $\langle 0, 1\rangle$.*

Dôkaz. Pre pevne zvolené prirodzené k položme $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{k} c_{n_l}^l u_l$ pre x iracionálne (2), ďalej $\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{k} c_{m_l}^l u_l$ pre x racionálne (3), ak $k \leqq r$, a konečne $\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{r} c_{m_l}^l u_l$ pre x racionálne (3), ak $k > r$.

Takto definovaná funkcia $\varphi_k(x)$ je zrejme ohraničená na intervale $\langle 0, 1\rangle$, keďže pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ máme podľa (1)

$$|\varphi_k(x)| \leqq \sum_{l=1}^{\infty} A_l |u_l| < \infty .$$

Funkcia φ_k je spojitá na každom otvorenom intervale k-teho poradia (pozri [2] str. 50) a teda množina všetkých bodov nespojitosti funkcie φ_k na $\langle 0, 1\rangle$ je spočetná. Teda φ_k je integrácie schopná v zmysle Riemannovom na intervale $\langle 0, 1\rangle$. To platí pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$. Uvážme ďalej, že pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$|\varphi(x) - \varphi_k(x)| \leqq \sum_{l=k+1}^{\infty} A_l |u_l| = o(1)$$

a tedy postupnosť $\{\varphi_k\}_1^\infty$ rovnomerne konverguje k funkcii φ na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Podľa známych viet o Riemannovom integráli dostávame správnosť tvrdenia vety.

Poznámka 1. Z dôkazu predošlej vety vyplýva, že bodmi nespojitosti funkcie φ na intervale $\langle 0, 1\rangle$ môžu byť len racionálne čísla tohoto intervalu.

Poznámka 2. Dokázaná veta je analogon vety 1 z citovanej Hillovej práce. Integrál $\int_0^1 \varphi \, dx$ možno vzhľadom na definíciu funkcie φ pokladať za akýsi aritmetický priemer množiny W. V práci [1] sa ukazuje, že aritmetický priemer (analogicky definovaný ako v našom prípade) množiny všetkých súčtov všetkých čiastočných radov daného absolútne konvergentného radu $s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ je $\frac{s}{2}$. V našom prípade, ako sa dá očakávať, hodnota aritmetického priemeru množiny W (tj. integrálu $\int_0^1 \varphi \, dx$) už obecne nie je $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.*) Výpočet integrálu $\int_0^1 \varphi \, dx$ už aj pri dosť špeciálnych voľbách postupností M_k robí značné ťažkosti.

Príklad. Uvedieme tento jednoduchý príklad. Nech $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ je absolútne konvergentný rad, nech $M_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ a pre $k = 2, 3, 4, \ldots$ nech je $M_k = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Potom pre $x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ je $n_1 = k$

*) Všimnime si, že dokonca o konvergencii radu $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ nečiníme žiadne predpoklady.

(pozri [2] str. 49) a tedy $c^1_{n_1}$ je 1 pre nepárne k, 0 pre párne k. Ostatné $c^l_{n_l}$ $(l > 1)$ sú 1. Teda

$$\int_0^1 \varphi_n \mathrm{d}x = \sum_{l=2}^{n} u_l + u_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right).$$

Keďže

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1/n}{k/n};$$

podľa definície integrálu je limita tohoto výrazu pre $n \to \infty$ rovna $\int_1^2 x^{-1}\,\mathrm{d}x = \log 2$. Teda

$$\int_0^1 \varphi_n \,\mathrm{d}x = u_1 \log 2 + \sum_{l=2}^{n} u_l\,,$$

$$\int_0^1 \varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n \,\mathrm{d}x = u_1 \log 2 + \sum_{l=2}^{\infty} u_l$$

(pozri dôkaz vety 1.).

Keby sme volili $M_1 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ a pre $k = 2, 3, 4, \ldots$ $M_k = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ dostali by sme podobným postupom

$$\int_0^1 \varphi \,\mathrm{d}c = (1 - \log 2)\, u_1 + \sum_{l=2}^{\infty} u_l\,.$$

V oboch prípadoch je splnenie podmienky (1) evidentné.

II

V tejto časti práce budeme sa zaoberať štúdiom vlastností radov už zavedeného typu s tým rozdielom, že podmienku (1) nahradíme inou podmienkou. Budeme teda študovať vlastnosti množiny všetkých radov tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k u_k$, kde ε_k je pre $k = 1, 2, 3, \ldots$ členom danej postupnosti reálnych čísel

$$M_k = (c^k_1, c^k_2, c^k_3, \ldots, c^k_n, \ldots)\,.$$

Zavedieme toto stručné vyjadrovanie:

Budeme hovoriť, že postupnosť $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna vzhľadom na rad $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, ak existuje postupnosť reálnych čísel $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, ε_k je člen postupnosti M_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, s vlastnosťou $\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = +\infty$ a postupnosť $\{\varepsilon'_k\}_1^{\infty}$, ε'_k je člen postupnosti $M_k(k = 1, 2, 3, \ldots)$, s vlastnosťou $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon'_k u_k = -\infty$.

Podmienku (1) nahradíme v tejto časti práce podmienkou: Postupnosť $\{M_k\}_1^\infty$ je normálna vzhľadom na rad $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (4). Táto podmienka je napríklad splnená vtedy, ak (4) je neabsolútne konvergentný rad a každá z postupností M_k obsahuje čísla 0, 1.

Analogicky, ako v prvej časti práce definujeme pre každé prirodzené k funkciu $\varphi_k(x)$ a každému iracionálnemu číslu $x \in (0, 1)$,

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_l + \cdots}}}$$

priradíme formálne nekonečný rad

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_{n_l}^l u_l \tag{5}$$

V ďalšom ukážeme, že v istom topologickom zmysle majú prevahu tie rady tvaru (5), ktoré oscilujú medzi ∞ a $-\infty$.

Interval $\langle 0, 1\rangle$ pokládáme v ďalšom za metrický priestor s Euklidovskou metrikou $\varrho = \varrho(x, y) = |x - y|$.

Veta 2. *Nech* (4) *je rad s reálnymi členmi. Nech* $\{M_k\}_1^\infty$ *je normálna postupnosť vzhľadom na rad* (4) *Potom pre všetky* $x \in \langle 0, 1\rangle$ *s výnimkou bodov množiny prvej kategorie platí*

$$\limsup_{k\to\infty} \varphi_k(x) = +\infty\,, \quad \liminf_{k\to\infty} \varphi_k(x) = -\infty\,. \tag{6}$$

Dôkaz. Nech S značí množinu všetkých iracionálnych čísel intervalu $\langle 0, 1\rangle$, R množinu všetkých racionálnych čísel tohoto intervalu. Uvažujme metrický priestor (S, ϱ), kde $\varrho = \varrho(x, y) = |x - y|$ (Euklidovská metrika). Priestor (S, ϱ) je zrejme množinou druhej kategorie v sebe. Keďže pri pevnom n všetky body nespojitosti funkcie φ_n ležia v R, je φ_n spojitá na (S, ϱ) (presne rečeno jej parciálna funkcia $(\varphi_n)_S$ je spojitá na (S, ϱ)). Pri m prirodzenom pevnom položme $B_m = \underset{x \in S\ n=1,2,3,\dots}{E} \varphi_n(x) \leqq m$. B_m je vzhľadom na predošlú vlastnosť funkcie φ_n uzavretou množinou v (S, ϱ). Ukážeme, že B_m je riedka v (S, ϱ). Treba ukázať, že $S - B_m$ je hustá v (S, ϱ), tj. že každá guľa v (S, ϱ) obsahuje body množiny $S - B_m$. Nech teda je $\Omega'(x_0, \delta)$ guľa v (S, ϱ), tj.

$$\Omega'(x_0, \delta) = \Omega(x_0, \delta) \cap S\,,$$

kde

$$x_0 \in S\,, \quad \Omega(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\,.$$

Pre dosť veľké l už $\Omega(x_0, \delta)$ obsahuje nejaký interval l-tého poradia (pozri [2] str. 50). Podržme toto l pevne. Zostrojme teraz postupnosť intervalov $\{J_i\}_{l+1}^{\infty}$ takto:

Označme $K = c_{n_1}^1 u_1 + \ldots + c_{n_l}^l u_l$, pri čom $J_l = E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l \\ n_1, n_2, \ldots, n_l \end{pmatrix}$ (označenie pozri [2] str. 53). Podľa predpokladu vety existuje postupnosť reálnych čísel $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = \infty, \tag{7}$$

pri tom je ε_k členom postupnosti M_k. Ak $\varepsilon_{l+1} = c_s^{l+1}$, potom zvolíme

$$J_{l+1} = E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l, l+1 \\ n_1, n_2, \ldots, n, s \end{pmatrix}.$$

Ak sme už zvolili $J_{l+k} \subset J_l$, pri čom

$$J_{l+k} = E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l+k \\ n_1, n_2, \ldots, n_{l+k} \end{pmatrix},$$

potom $J_{l+k+1} \subset J_{l+k}$ zvolíme takto:

Ak $\varepsilon_{l+k+1} = c_r^{l+k+1}$, potom kladieme:

$$J_{l+k+1} = E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l, \ldots, l+k, l+k+1 \\ n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots, n_{l+k}, r \end{pmatrix}.$$

Zvoľme teraz $k \geqq 1$ také, aby

$$\varepsilon_{l+1} u_{l+1} + \varepsilon_{l+2} u_{l+2} + \ldots + \varepsilon_{l+k} u_{l+k} > m - K,$$

to je vzhľadom na (7) možné. Potom pre iracionálne x, $x \in J_{l+k}$ máme

$$\varphi_{l+k}(x) = K + \varepsilon_{l+1} u_{l+1} + \ldots + \varepsilon_{l+k} u_{l+k} > m,$$

takže $x \in S - B_m$. Položme teraz $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$, teda B je množina prvej kategorie v (S, ϱ). Zrejme

$$B = \underset{x \in S}{E} \limsup_{n \to \infty} \varphi_n(x) < \infty.$$

Úplne rovnako by sme ukázali, že aj množina

$$C = \underset{x \in S}{E} \liminf_{n \to \infty} \varphi_n(x) > -\infty$$

je množinou prvej kategorie v (S, ϱ) a tak aj množina $B \cup C$ je prvej kategorie v (S, ϱ) a teda aj prvej kategorie v $(\langle 0, 1 \rangle, \varrho)$. Keďže R je spočetná, je aj množina $P = B \cup C \cup R$ prvej kategorie v $\langle 0, 1 \rangle$. P je však zrejme množinou všetkých tých $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pre ktoré neplatia súčasne obe rovnosti (6). Tým je veta dokázaná.

Dôsledok. Množina všetkých tých $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pre ktoré má postupnosť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ limitu (vlastnú alebo nevlastnú) a teda aj množina všetkých tých iracionálnych čísel $x \in (0, 1)$,

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_l + \cdots}}}$$

pre ktoré príslušný rad $\sum_{l=1}^{\infty} c_{n_l}^l u_l$ má súčet (vlastný alebo nevlastný), je množinou prvej kategorie v $\langle 0, 1 \rangle$.

LITERATÚRA

[1] *J. D. Hill*: Some theorems on subseries, Bull. Amer. Math. Soc., *48* (1942), 103—108.
[2] *A. J. Chinčin*: Řetězové zlomky, Praha, 1952 (český preklad).
[3] *T. Šalát*: K absolútne konvergentným radom, Mat.-fyz. čas. SAV, *VII* (1957), 3, 139—142.

Резюме

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

ТИБОР ШАЛАТ (Tibor Šalát), Братислава

(Поступило в редакцию 27/VIII 1958 г.)

В работе [1] Дж. Д. Хилл изучает некоторые интересные свойства частичных рядов. В настоящей работе автор выводит аналогичные результаты для рядов более общей структуры (чем частичные ряды), используя при этом некоторые основные свойства цепных дробей.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — ряд с действительными членами и пусть для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ будет

$$M_k = (c_1^k, c_2^k, c_3^k, \ldots, c_n^k, \ldots)$$

последовательность действительных чисел. Положим $A_k = \sup_{n=1,2,\ldots} |c_n^k|$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} A_k |u_k| < \infty$. Пусть

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{}{n_l + \ddots}}}} \tag{1}$$

представляет бесконечное разложение иррационального числа $x \in (0, 1)$ в цепную дробь. Определим функцию φ на $\langle 0, 1 \rangle$ так: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} c^l_{n_l} u_l$, если x — иррациональное число с разложением (1). Если же x рационально, $0 < x \leqq 1$, и его разложение в цепную дробь имеет вид

$$x = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{m_r}}}}, \tag{2}$$

то положим $\varphi(x) = \sum_{l=1}^{r} c^l_{m_l} u_l$.

При этом определении множество всех значений функции φ на множестве всех иррациональных чисел интервала $(0, 1)$ тождественно множеству всех сумм рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k u_k$, где ε_k — член последовательности M_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

В работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Функция φ интегрируема в смысле Римана на $\langle 0, 1 \rangle$.*

Из доказательства этой теоремы следует, что точками разрыва функции φ могут быть только рациональные числа интервала $\langle 0, 1 \rangle$.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, (3), M_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) имеют указанный выше смысл. Последовательность $\{M_k\}_1^{\infty}$ мы назовем нормальной относительно ряда (3), если существуют последовательности $\{\varepsilon_k\}_1^{\infty}$, $\{\varepsilon'_k\}_1^{\infty}$; ε_k, ε'_k являются членами последовательности M_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$), так что

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = \infty\,, \quad \liminf_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon'_k u_k = -\infty\,.$$

Пусть при натуральном k функция $\varphi_k(x)$ обозначает для иррационального x с разложением (1) k-ю частичную сумму ряда $\sum_{l=1}^{\infty} c^l_{n_l} u_l$, для рационального

x с разложением (2), $0 < x \leqq 1$, k-ю частичную сумму (формального) ряда

$$c^1_{m_1} u_1 + \ldots + c^r_{m_r} u_r + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

и $\varphi_k(0) = 0$. Тогда справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *— ряд с действительными членами, пусть последовательность* $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ *нормальна относительно ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. *Тогда для всех* $x \in \langle 0, 1 \rangle$, *за исключением точек множества первой категории,*

$$\limsup_{k \to \infty} \varphi_k(x) = +\infty, \quad \liminf_{k \to \infty} \varphi_k(x) = -\infty.$$

Summary

ON AN APPLICATION OF THE CONTINUED FRACTIONS IN THE THEORY OF THE INFINITE SERIES

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Received August 27, 1958)

In the paper [1] J. D. Hill deals with some interesting properties of the subseries. In this paper proves the author analogical results for the series of more general structure (than are the subseries), using some fundamental properties of the continued fractions.

Let $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ be a series with real numbers and let for every $k = 1, 2, 3, \ldots$, be $M_k = (c_1^k, c_2^k, \ldots, c_n^k, \ldots)$ a sequence of real numbers. Let us put

$$A_k = \sup_{n=1,2,3,\ldots} |c_n^k| \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

and let $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k |u_k| < \infty$. Let

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_l + \cdots}}} \tag{1}$$

be the infinite expansion of the irrational number $x \in (0, 1)$ into the continued fraction. Let us define the function φ in the following way: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) =$

$= \sum_{l=1}^{\infty} c_{n_l}^l u_l$, if x is irrational number with the expansion (1). If x is rational, $0 < x \leqq 1$ and it's expansion into the continued fraction is

$$x = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cdots + \cfrac{1}{m_r}}} \tag{2}$$

then we put $\varphi(x) = \sum_{l=1}^{r} c_{m_l}^l u_l$.

According to this definition is the set of all values of the function φ on the set of all irrational number of the interval $(0, 1)$ identic with the set of all the sums of the series of the form $\sum_1^\infty \varepsilon_k u_k$, where ε_k is the member of the sequence M_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

In the paper this theorem is proved:

Theorem 1. *The function φ is integrable on $\langle 0, 1\rangle$ in the Riemann sense.*

From the proof of the theorem follows, that the points of discontinuity of the function φ may be only the rational numbers of the interval $\langle 0, 1\rangle$.

Let

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k\,, \quad M_k\ (k = 1, 2, 3, \ldots,) \tag{3}$$

have the previous meaning. The sequence $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ will be called normal with respect to the series (3), if there exist sequences $\{\varepsilon_k\}_1^\infty, \{\varepsilon_k'\}_1^\infty$; $\varepsilon_k, \varepsilon_k'$ being the members of the sequence M_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, such that the relations

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = +\infty\,, \quad \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k' u_k = -\infty$$

are valid.

Let for every natural k means $\varphi_k(x)$ for x irrational (1) the k-th partial sum of the series $\sum_{l=1}^{\infty} c_{n_l}^l u_l$, for x rational (2), $0 < x \leqq 1$, the k-th partial sum of the (formal) series

$$c_{m_1}^1 u_1 + \ldots + c_{m_r}^r u_r + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

and $\varphi_k(0) = 0$. Then is in force

Theorem 2. *Let $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ be a series with real numbers, let the sequence $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ is normal with respect to the series $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Then for every $x \in \langle 0,1\rangle$ except the points of a set of the first cathegory*

$$\limsup_{k\to\infty} \varphi_k(x) = +\infty\,, \quad \liminf_{k\to\infty} \varphi_k(x) = -\infty\,.$$