Leo Boček

Contribution à la théorie des congruences paraboliques de droites

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 3, 263--266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117438

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES CONGRUENCES PARABOLIQUES DE DROITES

LEO BOČEK, Praha

(Reçu le 14 juin 1960)

Dans cet article, on énonce quelques théorèmes sur les congruences paraboliques de droites et les couches de courbes asymptotiques, harmoniques et conjugées.

Soient données dans un espaces affin deux surfaces $X(u, v)$ et $Y(u, v)$. Une correspondance entre les points de ces deux surfaces est donnée par leur paramétrisation. Supposons que les surfaces X et Y aient aux points en correspondance des plans tangents parallèles, c'est-à-dire que

$$(1)\qquad \begin{aligned} Y_u &= \alpha X_u + \beta X_v\,, \\ Y_v &= \gamma X_u + \delta X_v\,, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Les équations $u = u(t)$, $v = v(t)$ déterminent sur les surfaces X, Y des courbes en correspondance: $X(t) = X(u(t), v(t))$, $Y(t) = Y(u(t), v(t))$ aux vecteurs tangents

$$X_t = X_u \,\mathrm{d}u + X_v \,\mathrm{d}v\,,$$

$$Y_t = (\alpha \,\mathrm{d}u + \gamma \,\mathrm{d}v)\, X_n + (\beta \,\mathrm{d}u + \delta \,\mathrm{d}v)\, X_v\,.$$

Cherchons maintenant sur les surfaces X, Y des courbes $X(t)$, $Y(t)$ ayant en tous les points en correspondance des vecteurs tangents parallèles X_t, Y_t. L'équation différentielle de ces courbes est

$$(2)\qquad -\beta \,\mathrm{d}u^2 + (\alpha - \delta)\,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v + \gamma \,\mathrm{d}v^2 = 0\,.$$

Si cette équation est une identité, alors il existe une affinité qui transforme la surface X en Y. Dans le cas contraire écrivons $D = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma$. Si $D \neq 0$, il existe deux systèmes distincts de telles courbes. Si nous prenons ces deux systèmes pour les courbes-u et courbes-v paramétriques, les équations (1) prendront la forme $Y_u = \alpha X_u$, $Y_v = \delta X_v$. C'est de ces équations-ci que part CL. GUICHARD dans son travail [3]. Il montre que les courbes-u et -v forment dans ce cas sur les surfaces X, Y des réseaux conjugués qu'il appele parallèles. Les droites XX_u forment une congruence de droites. Une des surfaces focales de cette congruence est le réseau de $X(u, v)$. La congruence engendrée par les droites XX_u est parallèle à la congruence engendrée par les droites YY_u.

Si $D = 0$, il n'existe qu'un seul système de courbes cherchées, aux vecteurs tangents parallèles. Si nous prenons ce système pour les courbes-u et n'importe quel autre système de courbes pour les courbes-v paramétriques, nous aurons dans les équations (1) $\beta = 0$, $\delta = \alpha$, $\alpha\gamma \neq 0$, donc

$$Y_u = \alpha X_u \,, \quad Y_v = \gamma X_u + \alpha X_v \,.$$

Il résulte de ces équations que

$$X_{uu} = \frac{1}{\gamma}(\alpha_v - \gamma_u)\, X_u - \frac{\alpha_u}{\gamma} X_v \,.$$

Si $\alpha_u \neq 0$, les courbes-u forment sur les surfaces X, Y une couche asymptotiques, qui ne sont pas droites. Dans ce qui suit, nous considérons seulement des couches d'asymptotiques de cette espèce. Les plans tangents aux couches X, Y sont parallèles en les points en correspondance, il en est de même pour les vecteurs tangents aux courbes asymptotiques. *Deux couches d'asymptotiques* qui jouissent de ces deux propriétés seront appelées *parallèles.*

Les droites XX_u forment une congruence de droites parabolique, voir S. P. FINIKOV [2]. La couche d'asymptotiques $X(u, v)$ est la seule surface focale de cette congruence, elle s'appelle congruence focale de cette couche. Nous allons introduir encore le parallélisme des congruences paraboliques. *Deux congruences* paraboliques seront dites *parallèles* si les droites en correspondance sont parallèles.

Pour le cas des congruences de droites paraboliques et des couches d'asymptotiques, les congruences et les couches conjugées ou harmoniques ont été définies d'une manière analogue au cas des congruences non-paraboliques et des réseaux conjugués. Ces définitions sont contenus dans le travail [1] d'E. ČECH et dans le travail [4] de L. KOUBEK. A l'aide des résultats de ces deux travaux et des définitions précédentes on déduit facilement les théorèmes suivants que je cite ici sans démonstrations pour des raisons de brièveté.

Théorème 1. *Les congruences paraboliques focales des couches parallèles sont elles-aussi parallèles.*

Théorème 2. *Les couches focales des congruences paraboliques parallèles sont parallèles.*

Quant aux congruences paraboliques conjugées et harmoniques, on peut démontrer ces quatre théorèmes-ci:

Théorème 3. *Si deux congruences paraboliques de droites sont parallèles, alors chaque couche d'asymptotiques conjugée à l'une d'elles est parallèle à une couche d'asymptotiques conjugée à l'autre congruence parabolique.*

Théorème 4. *Si deux couches d'asymptotiques sont parallèles, alors chaque congruence parabolique de droites conjugée à l'une de ces couches est parallèle à une congruence parabolique conjugée à l'autre couche d'asymptotiques.*

Théorème 5. *Si deux couches d'asymptotiques sont parallèles, alors chaque congruence parabolique de droites harmonique à l'une d'elles est parallèle à une congruence parabolique harmonique à l'autre couche d'asymptotiques.*

Théorème 6. *Si deux congruences paraboliques sont parallèles, alors chaque couche d'asymptotiques harmonique à l'une de ces congruences est parallèle à une couche d'asymptotiques harmonique à l'autre congruence parabolique.*

De plus, on peut démontrer, à l'aide des théorèmes précédents, encore deux théorèmes sur les congruences paraboliques et les couches d'asymptotiques; les voici:

Théorème 7. *Les points d'intersection d'une congruence parabolique avec un hyperplan arbitraire fixe forment une couche d'asymptotiques conjuguée à la congruence considérée.*

Théorème 8. *Les droites d'intersection des plans tangents à une couche d'asymptotiques avec un hyperplan fixe forment une congruence parabolique de droites, harmonique à la couche d'asymptotiques en question.*

Tous ces théorèmes sont analogues aux théorèmes sur les congruences non-paraboliques et les réseaux, démontrés par Cl. Guichard dans [3]. Leurs démonstrations sont aussi analogues.

Littérature

[1] *E. Čech*: Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами VI. Чех. мат. журнал *2* (77), 1952, 297—331.

[2] *S. P. Finikov*: Theorie der Kongruenzen. Berlin 1959.

[3] *Cl. Guichard*: Théorie des réseaux. Mémorial des Sciences math., Paris 1935.

[4] *L. Koubek*: Některé věty z teorie parab. přímkových kongruencí. Čas. pro pěst. matem., *81* (1956), 244–245.

Výtah

PŘÍSPĚVEK K TEORII PARABOLICKÝCH PŘÍMKOVÝCH KONGRUENCÍ

LEO BOČEK, Praha

Pro vrstvy asymptotik, které nejsou přímkami, a pro parabolické přímkové kongruence je definována rovnoběžnost podobně jako pro neparabolické kongruence a konjugované sítě. Při těchto definicích platí uvedené věty, jež jsou analogické k větám, které platí v teorii neparabolických kongruencí a konjugovaných sítí.

Резюме

К ТЕОРИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ

ЛЕО БОЧЕК (Leo Boček), Прага

Для семейства асимптотических кривых, которые неявляются прямыми, и для параболических конгруэнций прямых определена параллельность аналогично, как для непараболических конгруэнций и сопряженных сетей. Вследствие этих определений имеют место приведенные в работе теоремы, которые аналогичны теоремам из теории непараболических конгруэнций и сопряженных сетей.