Bohdan Zelinka

Le nombre de connexité maximum d'un graphe aux nombres de sommets et d'arêtes donnés

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 4, 391--395

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117475`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

LE NOMBRE DE CONNEXITÉ MAXIMUM D'UN GRAPHE AUX NOMBRE DE SOMMETS ET D'ARÊTES DONNÉS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Reçu le 1er décembre 1961)

Dans cet article, on donne la solution d'un problème posé par M. C. BERGE.

Dans son livre [1], p. 253, M. C. Berge pose le problème suivant: „Quelle est la connexité maximum d'un graphe de n sommets et de m arêtes?" Nous allons résoudre ce problème.

Dans le présent article, on reprend la terminologie et les notions principales du livre [1]. Le symbole Γx, que M. BERGE n'utilise que pour les graphes orientés, sera appliqué ici de façon plus générale pour désigner l'ensemble des sommets reliés par une arête au sommet x. Dire que le nombre de connexité d'un graphe $G = (X, \Gamma)$ est égal à ω signifie qu'il existe un ensemble $R \subset X$ de ω sommets tel que, soit $|X \dot{-} R| = 1$, soit $X \dot{-} R = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, et dans le sous-graphe engendré par l'ensemble $A \cup B$ aucun sommet de A n'est joint à aucun sommet de B, et que le nombre ω est minimal dans ce sens qu'aucun ensemble R' de moins de ω sommets ne jouit de cette propriété (condition (D)).

Il est suffisant de limiter nos considérations aux graphes sans boucles. En effet, il est évident que l'adjonction de boucles à un graphe ne change pas son nombre de connexité, de sorte que le nombre de connexité d'un graphe de n sommets et de m arêtes, dont s boucles, ne surpasse pas le nombre de connexité maximum d'un graphe de n sommets et de $m - s$ arêtes sans boucles.

Définition. *Le complément d'un graphe $G = (X, \Gamma)$ est par définition le graphe $\bar{G} = (X, \bar{\Gamma})$ admettant le même ensemble de sommets, mais où deux sommets sont réliés par une arête si et seulement s'ils ne le sont pas dans le graphe G.*

Si dans un graphe $G = (X, \Gamma)$ aucun sommet de $A \subset X$ n'est relié à aucun sommet de $B \subset X$, cela signifie que dans le graphe $\bar{G}$, complément de G, chaque sommet de A est relié à tous les sommets de B. Trouver le nombre de connexité maximum d'un graphe G de n sommets et de m arêtes signifie donc trouver des ensembles A, B de sommets, que satisfassent à la condition (D) et tels que le nombre $|A \cup B|$ soit maximum. Posons $p = \frac{1}{2}n(n - 1)$, $\bar{m} = p - m$. Si m est le nombre d'arêtes du graphe G, $\bar{m}$ sera évidemment le nombre d'arêtes du graphe $\bar{G}$.

Lemme. *Si* $2\bar{m} > kn$, *où* k *est un entier non-négatif, on a* $\omega \leqq n - k - 2$.

Démonstration. Si $2\bar{m} > kn$, la moyenne arithmétique des dégrés des sommets de $\bar{G}$ est plus grande que k. Donc, le graphe $\bar{G}$ contient un sommet x de degré $k + 1$ au moins. Posons $A_0 = \{x\}$, $B_0 = \bar{\Gamma}x$. Alors $|A_0 \cup B_0| \geqq k + 2$, d'où $\omega \leqq n - k - 2$, c. q. f. d.

Désignons par k_0, ou q resp., le plus grand entier non-négatif pour lequel $2\bar{m} > k_0 n$, ou $\bar{m} > qn$, et écrivons $\bar{m}_0 = \bar{m} - qn$. Étant donné deux entiers non-négatifs $m > n$, construisons un graphe $\bar{G}_0 = (X_0, \bar{\Gamma}_0)$ de la façon suivante. Supposons d'abord n pair. Ayons un ensemble de n sommets $X_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Soit $n = 2(q + 1) r + s$, r et s étant deux entiers non négatifs, $s < 2(q + 1)$. On a toujours $r \geqq 1$, car si $r = 0$, on aurait $m < \frac{1}{2}n$, ce qui contredirait notre hypothèse $m > n$. Maintenant, distinguons quatre cas:

a) $\bar{m}_0 \leqq (q + 1)(r - 1)$,
b) $(q + 1)(r - 1) < \bar{m}_0 \leqq \frac{1}{2}n$,
c) $\frac{1}{2}n < \bar{m}_0 \leqq \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}s$,
d) $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}s < \bar{m}_0 \leqq n$.

Considérons d'abord le cas a). Soit $\bar{m}_0 = (q + 1) t + u$, $t \leqq r - 1$, $u < q + 1$. Alors, le graphe $\bar{G}_0$ comportera les arêtes $[x_i, x_j]$ telles que $i \neq j$, $|i - j| \leqq q$ (les sommes et les différences des indices des sommets seront toujours prises modulo n), ainsi que les arêtes $[x_i, x_{i+q+1}]$ pour $i = 2i_1(q + 1) + i_2$, où $i_1 \leqq t$, $i_2 \leqq u$, pour $i_1 = t$, $i_2 < q + 1$ pour $i_1 < t$ et il ne comportera pas d'autres arêtes.

Dans le cas b), soit $\bar{m}_0 = (q + 1)(r - 1) + u$, $0 < u < q + 1 + s$. Alors $\bar{G}_0$ comportera les arêtes $[x_i, x_j]$ avec $i \neq j$, $|i - j| \leqq q$, les arêtes $[x_i, x_{i+q+1}]$ où $i = 2i_1(q + 1) + i_2$, $i_1 \leqq r - 2$, $i_2 \leqq q + 1$, ainsi que les arêtes $[x_i, x_{i+q+1+\frac{1}{2}s}]$ avec $i = 2(q + 1)(r - 1) + i_2$, $i_2 \leqq u$.

Dans le cas c), soit $\bar{m}_0 = \frac{1}{2}n + v$, $0 < v < \frac{1}{2}s$. Le graphe $\bar{G}_0$ aura les mêmes arêtes que dans le cas a) et, de plus, les arêtes $[x_{n+1-i}, x_{n+q+2-i}]$, $1 \leqq i \leqq v$, et $[x_i, x_{[i+q+1+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}v]}]$ pour $i = 2(q + 1)(r - 1) + i_2$, $i_2 \leqq u$, u étant le même que dans le cas b).

Enfin dans le cas d), soit $\bar{m}_0 = \frac{1}{2}n + v$. Alors $\bar{G}_0$ aura les arêtes $[x_i, x_j]$ où $i \neq j$, $|i - j| \leqq q$, $[x_i, x_{i+q+1}]$ pour $i = 2i_1(q + 1) + i_2$, $i_1 \leqq r - 1$, $i_2 \leqq q + 1$, ainsi que $[x_{n+1-i}, x_{n+q+2-i}]$, pour les premiers v de ces i.

Lorsque n est impair, nous distinguons les cinq cas suivants:

a′) $\bar{m}_0 \leqq (q + 1)(r - 1)$,
b′₁) $(q + 1)(r - 1) < \bar{m}_0 \leqq \frac{1}{2}(n - 1)$,
b′₂) $\bar{m}_0 = \frac{1}{2}(n + 1)$,
c′) $\frac{1}{2}(n + 1) < \bar{m}_0 \leqq \frac{1}{2}(n + 1) + \frac{1}{2}(s - 1)$,
d′) $\frac{1}{2}(n + 1) + \frac{1}{2}(s - 1) < \bar{m}_0 \leqq n$.

Dans le cas a′), le graphe $\bar{G}_0$ est construit de la même maniére que dans le cas a). Dans le cas b_1'), le graphe $\bar{G}_0$ sera construit de la même façon que dans le cas b) si nous remplaçons n par $n - 1$. Dans le cas b_2'), le graphe $\bar{G}_0$ aura les mêmes arêtes que le graphe du cas b_1') et, de plus, l'arête $[x_n, x_{q+1}]$. Dans le cas c′) soit $\bar{m}_0 = \frac{1}{2}(n + 1) + v$, où $0 < v \leqq \frac{1}{2}(s - 1)$. Le graphe $\bar{G}_0$ aura alors les mêmes arêtes que dans le cas a′) et, de plus, les arêtes $[x_n, x_{q+1}]$, $[x_{n-i}, x_{n+q+1-i}]$ pour $1 \leqq i \leqq v$, et $[x_i, x_{[i+q+1+\frac{1}{2}(s-1)-\frac{1}{2}v]}]$ pour $i = 2(q + 1)(r - 1) + i_2$, $i_2 \leqq u$, u étant le même que dans le cas b). Dans le cas d′), soit $\bar{m}_0 = \frac{1}{2}(n + 1) + v$. Nous relions par des arêtes les couples $[x_i, x_j]$ où $i \neq j$, $|j - i| \leqq q$, $[x_i, x_{i+q+1}]$ où $i = 2i_1(q + 1) + i_2$ avec $i_1 \leqq r - 1$, $i_2 \leqq q + 1$, ainsi que $[x_{n-i}, x_{n+q+1-i}]$ pour i comme au d) et $[x_n, x_{q+1}]$. Toutefois, nous faisons exception du cas où $q = 1$, $n = 4a + 2$ (a entier). Pour $\bar{m} = \frac{3}{2}n$, le graphe $\bar{G}_0$ a les mêmes arêtes que dans le cas b), mais au lieu des arêtes $[x_{n-5}, x_{n-2}]$, $[x_{n-4}, x_{n-1}]$, $[x_{n-3}, x_n]$, il a les arêtes $[x_{n-5}, x_{n-3}]$, $[x_{n-4}, x_{n-1}]$, $[x_{n-2}, x_n]$.

Nous allons démontrer maintenant que le graphe $\bar{G}_0$ ainsi construit est complément d'un graphe G_0 pour lequel $\omega = n - k_0 - 2$. M étant un ensemble de sommets, $M \subset X_0$, nous écrivons $M_1 = \bigcap_{x \in M} \bar{\Gamma}_0 x \dot{-} M$, $M_2 = M \cup \bigcap_{x \in M} \bar{\Gamma}_0 x$. Par μ, μ_1, μ_2 nous désignons les nombres d'éléments des ensembles M, M_1, M_2, respectivement. Il s'agit alors de trouver la valeur maximum de μ_2. Or, nous voyons que dans chaque cas, il y a seulement des sommets de degré k_0 ou $k_0 + 1$, de sorte que pour tout x_1 nous avons $\bar{\Gamma}_0 x_i = H(x_i) \cup K(x_i)$ où $H(x_i) = \{x_{i-q}, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+q}\}$, et $K(x_i)$ est vide ou ne contient qu'un seul élément si $k_0 = 2q$; il en contient un ou deux si $k_0 = 2q + 1$. Supposons donc d'abord $k_0 = 2q$. Pour $M^{(1)} = \{x_i\}$ nous avons $K(x_i) = \emptyset$, ou bien $K(x_i) = \{x_z\}$ avec un indice z qui ne figure pas parmi les nombres $i - q, \ldots, i + q$. Il en résulte donc $\mu_2^{(1)} \leqq k_0 + 2$. Soit maintenant $M^{(2)} = \{x_i, x_{i+l}\}$ où $0 < l \leqq \frac{1}{2}n$. Si $x_{i+l} \in \bar{\Gamma}_0 x_i$, alors $M_2^{(2)} \subset M_2^{(1)}$, d'où $\mu_2^{(2)} \leqq \mu_2^{(1)} \leqq k + 2$. Si $x_{i+l} \notin \bar{\Gamma}_0 x_i$, cela signifie que $l > q$. Alors deux cas sont possibles: ou bien parmi les sommets $x_{i+l+1}, \ldots, x_{i+l+q}$ il y en a qui soient identiques à quelques-uns des sommets $x_{i-q}, \ldots, x_{i-1}$, ou bien il n'y en a pas. Dans le premier cas, il est évident qu'il y a parmi les sommets $x_{i+1}, \ldots, x_{i+q}$ certains sommets figurant également parmi $x_{i+l-q}, \ldots, x_{i+l-1}$. Il en résulte donc $X \dot{-} H(x_i) \subset \bar{\Gamma}_0 x_{i+l}$, $X \dot{-} H(x_{i+l}) \subset \bar{\Gamma}_0 x_i$. Or, les ensembles $X - H(x_i)$, $X - H(x_{i+l})$ ont $n - k_0 - 1$ éléments chacun. L'ensemble $H(x_i) \cap H(x_{i+l})$ a donc $n - 2(n - k_0 - 1) = 2k_0 - n + 2$ éléments. Or, $M_2^{(2)}$ ne peut avoir que quatre sommets de plus que $H(x_i) \cap H(x_{i+l})$; c'est l'ensemble $[\{x_i\} \cup \{x_{i+l}\} \cup K(x_i) \cup K(x_{i+l})] \dot{-} [H(x_i) \cap H(x_{i+l})]$. Donc $M_2^{(2)}$ a $2k_0 - n + 6$ éléments au maximum. Pour que nous ayons $2k_0 - n + 6 > k_0 + 2$, il faudrait que $k_0 > n - 4$, c'est-à-dire $k_0 \geqq n - 3$. Mais cela signifierait que $n - 3 < 2\bar{m}/n$, donc $m < n$. Nous reviendrons plus tard à ce cas-ci; à présent nous supposons $m > n$; c'est pour ce cas que nous avons construit le graphe $\bar{G}_0$.

Dans le second cas un seul des sommets $x_{i-q}, \ldots, x_{i-1}$ peut appartenir à $M_{(2)}^2$ (s'il forme $H(x_{i+l})$). Pour $q > 1$, $\mu_2^{(2)}$ n'est donc pas plus grand que $k_0 + 2$. Pour $q \leqq 1$, nous pouvons le démontrer également, en analysant les cas particuliers. Nous procédonc de manière analogue pour $k_0 = 2q + 1$ et pour les ensembles de sommets que nous obtenons en ajoutant de nouveaux sommets à $M_2^{(2)}$.

Dans le graphe $\bar{G}_0$, nous avons donc $\omega = n - k_0 - 2$. Si $2\bar{m}/n$ est entier, on a $k_0 = 2\bar{m}/n - 1$, donc $\omega = n - 2\bar{m}/n - 1 = 2m/n$; si $2\bar{m}/n$ n'est pas entier, on a

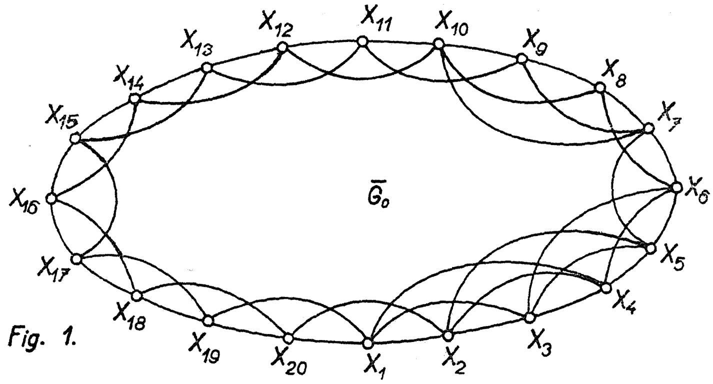

Fig. 1.

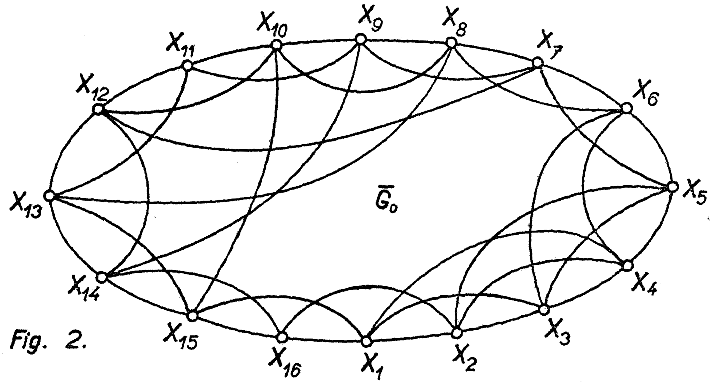

Fig. 2.

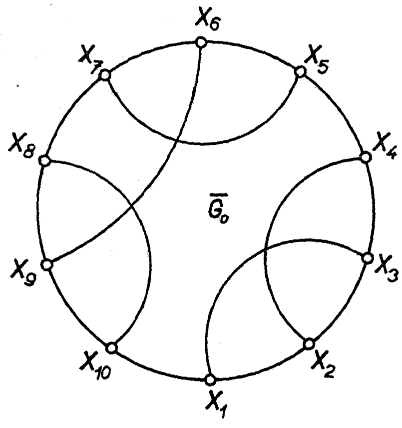

Fig. 3.

$k_0 = [2\overline{m}/n]$, donc $\omega = n - [2\overline{m}/n] - 2 = [2m/n]$; dans les deux cas on a $m > n$. Si $m = n$, il est possible de construir un graphe G_0 aux arêtes $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout i, donc avec $\omega = 2$, ce qui est la valeur maximum. Si $m = n - 1$, il est possible, comme on le sait bien, de construir toujours un graphe G_0 qui est un arbre, donc avec $\omega = 1$. Si enfin $m < n - 1$, le graphe correspondant n'est évidemment pas connexe, donc $\omega = 0$. Nos résultats peuvent donc être exprimés sous forme d'un théorème:

Théorème. *Le nombre de connexité maximum d'un graphe de n sommets et de m arêtes est égal à* $[2m/n]$ *si* $m \geqq n - 1$, *et à zéro si* $m < n - 1$.

Les figures 1, 2 et 3 donnent trois exemples de graphes $\overline{G}_0$; la fig. 1 correspond à $n = 20$, $\overline{m} = 45$, la fig. 2 à $n = 16$, $\overline{m} = 39$, enfin le graphe de la fig. 3 à $n = 10$ et $\overline{m} = 15$.

Littérature

[1] *C. Berge*: Théorie des graphes et ses applications. Paris 1958.

Výtah

MAXIMÁLNÍ STUPEŇ SOUVISLOSTI GRAFU O DANÉM POČTU UZLŮ A HRAN

BOHDAN ZELINKA, Liberec

V tomto článku je rozřešen problém, který položil C. BERGE v [1]: Jaký je maximální stupeň souvislosti grafu o m hranách a n uzlech? (Stupeň souvislosti grafu je nejmenší počet uzlů, které je třeba odstranit, aby graf přestal být souvislý.) V článku se dochází k výsledku, že pro $m \geqq n - 1$ je tento maximální stupeň souvislosti roven $[2m/n]$, pro $m < n - 1$ je roven nule.

Резюме

МАКСИМАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ СВЯЗНОСТИ ГРАФА С ДАННЫМ ЧИСЛАМИ ВЕРШИН И РЕБЕР

БОГДАН ЗЕЛИНКА (Bohdan Zelinka), Либерец

В этой статье разрешена проблема, которую задал К. Берж в [1]: Какова максимальная степень связности графа с m ребрами и n вершинами? (Степень связности графа — это наименьшее число вершин, которые надо удалить, чтобы граф перестал быть связным.) В статье доказано, что для $m \geqq n - 1$ эта максимальная степень связности равна $[2m/n]$, для $m < n - 1$ равна нулю.