ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 93 * PRAHA 14. 11. 1968 * ČÍSLO 4

K PROBLEMATICE ROZŠIŘOVÁNÍ LINEÁRNÍCH OPERACÍ NA MODULECH

FRANTIŠEK CHARVÁT, Praha

(Došlo 12. května 1967)

Označení. Symboly P, Q rozumíme moduly (lineární prostory) nad tělesem K. Symboly R_ν rozumíme podmoduly modulu P, $\nu \in M$ (množina indexů). Elementy P, resp. Q, resp. K značíme malými latinskými písmeny z konce abecedy x, y, z apod., resp. malými latinskými písmeny ze začátku abecedy a, b, c apod., resp. malými řeckými písmeny α, β, γ apod. Lineární operátory z modulu P do modulu Q (tj. definované na podmodulu modulu P a s hodnotami v Q) – dále jen operátory – značíme velkými latinskými písmeny za začátku abecedy A, B, C apod. Definiční obory operátorů značíme symbolem def, tj. např. modul, na němž je definován operátor A značíme def A. Lineární obaly podmnožin modulu P značíme hranatými závorkami.

Definice 1. Nechť Φ je zobrazení P do exp Q. Operátor A nazveme Φ-rozšiřitelný, platí-li: existuje-li R_1 takový, že

$$x \in R_1 \Rightarrow A(x) \in \Phi(x)\,,$$

potom pro libovolný $R_2 \supset R_1$ existuje operátor B tak, že

$$x \in R_1 \Rightarrow A(x) = B(x)\,, \quad x \in R_2 \Rightarrow B(x) \in \Phi(x)\,. \tag{1}$$

Definice 2. Nechť Φ je zobrazení P do exp Q. Toto zobrazení nazveme lineárně pokrývající P vzhledem ke Q, platí-li: je-li A (libovolný) takový, že

$$x \in R_1 \Rightarrow A(x) \in \Phi(x),$$

potom ke každému y existuje a takové, že platí:

$$A(x) + \lambda a \in \Phi(x + \lambda y) \tag{2}$$

pro všechna $x \in R_1$ a $\lambda \in K$.

Poznámka 1. Je zřejmé, že v definici 1 je implicite zahrnut předpoklad $R_1 \subset \subset \operatorname{def} A$, $R_2 \subset \operatorname{def} B$; podobně v definici 2 opět $R_1 \subset \operatorname{def} A$.

Věta 1. *Nechť Φ je zobrazení P do $\exp Q$. Potom každý operátor z P do Q je Φ-rozšiřitelný právě tehdy, je-li Φ lineárně pokrývající P vzhledem ke Q.*

Důkaz. Nechť každý operátor z P do Q je Φ-rozšiřitelný. Nechť R_1 je takový, že $x \in R_1 \Rightarrow A(x) \in \Phi(x)$. Nechť $y \in P$. Potom nastane právě jeden z případů:

$$\text{a)} \quad y \in R_1 , \qquad \text{b)} \quad y \notin R_1 .$$

Nechť nastane a). Potom $x + \lambda y \in R_1$ pro všechna $x \in R_1$ a $\lambda \in K$. Podle předchozího v tomto případě platí:

$$A(x) + \lambda A(y) = A(x + \lambda y) \in \Phi(x + \lambda y)$$

pro všechna $x \in R_1$ a $\lambda \in K$; označíme-li tedy $a = A(y)$, je podmínka (2) splněna.

Nechť nastane b). Potom $[R_1 \cup y] \supsetneqq R_1$. Každý element $z \in [R_1 \cup y]$ lze jednoznačně psáti ve tvaru $z = x + \lambda y$, kde $x \in R_1$, $\lambda \in K$. Podle předpokladu existuje operátor B takový, že platí (1), přičemž $R_2 = [R_1 \cup y]$. Platí: $B(z) = B(x) + \lambda B(y)$; tedy označíme-li $a = B(y)$, platí:

$$A(x) + \lambda a = B(x) + \lambda a = B(x + \lambda y) \in \Phi(x + \lambda y)$$

pro všechna $x \in R_1$ a $\lambda \in K$, tudíž podmínka (2) je splněna.

Tím je důkaz jedním směrem proveden.

Nechť Φ je lineárně pokrývající P vzhledem ke Q. Nechť R_1 je takový, že platí $x \in R_1 \Rightarrow A(x) \in \Phi(x)$. Dále nechť $R_2 \supset R_1$. Nechť $\mathfrak{B}$ je systém všech operátorů na všech podmodulech modulu R_2 takových, že

$$C \in \mathfrak{B} \Rightarrow x \in \operatorname{def} C \Rightarrow C(x) \in \Phi(x) .$$

$\mathfrak{B}$ je podle předpokladu neprázdný, neboť $A \in \mathfrak{B}$. Na $\mathfrak{B}$ zavedeme relaci částečného uspořádání takto: $D, E \in \mathfrak{B}$, $D < E$ právě tehdy, platí-li:

$$\operatorname{def} D \subset \operatorname{def} E , \quad x \in \operatorname{def} D \Rightarrow D(x) = E(x) .$$

Dále zaveďme: je-li $D, E \in \mathfrak{B}$ takové, že $D < E$, potom $D \cup E = E$.

Takto definovaný systém $\mathfrak{B}$ splňuje předpoklady Zornova lemmatu, neboť je-li $\{F_i\}_{i \in I}$ monotonní podsystém systému $\mathfrak{B}$, potom $F = \bigcup_{i \in I} F_i \in \mathfrak{B}$ a $F_i < F$ pro každé $i \in I$.

Tedy existuje $B \in \mathfrak{B}$ takový, že $A < B$ a je-li C takový, že $B < C$, potom $B = C$.

Dokážeme, že B je definován na R_2. Postupujme sporem. Nechť B je definován na $R_3 \subsetneqq R_2$. To znamená, že existuje $y \in R_2$ takový, že $R_3 \subsetneqq [R_3 \cup y] \subset R_2$. Jelikož $B \in \mathfrak{B}$ platí: existuje b takový, že: $B(x) + \lambda b \in \Phi(x + \lambda y)$ pro všechna $x \in R_3$ a $\lambda \in K$.

Každý element $z \in [R_3 \cup y]$ lze jednoznačně psát ve tvaru $z = x + \lambda y$, kde $x \in R_3$, $\lambda \in K$. Definujme na $[R_3 \cup y]$ operátor C následujícím způsobem:

$$C(z) = C(x + \lambda y) = B(x) + \lambda b\,.$$

Platí:

$$x \in R_3 \Rightarrow C(x) = B(x)\,, \quad z \in [R_3 \cup y] \Rightarrow C(z) \in \Phi(z)\,.$$

Tedy $C \in \mathfrak{B}$, $B < C$, $B \neq C$, což je spor. Tedy B je definován na R_2.

Tím je důkaz věty proveden.

Úmluva. V dalším bude K znamenat vždy těleso reálných či komplexních čísel s normou rovnou absolutní hodnotě.

Definice 3. Nechť $k > 0$. Nechť P, Q jsou normované moduly. Řekneme, že Q je k-modulově centrovaný vzhledem k P, platí-li: je-li $S_{A,R}(x, y)$ systém všech uzavřených koulí v Q takových, že středy jeho elementů jsou prvky $A(x)$, $x \in R$ a poloměry elementů o středu $A(x)$ jsou rovny $k\|x + y\|$, kde $y \in P$, pro nějž platí: $S_{A,R}(x_1, y) \cap \cap\, S_{A,R}(x_2, y) \neq \emptyset$ pro libovolné $x_1, x_2 \in R$ a libovolné (pevné) $y \in P$, potom $\bigcap_{x \in R} S_{A,R}(x, y) \neq \emptyset$ pro libovolné (pevné) $y \in P$.

Věta 2. *Nechť* $k > 0$. *Nechť* P, Q *jsou normované moduly. Potom zobrazení* Φ P *do* exp Q, *definované vztahem*

$$x \in P \Rightarrow \Phi(x) = \{a;\ \|a\| \leqq k\|x\|\} \tag{3}$$

je lineárně pokrývající P *vzhledem ke* Q *právě tehdy, je-li* Q k*-modulově centrovaný vzhledem k* P.

Důkaz. Nechť zobrazení (3) je lineárně pokrývající P vzhledem ke Q. Nechť $S_{A,R}(x, y)$ je systém uzavřených koulí v Q splňující předpoklady definice 3.

Z předpokladu $S_{A,R}(x, 0) \cap S_{A,R}(0, 0) \neq \emptyset$ plyne $\|A(x)\| \leqq k\|x\|$ pro libovolné $x \in R$, tudíž $x \in R \Rightarrow A(x) \in \Phi(x)$. Vzhledem k tomu, že Φ je lineárně pokrývající P vzhledem ke Q platí, že pro každé $y \in P$ existuje $a \in Q$ takové, že $\|A(x) + \lambda a\| \leqq \leqq k\|x + \lambda y\|$ pro všechna $x \in R$ a $\lambda \in K$. Poslední vztah však říká, že $-a \in \in \bigcap_{x \in R} S_{A,R}(x, y)$, tudíž pro každé $y \in P$ platí $\bigcap_{x \in R} S_{A,R}(x, y) \neq \emptyset$, tedy Q je k-modulově centrovaný vzhledem k P.

Nechť Q je k-modulově centrovaný vzhledem k P. Nechť A je takový, že

$$x \in R \Rightarrow \|A(x)\| \leqq k\|x\|\,.$$

Označme $S_{A,R}(x, y)$ systém všech uzavřených koulí v Q takových, že středy jeho elementů jsou prvky $A(x)$, $x \in R$ a poloměry elementů o středu $A(x)$ jsou rovny $k\|x + y\|$, kde $y \in P$.

Dokážeme, že takto definovaný systém $S_{A,R}(x, y)$ splňuje předpoklady definice 3, tj. platí $S_{A,R}(x_1, y) \cap S_{A,R}(x_2, y) \neq \emptyset$ pro libovolné $x_1, x_2 \in R$ a libovolný (pevný) $y \in P$. Stačí dokázat, že součet poloměrů daných koulí je větší nebo roven vzdálenosti jejich středů, což vzhledem k předpokladů platí, neboť

$$k(\|x_1 + y\| + \|x_2 + y\|) \geqq k\|x_1 - x_2\| \geqq \|A(x_1 - x_2)\| = \|A(x_1) - A(x_2)\| .$$

Tedy platí: $\bigcap_{x \in R} S_{A,R}(x, y) \neq \emptyset$ pro každé $y \in P$, tzn. existuje alespoň jedno $-a \in Q$ takové, že platí: $\|A(x) + a\| \leqq k\|x + y\|$ pro všechna $x \in R$. Z poslední nerovnosti plyne pro všechna $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$,

$$|\lambda| \left\| A\left(\frac{x}{\lambda}\right) + a \right\| \leqq |\lambda|\, k \left\| \frac{x}{\lambda} + y \right\|$$

pro všechna $x \in R$, z čehož

$$\|A(x) + \lambda a\| \leqq k\|x + \lambda y\|$$

pro všechna $x \in R$ a všechna $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Jelikož však poslední vztah platí triviálně i pro $\lambda = 0$, je zobrazení Φ, definované vztahem (3) lineárně pokrývající P vzhledem ke Q. Tím je důkaz věty proveden.

P o z n á m k a 2. Modul reálných čísel (s normou rovnou absolutní hodnotě) je k - modulově centrovaný z každého normovaného modulu nad tělesem reálných čísel pro libovolné $k > 0$. Důkaz tohoto tvrzení je důsledkem obecnějšího tvrzení pro modul reálných čísel: nechť S je libovolný systém uzavřených koulí v modulu reálných čísel (s normou rovnou absolutní hodnotě) takový, že jeho dva libovolné elementy mají neprázdný průnik. Potom průnik všech elementů systému S je neprázdný. Důkaz tohoto tvrzení je snadný. Označme systém S $\{I_\mu\}_{\mu \in N}$, při čemž $I_\mu = \langle p_\mu, q_\mu \rangle$. Označme $p = \sup_{\mu \in N} p_\mu$, $q = \inf_{\mu \in N} q_\mu$. Zřejmě platí $p \leqq q$, neboť v opačném případě by existovala μ_1, μ_2 taková, že $p_{\mu_1} > q_{\mu_2}$, tudíž $I_{\mu_1} \cap I_{\mu_2} = \emptyset$, což by byl spor s předpokladem věty. Tedy $I = \langle p, q \rangle \neq \emptyset$ a platí $I \subset I_\mu$ pro každé $\mu \in N$, tudíž $\bigcap_{\mu \in N} I_\mu \neq \emptyset$. Tím je důkaz proveden.

P o z n á m k a 3. Poznámka 2 spolu s větou 2 dávají okamžitě Hahn-Banachovu větu o rozšíření reálných funkcionálů se zachováním normy.

V dalším poukážeme na možnost rozšiřování lineárních operátorů na jistých typech normovaných modulů nad tělesem komplexních čísel.

Označení. Nechť P je modul nad tělesem komplexních čísel. Symbolem $\tilde{P}$ značíme modul P chápaný jako modul nad tělesem reálných čísel. Podobně $\tilde{R}_\nu$, $\nu \in M$ (množina indexů) znamenají podmoduly R_ν, $\nu \in M$ chápané jako moduly nad tělesem reálných čísel.

Nechť Q je modul nad tělesem komplexních čísel s involucí (viz např. [1]). Symbolem Re Q značíme modul všech reálných elementů modulu Q (nad tělesem reálných čísel). Reálnou část $a \in Q$ značíme $\operatorname{Re} a$, imaginární část $a \in Q$ značíme $\operatorname{Im} a$. Zřejmě $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \operatorname{Re} Q$ pro libovolné $a \in Q$.

Lineární obal podmnožin modulu P ve smyslu komplexního lineárního obalu značíme hranatými závorkami, ve smyslu reálného lineárního obalu značíme hranatými závorkami s vlnkou.

Definice 4. Modul Q nad tělesem komplexních čísel nazveme komplexním normovaným modulem s involucí, platí-li: Q je normovaný modul nad tělesem komplexních čísel s involucí; pro normu libovolného prvku $a \in Q$ platí:

$$\|a\| = \max_{t \in \Delta} \|\operatorname{Re} a \cos t + \operatorname{Im} a \sin t\| , \tag{4}$$

kde Δ je množina reálných čísel.

Věta 3. *Nechť P je normovaný modul nad tělesem komplexních čísel. Nechť Q je komplexní normovaný modul s involucí. Nechť Φ je zobrazení P do* exp Q *definované vztahem* (3). *Nechť $\tilde{\Phi}$ je zobrazení $\tilde{P}$ do* exp Re Q *definované vztahem:*

$$x \in \tilde{P} \Rightarrow \tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) \cap \operatorname{Re} Q . \tag{5}$$

Potom Φ je lineárně pokrývající P vzhledem ke Q, je-li $\tilde{\Phi}$ lineárně pokrývající $\tilde{P}$ vzhledem k Re Q.

Důkaz. Dokážeme nejprve následující pomocná tvrzení:

Lemma 1. *Nechť P je modul nad tělesem komplexních čísel. Nechť Q je modul nad tělesem komplexních čísel s involucí. Potom pro libovolný operátor A platí:* $x \in \operatorname{def} A \Rightarrow \operatorname{Im} A(x) = - \operatorname{Re} A(ix)$, *při čemž* Re A *je operátor z $\tilde{P}$ do* Re Q. *Naopak, je-li* Re A *operátor z $\tilde{P}$ do* Re Q, *(definovaný na podmodulu P!), potom předpis*

$$x \in \operatorname{def} \operatorname{Re} A \Rightarrow A(x) = \operatorname{Re} A(x) - i \operatorname{Re} A(ix)$$

definuje operátor z P do Q.

Důkaz plyne okamžitě z podmínky $A(ix) = i\,A(x)$ a z vlastností lineárních operátorů.

Lemma 2. *Nechť $k > 0$. Nechť P je normovaný modul nad tělesem komplexních čísel. Nechť Q je komplexní normovaný modul s involucí. Potom platí:*

$$x \in R \Rightarrow \|C(x)\| \leqq k\|x\| \Leftrightarrow x \in \tilde{R} \Rightarrow \|\operatorname{Re} C(x)\| \leqq k\|x\| .$$

Důkaz. Prvým směrem je tvrzení triviální, viz (4). Nechť platí:

$$x \in \tilde{R} \Rightarrow \|\operatorname{Re} C(x)\| \leqq k\|x\| .$$

Jelikož $xe^{-it} \in \tilde{R}$ pro všechna reálná t, platí:

$$\|\operatorname{Re} C(xe^{-it})\| \leqq k\|xe^{-it}\| = k\|x\| ,$$

z čehož po úpravě dostaneme

$$\|\operatorname{Re} C(x)\cos t - \operatorname{Re} C(ix)\sin t\| \leqq k\|x\|$$

pro libovolné reálné t, tudíž platí:

$$\|C(x)\| = \max_{t\in\Delta} \|\operatorname{Re} C(x)\cos t + \operatorname{Im} C(x)\sin t\| =$$
$$= \max_{t\in\Delta} \|\operatorname{Re} C(x)\cos t - \operatorname{Re} C(ix)\sin t\| \leqq k\|x\|,$$

kde Δ je množina reálných čísel. Tím je důkaz proveden.

Lemma 3. *Nechť P je modul nad tělesem komplexních čísel. Potom*

$$\widetilde{[\widetilde{[R \cup y]} \cup iy]} = \widetilde{[R \cup y]}.$$

Důkaz je zřejmý.

Nyní přistupme k důkazu věty.

Nechť $\tilde{\Phi}$ je lineárně pokrývající $\tilde{P}$ vzhledem k Re Q. Nechť platí:

$$x \in R \Rightarrow \|A(x)\| \leqq k\|x\|.$$

Nechť $y \in P$. Potom mohou nastat dva případy: buď $y \in R$ nebo $y \notin R$. Nechť $y \in R$. Potom $x + \lambda y \in R$ pro všechna $x \in R$ a $\lambda \in K$, tudíž platí:

$$x \in R \Rightarrow \|A(x) + \lambda a\| \leqq k\|x + \lambda y\|$$

pro všechna $\lambda \in K$, přičemž $a = A(y)$.

Nechť platí $y \notin R$. Na základě lemmatu 2 platí:

$$x \in R \Rightarrow \|\operatorname{Re} A(x)\| \leqq k\|x\|.$$

Vzhledem k předpokladu platí: existuje $a_1 \in \operatorname{Re} Q$ tak, že

$$\|\operatorname{Re} A(x) + \lambda_1 a_1\| \leqq k\|x + \lambda_1 y\|$$

pro všechna $x \in R$ a všechna reálná λ_1.

Jelikož $\operatorname{Re} A(x) + \lambda_1 a_1$ lze chápat jako operátor na $\widetilde{[R \cup y]}$ do Re Q a jelikož zřejmě $iy \notin \widetilde{[R \cup y]}$, platí opětovným využitím předpokladu: existuje $a_2 \in \operatorname{Re} Q$ takové, že

$$\|\operatorname{Re} A(x) + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2\| \leqq k\|x + \lambda_1 y + \lambda_2 iy\|$$

pro všechna $x \in R$ a všechna reálná λ_1, λ_2. $\operatorname{Re} A(x) + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ lze chápat jako operátor na $\widetilde{[\widetilde{[R \cup y]} \cup iy]}$ do Re Q. Na $[R \cup y]$ definujeme operátor B předpisem: je-li $z = x + \lambda y$, kde $x \in R$ a $\lambda \in K$, potom $B(z) = A(x) + \lambda(a_1 - ia_2)$.

Označíme-li $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ platí:

$$z \in [R \cup y] \Rightarrow \operatorname{Re} B(z) = \operatorname{Re} A(x) + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 .$$

Využitím lemmat snadno dostáváme následující tvrzení:

$$z \in [R \cup y] \Rightarrow \|B(z)\| \leqq k\|z\| , \quad \text{tj.} \quad \|A(x) + \lambda a\| \leqq k\|x + \lambda y\|$$

pro všechna $x \in R$ a všechna $\lambda \in K$, kde $a = a_1 - ia_2$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, tudíž Φ je lineárně pokrývající P vzhledem ke Q. Tím je důkaz věty proveden.

Poznámka 4. Z poznámky 2 a z věty 3 plyne okamžitě věta o rozšíření komplexních funkcionálů se zachováním normy (viz [2]), neboť je zřejmé že modul komplexních čísel je k-modulově centrovaný z každého normovaného modulu nad tělesem komplexních čísel pro libovolné $k > 0$. Poslední tvrzení je důsledkem věty 2,3 a poznámky 2 a skutečnosti, že modul komplexních čísel s normou rovnou absolutní hodnotě lze chápat jako komplexní normovaný prostor s involucí.

Seznam citované literatury

[1] *Канторович, Акилов:* Функциональный анализ в нормированных пространствах, Москва 1959.

[2] *Сухомлинов:* О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве. Мат. Сборник *3* (1938), 353—358.

[3] *Nachbin:* A theorem of Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., *68* (1950), 28—46.

Adresa autora: Praha 3, Ambrožova 13.

Summary

TO THE PROBLEM OF THE EXTENSION OF LINEAR OPERATORS ON PRODUCTS

FRANTIŠEK CHARVÁT, Praha

This paper is concerned with the problem of the extension of linear operators with preserving a certain property, the so called Φ-extensibility. The general part deals with the problem of the extension of linear operators on linear spaces over an arbitrary field. Theorem 2 contains the necessary and sufficient condition for the extension of linear operators on a linear normed space over the field of real or complex numbers with the same norm. The corollary of this Theorem is the classical Hahn-Banach Theorem. Theorem 3 gives a certain sufficient condition for the extension of linear operators on the so called complex normed linear spaces with the same norm. This Theorem is a generalization of the so called Suchomlinoff Theorem on the extension of a complex functional with the same norm.