Časopis pro pěstování matematiky

Vratislav Pudej

Über die Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen gerader Ordnung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 4, 401--425

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117671`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

ÜBER DIE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN GERADER ORDNUNG

VRATISLAV PUDEI, Pardubice

(Eingelangt am 28. Februar 1968)

In der Arbeit werden Eigenschaften reeller Lösungen von einigen Klassen homogener linearer Differentialgleichungen der Ordnung $2n$ ($n \geqq 1$ ganz) und von mit denen adjungierter Differentialgleichungen untersucht. Die Arbeit knüpft an [1] an, wo die Eigenschaften der Lösungen der Gleichung $y^{(4)} + p(x) . y'' + q(x) . y = 0$, $p(x) \leqq 0$, $q(x) < 0$ untersucht worden sind. Es wird gezeigt, dass die Lösungen dieser Gleichung viele gemeinsame Eigenschaften nicht nur mit der selbstadjungierter Gleichung $(r(x) . y'')'' + s(x) . y = 0$, $r(x) > 0$, $s(x) < 0$ (wie es in der Arbeit [1] gezeigt wurde) bzw. deren Lösungen, sondern auch mit den Lösungen der adjungierter Gleichung zur gegebenen Gleichung haben.

I.

Zuerst geben wir einige Verallgemeinerungen der Ergebnisse von [1].

Wir betrachten die Differentialgleichung n-ter Ordnung ($n \geqq 1$ ganz)

$$(1) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) . y^{(n-i)} = 0 ,$$

wo die Koeffizienten $a_i(x) \leqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ im Intervall (a, ∞), $-\infty \leqq a$, reelle und stetige Funktionen sind.

Statt $y^{(0)}$ schreiben wir oft nur y.

Lemma 1. *Eine Lösung $y(x)$ der Gleichung (1) erfülle in einem beliebigen Punkt $b \in (a, \infty)$ die Anfangsbedingungen: $y^{(i)}(b) \geqq 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 2$, $y^{(n-1)}(b) > 0$. Dann sind für $x \in (b, \infty)$ die folgenden Ungleichungen erfüllt:*

$$(2) \qquad y^{(k)}(x) > 0 , \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

und $y^{(n)}(x) \geqq 0$. *Daher folgt dann:* $\lim\limits_{x \to \infty} y^{(i)}(x) = \infty$, $i = 0, 1, \ldots, n - 2$ *und* $y^{(n-1)}(x)$ *ist für* $x >$ *nichtfallend.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass die Funktion $f(x) = y \,.\, y' \,.\, y'' \ldots y^{(n-1)}$ in einem Punkt des Intervalles (b, ∞) verschwindet. Dann, dem Mittelwertsatz nach, gibt es zumindest einen Punkt $c \in (b, \infty)$ so, dass $y^{(n-1)}(c) = 0$ ist. (Die Funktion $y(x)$ hat im Intervall (a, ∞) stetige Ableitungen bis zu der n-ten Ordnung.) Wenn c der erste derartige Punkt rechts vom Punkt $x = b$ ist, dann gelten die Ungleichungen (2) im Intervall (b, c). Daher und der Gleichung (1) nach ist $y^{(n)}(x) \geqq 0$ für $x \in \langle b, c \rangle$ und also ist die Funktion $y^{(n-1)}(x)$ in diesem Intervall nichtfallend. Weiter muss dann $0 < y^{(n-1)}(b) \leqq y^{(n-1)}(c) = 0$ sein und dieses gibt einen Widerspruch. Unmittelbar von der Gleichung (1) und von den Ungleichungen (2) ergibt sich dann, dass $y^{(n)}(x) \geqq$ $\geqq 0$ für $x \in (b, \infty)$ ist. Das Lemma ist bewiesen.

Führt man die Substitution $x = b + d - t$, wo d eine beliebige Zahl grösser als a ist, ein, übergeht die Gleichung (1) wieder in eine lineare Gleichung n-ter Ordnung von einem ähnlichen Typ mit der Variablen t. Daher und vom Lemma 1 folgt

Lemma 2. *Für die Koeffizienten der Gleichung* (1) *seien die Ungleichungen* $(-1)^{n-i} \,.\, a_i(x) \leqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *erfüllt und seien diese Koeffizienten in* (a, ∞) *stetige Funktionen. Die Lösung* $y(x)$ *dieser Gleichung erfülle in einem Punkt* $b \in (a, \infty)$ *die Anfangsbedingungen:* $(-1)^k y^{(k)}(b) \geqq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 2$, $(-1)^{n-1} \,.\, y^{(n-1)}(b) > 0$. *Dann sind für* $x \in (a, b)$ *die Ungleichungen* $(-1)^j \,.$ $.\, y^{(j)}(x) > 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ *und* $(-1)^n \,.\, y^{(n)}(x) \geqq 0$ *erfüllt.*

Von den Lemmas 1 und 2 folgen nun die folgenden zwei Behauptungen für Gleichungen gerader Ordnung

$$y^{(2n)} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \,.\, y^{(2n-2k)} = 0\,, \tag{3}$$

wo $n \geqq 1$ und die Funktionen $b_k(x) \leqq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, $b_n(x) < 0$ sind reell und für $x \in (a, \infty)$ stetig.

Lemma 3. *Eine nichttriviale Lösung der Gleichung* (3) *erfülle im Punkt* $b \in$ $\in (a, \infty)$ *die Anfangsbedingungen:* $y^{(i)}(b) \geqq 0$, $i = 0, 1, \ldots, 2n - 1$ (*mindestens einer dieser Werte sei positiv*). *Dann gelten für* $x \in (b, \infty)$ *die Ungleichungen:*

$$y^{(i)}(x) > 0\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 2n\,. \tag{4}$$

Daher folgt dann: $\lim\limits_{x \to \infty} y^{(i)}(x) = \infty$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 2$ *und die Funktion* $y^{(2n-1)}(x)$ *ist für* $x \in (b, \infty)$ *wachsend.*

Lemma 4. *Eine nichttriviale Lösung der Gleichung* (3) *erfülle im Punkt* $b \in (a, \infty)$ *die Anfangsbedingungen:* $(-1)^i \,.\, y^{(i)}(b) \geqq 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 1$ (*mindestens* *einer dieser Werte sei von Null verschieden). Dann gelten für $x \in (a, b)$ die Ungleichungen*

$$(5) \qquad (-1)^i \,.\, y^{(i)}(x) > 0\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 2n\,.$$

Satz 5. *Es gibt ein Fundamentalsystem $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2n}$ von Lösungen der Gleichung (3), für welche $u_i^{(2k)}(x) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, für $x \in (a, \infty)$ und $u_i^{(2j-1)}(x) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, für $x \in \langle c, \infty)$ ist, wobei $c > a$. Daher folgt dann: $\lim_{x \to \infty} u_i^{(r)}(x) = \infty$, $r = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 2$ und die Funktionen $u_i^{(2n-1)}(x)$ sind für $x > c$ wachsend.*

Beweis. Sei $y(x)$ eine Lösung der Gleichung (3), welche die Anfangsbedingungen $y^{(2l)}(b) > 0$, $y^{(2l+1)}(b) = 0$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, $b > a$ erfüllt. Nach den Lemmas 3 und 4 ist

$$(6) \qquad \begin{aligned} &y^{(2k)}(x) > 0\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n\,, \quad \text{für} \quad x \in (a, b) \quad \text{und} \\ &y^{(2j-1)}(x) > 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,, \quad \text{für} \quad x \in (b, \infty)\,. \end{aligned}$$

Sei $c > b(> a)$. Wir konstruieren das System $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2n}$ von Lösungen der Gleichung (3), welche im Punkt $x = c$ den Anfangsbedingungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} &u_i^{(2l)}(c) > y^{(2l)}(c) \quad (>0)\,, \\ &0 < u_i^{(2l+1)}(c) < y^{(2l+1)}(c) \end{aligned}$$

genügen. Dem Lemma 3 nach ist $u_i^{(s)}(x) > 0$, $s = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, für $x \geqq c$. $\{w_i(x)\}_{i=1}^{2n} = \{u_i(x) - y(x)\}_{i=1}^{2n}$ ist ein System von Lösungen der Gleichung (3), welche im Punkt $x = c$ den Anfangsbedingungen $w_i^{(2l)}(c) > 0$, $w_i^{(2l+1)}(c) < 0$ genügen. Nach dem Lemma 4 ist also $w_i^{(2k)}(x) > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ für alle $x \in (a, c\rangle$. Daher und von den Ungleichungen (6) und (7) folgt, dass $u_i^{(2k)}(x) > 0$ für alle $x \in (a, c\rangle$ ist. Also ist $u_i^{(2k)}(x) > 0$ für $x \in (a, \infty)$ und $u_i^{(2j-1)}(x) > 0$ für $x \in \langle c, \infty)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Den Punkt $x = c$ und die Anfangsbedingungen für das System der Lösungen $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2n}$ kann man folgenderweise wählen (dabei müssen aber die Ungleichungen (7) erfüllt bleiben):

$$u_i(c) = a_1^{\alpha_i},\ u_i'(c) = a_2^{\alpha_i}, \ldots, u_i^{(2n-1)}(c) = a_{2n}^{\alpha_i}\,,$$

wo die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ positiv, paarweise verschieden sind und $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2n}$ gilt. Der Wert des Wronskians (im Punkt $x = c$) $W(u_1, u_2, \ldots, u_{2n})\big|_{x=c} = \left|a_p^{\alpha_i}\right|_1^{2n}$ ist von Null verschieden (vgl. Gantmacher, Krein: Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme (1960), Seite 88). Also ist $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2n}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (3). Der Satz ist bewiesen.

Ähnlicherweise beweisen wir die Behauptung:

Satz 6. *Es gibt ein Fundamentalsystem $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2n}$ von Lösungen der Gleichung (3), für welche $u_i^{(2j-1)}(x) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, für $x \in (a, \infty)$ und $u_i^{(2k)}(x) > 0$,*

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$, *für* $x \in \langle c, \infty)$ *ist, wo* $c > a$. *Daher folgt dann*: $\lim_{x\to\infty} u_i^{(r)}(x) = \infty$, $r = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 2$ *und die Funktionen* $u_i^{(2n-1)}(x)$ *sind für* $x \in \langle c, \infty)$ *wachsend.*

Beweis. Es sei $y(x)$ eine Lösung der Gleichung (3), welche im Punkt $x = b\ (> a)$ den Anfangsbedingungen: $y^{(2l)}(b) = 0$, $y^{(2l+1)}(b) > 0$, $l = 0, 1, \ldots, n - 1$ genügt. Nach den Lemmas 4 und 3 ist (es gelten zu (5) umgekehrte Ungleichungen)

$$(8) \qquad \begin{aligned} &y^{(2j-1)}(x) > 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,, \qquad \text{für} \quad x \in (a, b) \quad \text{und} \\ &y^{(2k)}(x) > 0\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n\,, \quad \text{für} \quad x \in (b, \infty)\,. \end{aligned}$$

Wir konstruieren das System $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2n}$ von Lösungen der Gleichung (3), welche im Punkt $x = c\ (> b)$ den Anfangsbedingungen

$$(9) \qquad \begin{gathered} u_i^{(2l+1)}(c) > y^{(2l+1)}(c)\ (> 0) \\ 0 < u_i^{(2l)}(c) < y^{(2l)}(c) \end{gathered}$$

genügen. Dem Lemma 3 zufolge ist $u_i^{(r)}(x) > 0$, $r = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, für $x \geqq c$. $\{w_i(x)\}_{i=1}^{2n} = \{u_i(x) - y(x)\}_{i=1}^{2n}$ ist ein System von Lösungen der Gleichung (3), die im Punkt $x = c$ folgende Anfangsbedingungen erfüllen: $w_i^{(2l+1)}(c) > 0$, $w_i^{(2l)}(c) < 0$. Also ist, nach dem Lemma 4, $w_i^{(2j-1)}(x) > 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) für $x \in (a, c\rangle$. Den Ungleichungen (8) und (9) zufolge ist also $u_i^{(2j-1)}(x) > 0$ für alle $x \in (a, c\rangle$. So ist auch $u_i^{(2j-1)}(x) > 0$ für alle $x \in (a, \infty)$ und $u_i^{(2k)}(x) > 0$ für $x \in \langle c, \infty)$. Den Punkt $x = c$ und die Anfangsbedingungen für das System $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2n}$ von Lösungen wählen wir ähnlich wie im Satz 5 (so, dass die Ungleichungen (9) gelten). Der Satz ist bewiesen.

Lemma 7. *Jede nichttriviale Lösung* $y(x)$ *der Gleichung* (3) *erfüllt in höchstens einem Punkt* $x = b\ (> a)$ *eine der folgenden Bedingungen*:

a) $y^{(i)}(b) \neq 0$, $0 \leqq i \leqq 2n - 1$ *ganzzahlig,*
$y^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, 2n - 1$.

b) $y^{(2i)}(b) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$,
$\operatorname{sgn} y'(b) = \operatorname{sgn} y'''(b) = \ldots = \operatorname{sgn} y^{(2n-1)}(b) \neq 0$.

c) $y^{(2i+1)}(b) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$,
$\operatorname{sgn} y(b) = \operatorname{sgn} y''(b) = \ldots = \operatorname{sgn} y^{(2n-2)}(b) \neq 0$.

Für $x \in (a, b) \cup (b, \infty)$ *ist* $y^{(l)}(x) \neq 0$, $l = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, $\lim_{x\to\infty} |y^{(j)}(x)| = \infty$, $j = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 2$ *und die Funktion* $y^{(2n-1)}(x)$ *ist im Intervall* (b, ∞) *streng monoton.*

Die Behauptung des Satzes folgt sofort vom Lemma 3 und vom Lemma 4. Ähnlicherweise erhalten wir die folgende Behauptung:

Lemma 8. *Jede nichttriviale Lösung $y(x)$ der Gleichung* (3) *erfüllt in höchstens einem Punkt $b \in (a, \infty)$ eine der Anfangsbedingungen:*

a) $y^{(i)}(b) = 0,\ i = 0,1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, 2n-1,$

$\operatorname{sgn} y^{(j)}(b) = \operatorname{sgn} y^{(k)}(b) \neq 0,\ 0 \leqq j < k \leqq 2n-1$ *ganzzahlig.*

b) $y^{(i)}(b) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, 2n-1,$

$0 \neq \operatorname{sgn} y^{(j)}(b) \neq \operatorname{sgn} y^{(k)}(b) \neq 0,\ 0 \leqq j < k \leqq 2n-1$ *und $k + j$ ist eine ungerade Zahl.*

Im Fall a) *ist* $y^{(l)}(x) \neq 0,\ l = 0, 1, 2, \ldots, 2n,$ *für* $x \in (b, \infty),\ \lim_{x\to\infty} |y^{(m)}(x)| = \infty,$ $m = 0, 1, 2, \ldots, 2n-2$ *und die Funktion* $y^{(2n-1)}(x)$ *ist im Intervall* (b, ∞) *streng monoton. Im Fall* b) *ist* $y^{(l)}(x) \neq 0$ *für* $x \in (a, b)$.

Daher folgt dann unmittelbar die

Folgerung 9. *Sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung* (3). *Dann existieren höchstens zwei Punkte $x = b, c$ so, dass $b < c$ $(b > a)$ und im Punkt b erfüllt die Lösung $y(x)$ die Bedingungen* b) *vom Lemma* 8 *und im Punkt $x = c$ erfüllt diese die Bedingungen* a) *vom Lemma* 8.

Folgerung 10. *Sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung* (3). *Wenn zwei Punkte $x = b, c$ mit den, in der Folgerung* 9 *angeführten, Eigenschaften existieren, dann liegen alle übrigen Nullstellen der Funktionen $y^{(l)}(x),\ l = 0, 1, \ldots, 2n,$ im Intervall (b, c).*

Lemma 11. *Es sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung* (3) *und für die Zahlen $b < c < d$ $(b > a)$ gelte:*

$$y^{(i)}(b) = 0\,,\quad 0 \leqq i \leqq 2n\,,\quad y^{(j)}(c) = 0\,,$$
$$j = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, l-1\,,$$
$$l+1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, 2n-1\,,\quad 0 \leqq k < l < m \leqq 2n-1\,,$$
$$\text{wo}\quad k + l \quad \textit{und} \quad l + m \tag{10}$$

ungerade Zahlen sind und $y^{(s)}(d) = 0,\ 0 \leqq s \leqq 2n$. Dann ist $y^{(k)}(c) \neq 0$ und $y^{(m)}(c) \neq 0$.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass immer eine nichttriviale Lösung der Gleichung (3) so existiert, dass diese in den Punkten b, c, d die $2n - 1$ gegebenen Bedingungen erfüllt. Von der allgemeinen Lösung $y(x) = \sum_{r=1}^{2n} c_r \cdot u_r(x)$, wo $\{u_r(x)\}_1^{2n}$ das Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (3) ist, und von diesen Bedingungen bekommt man dann folglich ein System von $2n - 1$ homogenen linearen Gleichungen für $2n$ Unbekannte c_r, welches immer eine nichttriviale Lösung hat. Setzen wir voraus, dass

$y^{(k)}(x) = 0$ ist. Das bedeutet, dass im Punkt $x = c$ eine von den Bedingungen vom Lemma 8 (a) oder b)) und vom Lemma 7 (a)) erfüllt ist. Also ist $y^{(i)}(x) \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$, zumindest in einem der Intervalle (a, b), (b, ∞) und dieses widerspricht den Voraussetzungen vom Lemma. Für die Voraussetzung $y^{(m)}(c) = 0$ ist der Beweis analogisch.

Lemma 12. *Es sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (3) und seien in den Punkten $b < c < d$ $(b > a)$ die Bedingungen (10) vom Lemma 11 erfüllt. Dann ist* $0 \neq \operatorname{sgn} y^{(k)}(c) \neq \operatorname{sgn} y^{(m)}(c) \neq 0$.

Beweis. Es seien die Bedingungen (10) erfüllt. Nach dem Lemma 11 ist $y^{(k)}(c) \neq 0$ und $y^{(m)}(c) \neq 0$. Setzen wir voraus, dass $\operatorname{sgn} y^{(k)}(c) = \operatorname{sgn} y^{(m)}(c) \neq 0$ (k, m sind dieselben Zahlen wie im Lemma 11) ist. Dann (nach Lemma 3 und 4) ist mindestens in einem der Intervalle (a, c), (c, ∞) die Ungleichung $y^{(r)}(x) \neq 0$, $r = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, gültig, was aber mit der Voraussetzung $y^{(i)}(b) = y^{(s)}(d) = 0$ (i, s sind dieselben Zahlen wie im Lemma 11) in einem Widerspruch steht. Das Lemma ist bewiesen.

Satz 13. *Es seien $u(x)$ und $v(x)$ nichttriviale Lösungen der Gleichung (3), welche in den Punkten $b < c < d$ $(b > a)$ die Bedingungen (10) vom Lemma 11 erfüllen. Dann sind die Lösungen $u(x)$ und $v(x)$ linear abhängig.*

Beweis. Wenn die Bedingungen (10) für die Lösungen $u(x)$ und $v(x)$ erfüllt sind, dann gilt für diese $u^{(k)}(c) \neq 0$ und $v^{(k)}(c) \neq 0$. Setzen wir voraus, dass die Lösungen $u(x)$ und $v(x)$ linear unabhängig sind. Dann ist $z(x) = u^{(k)}(c) \,.\, v(x) - v^{(k)}(c) \,.\, u(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (3), welche den Bedingungen $z^{(i)}(b) = z^{(j)}(c) = z^{(s)}(d) = z^{(k)}(c) = 0$ (i, j, k, s sind die Zahlen vom Lemma 11) genügt. Dieses widerspricht aber der Behauptung vom Lemma 11. Also muss $z(x)$ eine triviale Lösung sein. Das bedeutet aber, dass $u(x)$ und $v(x)$ linear abhängig sind. Der Satz ist bewiesen.

Satz 14. *Es seien $u(x)$ und $v(x)$ nichttriviale Lösungen der Gleichung (3) und es seien in den Punkten $x = b, c, b \neq c$ $(b, c > a)$ folgende Bedingungen erfüllt:*

$$(11)\quad u^{(j)}(b) = v^{(i)}(b) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, 2n-1$$
$$0 \leqq j < k \leqq 2n-1, \quad u^{(l)}(c) = v^{(l)}(c) = 0, \quad 0 \leqq l \leqq 2n$$

ganz. Dann sind die Lösungen $u(x)$ und $v(x)$ linear abhängig.

Beweis. Wenn die Bedingungen (11) gelten, ist nach Lemma 7 $u^{(j)}(b) \neq 0, v^{(j)}(b) \neq 0$ und $u^{(k)}(b) \neq 0$, $v^{(k)}(b) \neq 0$. Es seien die Lösungen $u(x)$ uno $v(x)$ linear unabhängig. Dann ist $w(x) = v^{(j)}(b) \,.\, u(x) = u^{(j)}(b) \,.\, v(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (3), für die $w^{(i)}(b) = w^{(l)}(c) = w^{(j)}(b) = 0$ gilt, was der Behauptung vom Lemma 7 (Fall a)) widerspricht. Der Satz ist bewiesen.

Nun werden wir weitere Eigenschaften reeller Lösungen der Gleichung (3) für $n = 2$ untersuchen:

(12) $$y^{(4)} + p(x) \cdot y'' + q(x) \cdot y = 0\,, \quad p(x) \leqq 0\,, \quad q(x) < 0\,.$$

Zu diesem Zweck geben wir nun einige Ergebnisse von [1].

Definition. Sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12). Den Punkt $x = x_0$ nennen wir einfache Nullstelle (kurz: Nullstelle) der Funktion $y^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, wenn $y^{(i)}(x_0) = 0$, $y^{(i-1)}(x_0) \neq 0$, $y^{(i+1)}(x_0) \neq 0$ ist. Den Punkt x_0 nennen wir zweifache Nullstelle der Funktion $y^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$ wenn $y^{(i)}(x_0) = y^{(i+1)}(x_0) = 0$, $y^{(i+2)}(x_0) \neq 0$ ist und alle Ableitungen, deren Ordnung niedriger als i ist, im Punkt x_0 von Null verschieden sind. Eine Nullstelle der Funktion $y(x)$ (auch wenn sie mehrfach ist) definieren wir so wie üblich.

Lemma 15 (Satz 17 in [1]). *Es seien $u(x)$ und $v(x)$ derartige nichttriviale, linear unabhängige Lösungen der Gleichung (12), dass $u^{(i)}(b) = v^{(i)}(b) = u^{(l)}(c) = v^{(l)}(c) = 0$, wo $a < b < c$ und $0 \leqq i, l \leqq 3$ ganze Zahlen sind, gilt. Dann sind die Nullstellen der Funktionen $u^{(k)}(x)$ und $v^{(k)}(x)$, $0 \leqq k \leqq 2$ ganz, im Intervall (b, c) gemeinsam getrennt.*

Lemma 16 (Folgerung 22 in [1]). *Es seien $u(x)$ und $v(x)$ nichttriviale linear unabhängige Lösungen der Gleichung (12). Die Funktion $u^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$, besitze in den Punkten $b < c$ $(a < b)$ zweifache Nullstellen und es sei $v^{(i)}(b) = v^{(i)}(c)$. Dann hat die Funktion $u^{(i)}(x)$ genau n $(\geqq 0)$ Nullstellen im Intervall (b, c) wenn die Funktion $v^{(i)}(x)$ $n + 1$ Nullstellen in diesem Intervall hat.*

Satz 17 (Satz 23 in [1]). *Es sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12). Die Funktion $y^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$, soll eine einfache oder zweifache Nullstelle im Punkt $x = b_i$ $(a < b_i)$ und zumindest $n + 3$ $(n \geqq 1)$ Nullstellen im Intervall $\langle b_i, \infty)$ haben. Dann existieren n Punkte $\eta_1^i, \eta_2^i, \ldots, \eta_n^i$ $(b_i < \eta_1^i < \eta_2^i < \ldots < \eta_n^i)$ und n Lösungen der Gleichung (12), mit folgenden Eigenschaften:*

1. *die Funktion $y_k^{(i)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, hat in den Punkten $x = b_i$ und $x = \eta_k^i$ zweifache Nullstellen,*
2. *die Funktion $y_k^{(i)}(x)$ hat im Intervall $\langle b_i, \eta_k^i \rangle$ genau $k + 3$ Nullstellen (eine zweifache Nullstelle wird als zwei Nullstellen betrachtet),*
3. *ist $u(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12), welche nicht ein konstantes Vielfaches von $y_k(x)$ ist, so dass $u^{(i)}(b_i) = 0$, dann hat die Funktion $u^{(i)}(x)$ weniger als $k + 3$ Nullstellen im Intervall $\langle b_i, \eta_k^i \rangle$.*

Jede Lösung der Gleichung (12), welche dieselben Eigenschaften wie auch die Lösung $y_k(x)$ hat, ist ein konstantes Vielfaches von $y_k(x)$.

Den Punkt $x = \eta_n^i$ bezeichnen wir mit dem Symbol $\eta_n^i(b)$ und nennen ihn den *n-ten (rechten) mit dem Punkt b konjugierten Punkt.* Die Funktion $y_m^{(i)}(x)$ nennen wir die *mit dem n-ten konjugierten Punkt vereinigte Extremalfunktion* (für $i = 0$ Extremallösung).

Satz 18. $\eta_n^i(b)$, $i = 0, 1, 2$, *sind wachsende Funktionen der Variablen* b $(> a)$.

Beweis. Sei $b < c$ $(b > a)$. Seien $\eta_n^i(b)$ und $\eta_n^i(c)$ die mit den Punkten b, c n-ten $(n \geqq 1)$ konjugierten Punkte. Es ist $\eta_n^i(b) \neq \eta_n^i(c)$ für jedes natürliche n. Weiter offenbar ist $\eta_n^i(c) > \eta_n^i(b)$ für $c \geqq \eta_n^i(b)$. Setzen wir also voraus, dass $c < \eta_n^i(b)$ und dass die Funktion η_n^i fallend ist, d. h. $\eta_n^i(c) < \eta_n^i(b)$. Sei $u_n^{(i)}(x)$ bzw. $v_n^{(i)}(x)$ die mit dem konjugierten Punkt $\eta_n^i(b)$ bzw. $\eta_n^i(c)$ vereinigte Extremalfunktion. Wir konstruieren eine Lösung $z(x)$ der Gleichung (12), welche nicht ein konstantes Vielfaches von $v_n(x)$ ist, so, dass $z^{(i)}(c) = z^{(i)}(\eta_n^i(c)) = z^{(i)}(\eta_n^i(b)) = 0$. Wenn die Punkte c und $\eta_n^i(c)$ (einfache) Nullstellen der Extremalfunktion $u_n^{(i)}(x)$ sind, dann ist (nach Satz 13) die Lösung $u_n(x)$ ein konstantes Vielfaches von $z(x)$. Nach dem Lemma 16 und dem Satz 17 hat die Funktion $z^{(i)}(x)$ im Intervall $\langle c, \eta_n^i(c) \rangle$ genau $n + 2$ Nullstellen und also hat die Extremalfunktion $u_n^{(i)}(x)$ Nullstellen zumindest in diesen $n + 2$ Punkten des Intervalles $J = (b, \eta_n^i(b))$. Dieses widerspricht aber der Behauptung des Satzes 17. Wenn der Punkt $\eta_n^i(c)$ nicht eine Nullstelle und der Punkt $x = c$ eine Nullstelle der Funktion $u_n^{(i)}(x)$ ist, dann sind die Lösungen $z(x)$ und $u_n(x)$ linear unabhängig und wir kommen wieder zu einem Widerspruch. Sei der Punkt $x = c$ nicht eine Nullstelle und sei der Punkt $\eta_n^i(c)$ eine Nullstelle der Funktion $u_n^{(i)}(x)$. Das bedeutet, dass die Lösungen $z(x)$ und $u_n(x)$ linear unabhängig sind. Wir konstruieren eine weitere Lösung $w(x)$ der Gleichung (12), welche nicht ein konstantes Vielfaches von $u_n(x)$ ist, so, dass $w^{(i)}(b) = w^{(i)}(c) = w^{(i)}(\eta_n^i(b)) = 0$ ist. Die Lösungen $w(x)$ und $z(x)$ sind auch linear unabhängig, da im umgekehrten Fall (nach dem Satz 13) die Lösungen $w(x)$ und $u_n(x)$ linear abhängig wären. Nach dem Lemma 15 trennen sich im Intervall $(c, \eta_n^i(b))$ gemeinsam die Nullstellen der Funktionen $w^{(i)}(x)$ und $z^{(i)}(x)$. Die Funktion $w^{(i)}(x)$ hat also mindestens $n + 1$ Nullstellen im Intervall $\langle c, \eta_n^i(b))$, welches ein Teilintervall von J ist. Dieses ist aber ein Widerspruch, nachdem (dem Lemma 16 und dem Satz 17 nach) die Funktion $w^{(i)}(x)$ im Intervall J genau n Nullstellen hat. Setzen wir voraus, dass c und $\eta_n^i(c)$ keine Nullstellen der Funktion $u_n^{(i)}(x)$ sind. Wenn die obigen Lösungen $w(x)$ und $z(x)$ linear abhängig sind, dann hat die Funktion $w^{(i)}(x)$ mindestens $n + 2$ Nullstellen im Intervall J. Also wieder ein Widerspruch. Wenn die Lösungen $w(x)$ und $z(x)$ linear unabhängig sind, dann hat (nach Lemma 15) die Funktion $w^{(i)}(x)$ mindestens $n + 1$ Nullstellen im Intervall $\langle c, \eta_n^i(b))$, und also auch mindestens diese $n + 1$ Nullstellen im Intervall J, und dieses ist wiedermal ein Widerspruch. Von den gegebenen Erwägungen folgt, dass für $b < c$ $\eta_n^i(b) < \eta_n^i(c)$ ist. Der Satz ist bewiesen.

Lemma 19. *Sei* $b > a$ *und* $c = \eta_n^i(b)$. *Dann gelten die Ungleichungen*

$$\eta_{n+k}^i(b) < \eta_k^i(c) < \eta_{n+k+2}^i(b)\,, \tag{13}$$

wo n, k *natürliche Zahlen sind.*

Beweis. Sei $c = \eta_n^i(b)$. Setzen wir voraus, dass $\eta_{n+k}^i(b) = \eta_k^i(c)$, $0 \leqq i \leqq 2$ ganzzahlig. Sei $u_n^{(i)}(x)$ bzw. $v_k^{(i)}(x)$ die mit dem konjugierten Punkt $\eta_n^i(b)$ bzw. $\eta_k^i(c)$ vereinigte Extremalfunktion. Nach dem Satz 14 ist der Punkt $x = c$ nicht eine Nullstelle der Extremalfunktion $u_{n+k}^{(i)}(x)$, nachdem die Lösungen $u_n(x)$ und $u_{n+k}(x)$ linear unabhängig sind. Wir konstruieren eine Lösung $z(x)$ der Gleichung (12), welche nicht ein konstantes Vielfaches von $u_{n+k}(x)$ und $v_k(x)$ ist, so, dass $z^{(i)}(b) = z^{(i)}(c) = z^{(i)}(\eta_k^i(c)) = 0$ ist. Nach dem Lemma 16 und dem Satz 17 hat die Funktion $z^{(i)}(x)$ genau n Nullstellen im Intervall $(b, \eta_n^i(b))$, genau k Nullstellen im Intervall $(c, \eta_k^i(c))$, und also genau $n + k + 1$ Nullstellen im Intervall $J = (b, \eta_{n+k}^i(b))$, was einen Widerspruch liefert, da die Funktion $z^{(i)}(x)$ (nach dem Lemma 16 und dem Satz 17) genau $n + k$ Nullstellen im Intervall J hat. Das bedeutet, dass für $c = \eta_n^i(b)$ ist $\eta_k^i(c) \neq \eta_{n+k}^i(b)$. Setzen wir voraus, dass $\eta_k^i(c) < \eta_{n+k}^i(b)$ $(c = \eta_n^i(b))$ ist. Wir konstruieren Lösungen $w(x)$ und $y(x)$ der Gleichung (12), von denen keine ein konstantes Vielfaches der Lösung $u_{n+k}(x)$ ist, so, dass $w^{(i)}(c) = w^{(i)}(\eta_k^i(c)) = w^{(i)}(\eta_{n+k}^i(b)) = 0$, $y^{(i)}(b) = y^{(i)}(c) = y^{(i)}(\eta_{n+k}^i(b)) = 0$ ist. Nach dem Lemma 16 und dem Satz 17 hat die Funktion $w^{(i)}(x)$ im Intervall $\langle c, \eta_k^i(c)\rangle$ genau $k + 2$ Nullstellen, und also mindestens diese $k + 2$ Nullstellen im Intervall $\langle c, \eta_{n+k}^i(b))$ und die Funktion $y^{(i)}(x)$ hat genau n Nullstellen im Intervall (b, c). Wenn die Lösungen $y(x)$ und $w(x)$ linear abhängig sind, dann hat die Funktion $y^{(i)}(x)$ mindestens $k + 2$ Nullstellen im Intervall $\langle c, \eta_{n+k}^i(b))$ (dieselben Nullstellen, wie die Funktion $w^{(i)}(x)$). Die Funktion $y^{(i)}(x)$ hätte also mindestens $n + k + 2$ Nullstellen im Intervall J, und das ist ein Widerspruch, nachdem diese Funktion (nach dem Lemma 16 und dem Satz 17) im Intervall J genau $n + k$ Nullstellen hat. Setzen wir voraus, dass die Lösungen $y(x)$ und $w(x)$ nicht linear abhängig sind. Nach dem Lemma 15 trennen sich die Nullstellen der Funktionen $y^{(i)}(x)$ und $w^{(i)}(x)$ gemeinsam im Intervall $(c, \eta_{n+k}^i(b))$. Also hat die Funktion $y^{(i)}(x)$ im Intervall $\langle c, \eta_{n+k}^i(b))$ mindestens $k + 1$ Nullstellen. Das bedeutet, sie hat mindestens $k + n + 1$ Nullstellen im Intervall J, und dieses ist wieder ein Widerspruch. Setzen wir nun voraus, dass $\eta_k^i(c) = \eta_{n+k+2}^i(b)$ ist. Der Punkt $c = \eta_n^i(b)$ ist keine Nullstelle der Extremalfunktion $u_{n+k+2}^{(i)}(x)$. Sei $J_1 = (b, \eta_{n+k+2}^i(b))$. Wir konstruieren eine Lösung $g(x)$ der Gleichung (12) derart, dass $g^{(i)}(b) = g^{(i)}(c) = g^{(i)}(\eta_k^i(c)) = 0$ und diese nicht ein konstantes Vielfaches von $u_n(x)$, $u_{n+k+2}(x)$ und $v_k(x)$ ist. Nach dem Lemma 16 und dem Satz 17 hat die Funktion $g^{(i)}(x)$ im Intervall (b, c) genau n Nullstellen, im Intervall $(c, \eta_k^i(c))$ genau k Nullstellen, und also im Intervall J_1 genau $n + k + 1$ Nullstellen, und dieses ist ein Widerspruch. Also für $c = \eta_n^i(b)$ ist $\eta_k^i(c) \neq \eta_{n+k+2}^i(b)$. Setzen wir voraus, dass $\eta_k^i(c) > \eta_{n+k+2}^i(b)$. Wir konstruieren Lösungen $s(x)$ und $r(x)$ der Gleichung (12) so, dass $s^{(i)}(c) = s^{(i)}(\eta_{n+k+2}^i(b)) = s^{(i)}(\eta_k^i(c)) = 0$ und $r^{(i)}(b) = r^{(i)}(c) = r^{(i)}(\eta_{n+k+2}^i(b)) = 0$. Keine dieser Lösungen soll ein konstantes Vielfaches von $u_{n+k+2}(x)$ und $u_n(x)$ sein. Nach dem Lemma 16 und dem Satz 17 hat die Funktion $r^{(i)}(x)$ genau $n + k + 2$ Nullstellen im Intervall J_1, genau n Nullstellen im Intervall (b, c), und also genau $k + 1$ Nullstellen im Intervall $J_2 = (c, \eta_{n+k+2}^i(b))$. Wenn die Lösungen $s(x)$ und $r(x)$ linear abhängig sind, dann hat die Funktion $s^{(i)}(x)$ (ebenso auch die Funktion $r^{(i)}(x)$) genau

$k+1$ Nullstellen im Intervall J_2. Die Funktion $s^{(i)}(x)$ hat also mindestens $k+2$ Nullstellen im Intervall $(c, \eta_k^i(c))$ und dieses ist ein Widerspruch. Es seien $s(x)$ und $r(x)$ linear unabhängig. Nach dem Lemma 15 trennen sich die Nullstellen der Funktionen $s^{(i)}(x)$ und $r^{(i)}(x)$ gemeinsam im Intervall J_2 und also hat die Funktion $s^{(i)}(x)$ in diesem Intervall mindestens k Nullstellen. Das bedeutet, dass die Funktion $s^{(i)}(x)$ im Intervall $(c, \eta_k^i(c))$ mindestens $k+1$ Nullstellen hat und das ist wieder ein Widerspruch. Das Lemma ist bewiesen.

Vom Satz 18 und dem Lemma 19 folgt unmittelbar

Satz 20. *Sei $b > a$ und $\eta_n^i(b) \leqq c \leqq \eta_{n+1}^i(b)$. Dann ist*

$$\eta_{n+k}^i(b) \leqq \eta_k^i(c) < \eta_{n+k+3}^i(b)\,, \tag{13a}$$

wo $0 \leqq i \leqq 2$ ganz, k natürlich und $b = \eta_0^i(b)$ ist. Das Zeichen $=$ gilt in (13a) nur für $n = 0$ (d. h. $b = c$).

Satz 21. *Es existiere $\eta_n^i(b)$, $i = 0, 1$, $b > a$, $n \geqq 1$. Dann existieren n Punkte $\varphi_k^i(b)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, so, dass $b < \varphi_1^i(b) < \eta_1^i(b) < \varphi_2^i(b) < \eta_2^i(b) < \ldots < \varphi_n^i(b) < < \eta_n^i(b)$ und n Lösungen $u_k(x)$ der Gleichung (12) mit folgenden Eigenschaften:*

1. *die Funktion $u_k^{(i)}(x)$ hat im Punkt $x = b$ eine zweifache Nullstelle und die Funktion $u_k^{(i+1)}(x)$ hat im Punkt $x = \varphi_k^i(b)$ eine zweifache Nullstelle,*
2. *die Funktion $u_k^{(i+1)}(x)$ hat im Intervall $(b, \varphi_k^i(b)\rangle$ genau $k+1$ Nullstellen (eine zweifache Nullstelle wird als zwei Nullstellen betrachtet),*
3. *wenn $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12) ist, die nicht ein konstantes Vielfaches von $u_k(x)$ $(1 \leqq k \leqq n)$ ist und $y^{(i)}(b) = 0$, dann hat die Funktion $y^{(i+1)}(x)$ nicht mehr als $k+1$ Nullstellen im Intervall $(b, \varphi_k^i(b)\rangle$.*

Jede Lösung der Gleichung (12), welche dieselben Eigenschaften wie die Lösung $u_k(x)$ hat, ist ein konstantes Vielfaches von $u_k(x)$.

Zum Beweis von diesem Satz benötigen wir folgende Lemmas:

Lemma 22 (Satz 12 in [1]). *Es sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12). Dann trennen sich gemeinsam im Intervall (a, ∞) die Nullstellen der Funktionen $y^{(i)}(x)$ und $y^{(i+1)}(x)$, $i = 0, 1$.*

Lemma 23 (Satz 1 in [2]). *Sei $u(x)$ eine Funktion, die im Punkt $x = b$ eine Nullstelle der Ordnung $n \geqq 1$ und im Punkt $x = c$ eine Nullstelle der Ordnung $m \geqq 1$ hat und sei $u(x)$ von einem konstanten Vorzeichen $(\neq 0)$ im Intervall (b, c). Sei $v(x)$ eine Funktion, die im Punkt $x = b$ eine Nullstelle der Ordnung $n_1 < n$ und im Punkt $x = c$ eine Nullstelle der Ordnung $m_1 < m$ und im Intervall (b, c) auch ein konstantes Vorzeichen hat. Setzen wir voraus, dass $u(x) \in C_M[b, c]$ und $v(x) \in \in C_M[b, c]$, wo $M = \max(n_1, m_1)$ ist. Dann gibt es eine Linearkombination der Funktionen $v(x)$ und $u(x)$, welche im Intervall (b, c) eine zweifache Nullstelle hat.*

Lemma 24. (Lemma 20 in [1]). *Es seien $u(x)$ und $v(x)$ nichttriviale linear unabhängige Lösungen der Gleichung* (12), *für die folgendes gilt*: $u^{(i)}(b) = u^{(i+1)}(b) = u^{(l)}(c) = 0$ *und* $v^{(i)}(b) = v^{(l)}(c) = 0$, *wo* $b \neq c$ $(a < b, c)$, $0 \leqq i \leqq 2$, $0 \leqq l \leqq 3$ *ganz ist. Sei* $\beta \in (b, c)$ *bzw.* $\beta \in (c, b)$ *die erste Nullstelle der Funktion* $u^{(i)}(x)$ *rechts bzw. links vom Punkt b. Dann hat die Funktion* $v^{(i)}(x)$ *genau eine Nullstelle im Intervall* (b, β) *bzw.* (β, b).

Beweis des Satzes 21. Es sei $y_n^{(i)}(x)$ die mit dem n-ten konjugierten Punkt $c = \eta_n^i(b)$ vereinigte Extremalfunktion. Sei α die letzte Nullstelle der Funktion $y_n^{(i+1)}(x)$ im Intervall (b, c). Wir konstruieren eine Lösung $v(x)$ der Gleichung (12), die nicht ein konstantes Vielfaches von $y_n(x)$ ist, so, dass $v^{(i)}(b) = v^{(i+1)}(b) = v^{(i+2)}(b) = 0$ ist. Nach dem Lemma 7 (Fall a)) ist $v^{(j)}(x) \neq 0$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, für $x > b$. Dann ist für die nichttriviale Lösung $w(x) = c_1 \cdot y_n(x) + c_2 \cdot v(x)$ $(c_1, c_2 \neq 0$ konst.) der Gleichung (12) $w^{(i)}(b) = w^{(i+1)}(b) = 0$. Nach dem Lemma 23 ist $w^{(i+1)}(\beta) = w^{(i+2)}(\beta) = 0$, wo $\beta \in (\alpha, c)$. Wir konstruieren nun eine Lösung $z(x)$ der Gleichung (12), für die $z^{(i)}(b) = z^{(i+1)}(\beta) = z^{(i)}(c) = 0$ ist und welche nicht ein konstantes Vielfaches von $w(x)$ und $y_n(x)$ ist. Nach dem Lemma 16 und dem Satz 17 hat die Funktion $z^{(i)}(x)$ $n + 2$ Nullstellen im Intervall $\langle b, c \rangle$. Nach dem Lemma 22 und dem Rolleschen Satz hat die Funktion $z^{(i+1)}(x)$ $n + 1$ Nullstellen im Intervall (b, c). Dem Lemma 15 nach trennen sich die Nullstellen der Funktionen $y_n^{(i+1)}(x)$ und $z^{(i+1)}(x)$ gemeinsam im Intervall (b, c). Also ist $x = \beta$ die erste Nullstelle der Funktion $z^{(i+1)}(x)$ links vom Punkt $x = c$. Das bedeutet, dass die Funktion $z^{(i+1)}(x)$ im Intervall $J = (b, \beta)$ $n(\geqq 1)$ Nullstellen hat. Nach dem Lemma 24 liegt die letzte Nullstelle der Funktion $w^{(i+1)}(x)$ im Intervall J vor der letzten Nullstelle der Funktion $z^{(i+1)}(x)$ in diesem Intervall. Die erste Nullstelle der Funktion $z^{(i+1)}(x)$ im Intervall J liegt vor der ersten Nullstelle der Funktion $w^{(i+1)}(x)$ im Intervall $J_1 = (b, \beta\rangle$. Diese Behauptung wollen wir beweisen: Sei t_1 die erste Nullstelle der Funktion $w^{(i+1)}(x)$ im Intervall J_1 (also kann $t_1 = \beta$ sein) und sei $z^{(i+1)}(x) \neq 0$ für $x \in (b, t_1)$. Da die Lösungen $w(x)$ und $z(x)$ linear unabhängig sind, ist $z^{(i+1)}(b) \neq 0$, $z^{(i+2)}(\beta) \neq 0$ und für den Fall $t_1 < \beta$ ist auch $z^{(i+1)}(t_1) \neq 0$. Nach dem Lemma 23 existiert eine nichttriviale Lösung $u(x) = c_1 \cdot w(x) + c_2 \cdot z(x)$ $(c_1, c_2 \neq 0$ sind Konstanten) der Gleichung (12) und ein Punkt $\tau \in (b, t_1)$ so, dass $u^{(i+1)}(\tau) = u^{(i+2)}(\tau) = 0$ ist. Dieses aber widerspricht der Behauptung vom Lemma 11, nachdem $u^{(i)}(b) = u^{(i+1)}(\beta) = 0$ ist. Nach dem Lemma 15 trennen sich die Nullstellen der Funktionen $z^{(i+1)}(x)$ und $w^{(i+1)}(x)$ gemeinsam im Intervall J. Das bedeutet, dass die Funktion $w^{(i+1)}(x)$ genau $n - 1$ Nullstellen im Intervall J hat. Sei $y(x)$ eine Lösung der Gleichung (12), welche nicht ein konstantes Vielfaches von $w(x)$ ist und für die $y^{(i)}(b) = 0$ gilt. Wenn $y^{(i+1)}(\beta) = 0$ ist, dann ist nach dem Satz 14 $y^{(i+1)}(b) \neq 0$ und $y^{(i+2)}(\beta) \neq 0$. Dann hat die Funktion $y^{(i+1)}(x)$ genau $n + 1$ Nullstellen im Intervall J_1 (soeben wie auch die oben konstruierte Lösung $z(x)$). Sei t_0 die letzte Nullstelle der Funktion $y^{(i+1)}(x)$ im Intervall J_1 und sei $t_0 < \beta$. Wenn t_0 eine Nullstelle der Funktion $w^{(i+1)}(x)$ ist, dann trennen sich im Intervall (b, t_0) gemeinsam die Nullstellen der Funktionen $y^{(i+1)}(x)$ und $w^{(i+1)}(x)$ (nach Lemma 15). Also hat die Funktion $y^{(i+1)}(x)$

im Intervall J_1 höchstens n Nullstellen. Es sei der Punkt t_0 $(< \beta)$ keine Nullstelle der Funktion $w^{(i+1)}(x)$. Wir konstruieren eine Lösung $g(x)$ der Gleichung (12), welche nicht ein konstantes Vielfaches von $w(x)$ und $y(x)$ ist so, dass $g^{(i)}(b) = g^{(i+1)}(t_0) = g^{(i+1)}(\beta) = 0$. Soeben wie bei der oben konstruierten Lösung $z(x)$ hat die Funktion $g^{(i+1)}(x)$ genau n $(\geqq 1)$ Nullstellen im Intervall J. Nach dem Lemma 15 trennen sich gemeinsam die Nullstellen der Funktionen $g^{(i+1)}(x)$ und $y^{(i+1)}(x)$ im Intervall (b, t_0). Also hat die Funktion $y^{(i+1)}(x)$ höchstens $n+1$ Nullstellen im Intervall J_1. Setzen wir nun voraus, dass $\beta < \eta^i_{n-1}(b)$. Sei $y^{(i)}_{n-1}(x)$ die mit dem konjugierten Punkt $d = \eta^i_{n-1}(b)$ vereinigte Extremalfunktion. Wir konstruieren eine Lösung $h(x)$ der Gleichung (12), welche nicht ein konstantes Vielfaches der Lösungen $y_{n-1}(x)$ und $w(x)$ ist, so, dass $h^{(i)}(b) = h^{(i+1)}(\beta) = h^{(i)}(d) = 0$. Wie wir es schon für die Lösung $z(x)$ gezeigt haben, hat die Funktion $h^{(i+1)}(x)$ genau n Nullstellen im Intervall J und also mindestens $n+1$ Nullstellen im Intervall (b, d). Die Funktion $h^{(i+1)}(x)$ aber hat genau n Nullstellen in diesem Intervall, und das ist ein Widerspruch mit der vorherigen Behauptung. Nach dem Satz 14 ist $\beta \neq d$, nachdem die Lösungen $w(x)$ und $y_{n-1}(x)$ nicht linear abhängig sind. Also ist $\beta > d$. Der Punkt $x = \beta$ ist im Satz mit dem Symbol $\varphi^i_n(b)$ bezeichnet.

Damit haben wir auch den folgenden Satz bewiesen:

Satz 25. *Sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12) so, dass die Funktion $y^{(i)}(x)$, $i = 0, 1$, im Punkt $x = b\ (>a)$ eine zweifache Nullstelle hat. Dann liegt zwischen jeden zwei benachbarten Nullstellen der Funktion $y^{(i+1)}(x)$ im Intervall (b, ∞) genau ein Punkt $\varphi^i_k(b)$. (Wenn die letzte Nullstelle der Funktion $y^{(i+1)}(x)$ zweifach ist, dann fällt sie mit dem Punkt $\varphi^i_n(b)$ zusammen.)*

Satz 26. *$\varphi^i_n(b)$, $i = 0, 1$, sind wachsende Funktionen der Variablen $b\ (>a)$.*

Den Beweis des Satzes führen wir ähnlicherweise wie den Beweis des Satzes 18. Sei $b < c$ $(a < b)$ und seien $u_n(x)$ und $v_n(x)$ Lösungen der Gleichung 12, für welche $u^{(i)}_n(b) = u^{(i+1)}_n(b) = u^{(i+1)}_n(\varphi^i_n(b)) = u^{(i+2)}_n(\varphi^i_n(b)) = 0$, $v^{(i)}_n(c) = v^{(i+1)}_n(c) = v^{(i+1)}_n(\varphi^i_n(c)) = v^{(i+2)}_n(\varphi^i_n(c)) = 0$ ist. Für jede natürliche Zahl n ist $\varphi^i_n(b) \neq \varphi^i_n(c)$. Für $c \geqq \varphi^i_n(b)$ ist offenbar $\varphi^i_n(c) > \varphi^i_n(b)$. Setzen wir also voraus, dass $c < \varphi^i_n(b)$ und die Funktion $\varphi^i_n(b)$ ist nichtfallend, d. h. $\varphi^i_n(c) < \varphi^i_n(b)$. Wir konstruieren eine Lösung $z(x)$ der Gleichung (12) so, dass $z^{(i)}(c) = z^{(i+1)}(\varphi^i_n(c)) = z^{(i+1)}(\varphi^i_n(b)) = 0$ ist und $z(x)$ soll kein konstantes Vielfaches von $v_n(x)$ sein. Im Beweis des Satzes 21 zeigten wir, dass die Funktion $z^{(i+1)}(x)$ genau n Nullstellen im Intervall $(c, \varphi^i_n(c))$ hat. Wenn die Lösungen $u_n(x)$ und $z(x)$ linear abhängig sind, dann hat die Funktion $u^{(i+1)}_n(x)$ mindestens $n+2$ Nullstellen im Intervall $(b, \varphi^i_n(b))$ und das ist ein Widerspruch (nach Satz 21). Setzen wir voraus, dass die Lösungen $z(x)$ und $u_n(x)$ linear unabhängig sind. Wenn der Punkt $x = c$ eine Nullstelle der Funktion $u^{(i)}_n(x)$ ist, dann hat die Funktion $u^{(i+1)}_n(x)$ mindestens $n+1$ Nullstellen im Intervall $(b, \varphi^i_n(b))$ (nach dem Lemma 15 und dem Rolleschen Satz), was der Behauptung des Satzes 21 (Eigenschaft 2) widerspricht. Sei der Punkt $x = \varphi^i_n(c)$ eine Nullstelle der Funktion $u^{(i+1)}_n(x)$. Wir konstruieren eine Lösung $w(x)$ so, dass $w^{(i)}(c) = w^{(i)}(b) = w^{(i+1)}(\varphi_n^i(b)) = 0$ ist und diese nicht ein konstantes Vielfaches von $u_n(x)$ und $z(x)$ ist. Nach dem Lemma 15 trennen sich im Intervall $(c, \varphi_n^i(b))$ gemeinsam die Nullstellen der Funktionen $w^{(i+1)}(x)$ und $z^{(i+1)}(x)$. Das bedeutet, dass die Funktion $w^{(i+1)}(x)$ mindestens $n + 1$ Nullstellen im Intervall $(b, \varphi_n^i(b))$ hat, und das ist ein Widerspruch, nachdem diese Funktion genau n Nullstellen hat. c und $\varphi_n^i(c)$ seien keine Nullstellen der Funktionen $u_n^{(i)}(x)$ und $u_n^{(i+1)}(x)$. Wenn die Lösungen $w(x)$ und $z(x)$ linear abhängig sind, dann hat die Funktion $w^{(i+1)}(x)$ mindestens $n + 2$ Nullstellen im Intervall $(b, \varphi_n^i(b))$, was wieder einen Widerspruch liefert. Wenn diese Lösungen nicht linear abhängig sind, dann hat die Funktion $w^{(i+1)}(x)$ (nach dem Lemma 15 und dem Rolleschen Satz) mindestens $n + 1$ Nullstellen im Intervall $(b, \varphi_n^i(b))$, und also wieder ein Widerspruch. Der Satz ist bewiesen.

Satz 27. *Es existiere $\varphi_n^0(b)$, $b > a$, $n \geqq 1$. Dann existieren n Punkte $\mu_k(b)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, so, dass $b < \mu_1(b) < \varphi_1^0(b) < \mu_2(b) < \varphi_2^0(b) < \ldots < \mu_n(b) < \varphi_n^0(b)$ und n Lösungen $u_k(x)$ der Gleichung (12) mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$u_k(x)$ hat eine zweifache Nullstelle im Punkt $x = b$ und die Funktion $u_k''(x)$ hat eine zweifache Nullstelle im Punkt $x = \mu_k(b)$,*
2. *die Funktion $u_k''(x)$ hat im Intervall $(b, \mu_k(b)\rangle$ genau $k + 1$ Nullstellen (eine zweifache Nullstelle wird als zwei Nullstellen betrachtet),*
3. *wenn $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12) ist, welche nicht ein konstantes Vielfaches von $u_k(x)$ $(1 \leqq k \leqq n)$ ist, und $y(b) = 0$ ist, dann hat die Funktion $y''(x)$ höchstens $k + 1$ Nullstellen im Intervall $(b, \mu_k(b)\rangle$.*

Jede Lösung der Gleichung (12), welche dieselben Eigenschaften wie die Lösung $u_k(x)$ hat, ist deren konstantes Vielfaches.

Beweis. Es sei $y_n(x)$ eine Lösung der Gleichung (12) mit den im Satz 21 angeführten Eigenschaften, d. h. $y_n(b) = y_n'(b) = y_n'(c) = y_n''(c) = 0$, wo $c = \varphi_n^0(b)$. Nach dem Satz 21 hat die Funktion $y_n'(x)$ $n - 1$ Nullstellen im Intervall $J_1 = (b, c)$. Die letzte Nullstelle der Funktion $y_n''(x)$ im Intervall J_1 liegt rechts von der letzten Nullstelle der Funktion $y_n'(x)$ (nach dem Rolleschen Satz). Ähnlicherweise: die erste Nullstelle der Funktion $y_n''(x)$ im Intervall J_1 liegt links von der ersten Nullstelle der Funktion $y_n'(x)$. Das bedeutet, dass die Funktion $y_n''(x)$ im Intervall J_1 n Nullstellen $b_1 < b_2 < \ldots \ldots < b_n$ (nach Lemma 22) hat. Sei $v(x)$ so eine Lösung, dass $v(b) = v'(b) = v''(b) = 0$, $v'''(b) > 0$. Nach dem Lemma 3 ist $v^{(i)}(x) > 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, für $x > b$. Nach dem Lemma 23 gibt es so eine Lösung $w(x) = y_n(x) - k \,.\, v(x)$ $(k \neq 0$ konstant) der Gleichung (12), dass der Punkt $x = \alpha \in (b_n, c)$ eine zweifache Nullstelle der Funktion $w''(x)$ ist. Die Lösung $w(x)$ erfüllt also die Bedingungen: $w(b) = w'(b) = w''(\alpha) = w'''(\alpha) = 0$. Nach der Folgerung 10 ist $w^{(i)}(x) \neq 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, für $x \in (a, b)$ und für $x > \alpha$. Alle gegebenen Nullstellen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ der Funktion $y_n''(x)$ liegen im Intervall $J = (b, \alpha)$. Wir konstruieren eine Lösung $z(x)$ der Gleichung (12) so, dass $z(b) = z''(\alpha) = z'(c) = 0$. Nach dem Lemma 15 trennen sich gemeinsam die Nullstellen der Funktionen $z''(x)$ und $y_n''(x)$ im Intervall J_1 und die Nullstellen der

Funktionen $z''(x)$ und $w''(x)$ im Intervall J. Die letzte Nullstelle der Funktion $w''(x)$ im Intervall J liegt links von der letzten Nullstelle der Funktion $z''(x)$ in diesem Intervall (nach dem Lemma 24), welche links vom Punkt b_n (nach dem Lemma 15) liegt. Also hat die Funktion $w''(x)$ im Intervall (b_n, α) keine Nullstellen. Wir beweisen nun, dass die Funktion $w''(x)$ im Intervall J genau $n - 1$ Nullstellen hat. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken setzen wir voraus, dass $y_n''(x) > 0$ für $x \in (b_n, c)$. $y_n''(\alpha) - k \,.\, v''(\alpha) = 0$, also ist $k > 0$, nachdem $v''(\alpha) > 0$, $y_n''(\alpha) > 0$ ist. Offenbar sind die Schnittpunkte der Kurven $\eta = k \,.\, v''(x)$ und $\eta = y_n''(x)$ Nullstellen der Funktion $w''(x)$. Die Kurve $\eta = k \,.\, v''(x)$ schneidet jeden positiven Bogen der Kurve $\eta = y_n''(x)$ im Intervall (b_1, b_{n-1}) in genau zwei Punkten. Diese Behauptung beweisen wir: Setzen wir voraus, dass die Kurve $\eta = k \,.\, v''(x)$ in einem Intervall (b_j, b_{j+1}), $1 \leqq j \leqq n - 2$, den positiven Bogen der Kurve $\eta = y_n''(x)$ nicht schneidet. Nach dem Lemma 23 gibt es eine derartige Lösung $w_1(x)$ der Gleichung (12), dass die Funktion $w_1''(x) = y_n''(x) - k_1 \,.\, v''(x)$ ($k_1 \neq 0$ konstant) eine zweifache Nullstelle im Intervall (b_j, b_{j+1}) hat. In diesem Intervall ist $k \,.\, v''(x) > y_n''(x)$ und also $k_1 < k$. Dann schneiden sich aber die Kurven $\eta = k_1 \,.\, v''(x)$ und $\eta = y_n''(x)$ im Intervall (b_n, c). Das bedeutet, dass links von der zweifachen Nullstelle der Funktion $w_1''(x)$ eine zweifache Nullstelle der Funktion $w_1(x)$ und rechts Nullstellen der Funktion $w_1''(x)$ liegen, und dieses widerspricht der Behauptung von der Folgerung 10. Die Kurven $\eta = k \,.\, v''(x)$ und $\eta = y_n''(x)$ schneiden sich also im Intervall (b_j, b_{j+1}) und zwar in genau zwei Punkten, nachdem sich die Nullstellen der Funktion $z''(x)$ gemeinsam mit den Nullstellen der Funktion $w''(x)$ und soeben auch mit den Nullstellen der Funktion $y_n''(x)$ im Intervall J trennen. Die Anzahl der (einfachen) Nullstellen der Funktion $w''(x)$ im Intervall J ist dem zweifachen der Anzahl der positiven Bögen der Kurve $\eta = y_n''(x)$ im Intervall (b, b_{n-1}) gleich, wenn $y_n''(x) < 0$ für $x \in \langle b, b_1)$ ist (d. h. wenn n (> 0) ungerade ist). Sei $y_n''(x) > 0$ für $x \in \langle b, b_1)$. Dann ist $y_n'(x) > 0$, $y_n(x) > 0$ und (der Gleichung (12) nach) $y^{(4)}(x) > 0$ für $x \in (b, b_1)$. Die Funktion $y_n'''(x)$ wächst also im Intervall (b, b_1) und nachdem $y_n'''(b_1) < 0$ ist, ist $y_n'''(x) < 0$ für $x \in (b, b_1)$. Das bedeutet, dass die Funktion $y_n''(x)$ im Intervall (b, b_1) fallend ist. Die Funktion $k \,.\, v''(x)$ ist wachsend und positiv für $x > b$ ($v''(b) = 0$). Also hat die Funktion $w''(x)$ genau eine Nullstelle im Intervall (b, b_1). Von diesen Erwägungen folgt, dass die Funktion $w''(x)$ genau $n - 1$ Nullstellen im Intervall J hat. Sei $y(x)$ eine Lösung der Gleichung (12), die nicht ein konstantes Vielfaches von $w(x)$ ist und sei $y(b) = 0$. Wenn $y''(\alpha) = 0$ ist, dann ist nach dem Satz 14 $y'(b) \neq 0$ und $y'''(\alpha) \neq 0$. Dann hat die Funktion $y''(x)$ höchstens $n + 1$ Nullstellen im Intervall $(b, \alpha\rangle$, nachdem sich die Nullstellen der Funktionen $w''(x)$ und $y''(x)$ im Intervall J gemeinsam trennen. Sei t_0 die letzte Nullstelle der Funktion $y''(x)$ im Intervall $(b, \alpha\rangle$ und $t_0 < \alpha$. Wenn der Punkt t_0 eine Nullstelle der Funktion $w''(x)$ ist, dann trennen sich dem Lemma 15 nach gemeinsam die Nullstellen der Funktionen $w''(x)$ und $y''(x)$ im Intervall (b, t_0). Folglich hat die Funktion $y''(x)$ höchstens n Nullstellen im Intervall $(b. \alpha\rangle$. Sei der Punkt t_0 ($< \alpha$) keine Nullstelle der Funktion $w''(x)$. Wir konstruieren eine Lösung $g(x)$, welche kein konstantes Vielfaches von $w(x)$ und $y(x)$ ist, so, dass $g(b) = g''(t_0) = g''(\alpha) = 0$ ist.

Die Nullstellen der Funktionen $g''(x)$ und $w''(x)$ sind im Intervall J gemeinsam getrennt. Die Funktion $g''(x)$ hat also höchstens n Nullstellen im Intervall J. Nachdem die Nullstellen der Funktionen $g''(x)$ und $y''(x)$ im Intervall (b, t_0) gemeinsam getrennt sind, hat die Funktion $y''(x)$ höchstens $n + 1$ Nullstellen im Intervall $(b, \alpha\rangle$. Sei $x = \beta$ die letzte Nullstelle der Funktion $w''(x)$ im Intervall J. Wir beweisen, dass die Funktion $w'(x)$ im Intervall (β, α) genau eine Nullstelle hat. Ohne Einschränkung kann man voraussetzen, dass $w'(\beta) > 0$ ist. Dann (nach Lemma 12) ist $w'''(\beta) < 0$. Also ist $w''(x) < 0$ für $x \in (\beta, \alpha)$. Setzen wir voraus, dass $w'(x) > 0$ für $x \in (\beta, \alpha)$ ist. Also ist $w'(\alpha) > 0$ und dem Lemma 8 nach ist $w(\alpha) > 0$ $(w''(\alpha) = w'''(\alpha) = 0)$. Nach der Gleichung (12) ergibt sich $w^{(4)}(\alpha) > 0$. Das bedeutet, dass die Funktion $w''(x)$ im Punkt α ihr lokales Minimum hat, und dieses widerspricht aber der Voraussetzung: $w''(x) < 0$ für $x \in (\beta, \alpha)$. Nach dem Rolleschen Satz hat die Funktion $w'(x)$ im Intervall (β, α) genau eine Nullstelle. Nach dem Lemma 22 und dem Rolleschen Satz hat die Funktion $w'(x)$ genau $n - 1$ Nullstellen im Intervall J (ebenso wie auch $w''(x)$). Sei $d = \varphi_{n-1}^0(b)$ und sei $u(x)$ so eine Lösung der Gleichung (12), dass $u(b) = u'(b) = u'(d) = u''(d) = 0$ ist. Nach dem Satz 14 ist $\alpha \neq d$, nachdem die Lösungen $w(x)$ und $u(x)$ linear unabhängig sind. Setzen wir voraus, dass $\alpha < d$ ist. Wir konstruieren eine Lösung $h(x)$ der Gleichung (12), welche nicht ein konstantes Vielfaches von $w(x)$ ist, so, dass $h(b) = h''(\alpha) = h'(\alpha) = 0$ sein soll. Dem Lemma 15 nach trennen sich gemeinsam die Nullstellen der Funktionen $w'(x)$ und $h'(x)$ im Intervall J. Die erste Nullstelle der Funktion $h'(x)$ im Intervall J liegt links von der ersten Nullstelle der Funktion $w'(x)$ in demselben Intervall (ebenso wie für die Lösung $z(x)$ im Beweis des Satzes 21). Die Funktion $h'(x)$ hat also mindestens $n - 1$ Nullstellen im Intervall J. Konstruieren wir noch eine Lösung $s(x)$ der Gleichung (12), welche nicht ein konstantes Vielfaches von $w(x)$ und auch nicht von $h(x)$ ist, so, dass $s(b) = s'(\alpha) = s'(d) = 0$ sein soll. Die Nullstellen der Funktionen $h'(x)$ und $s'(x)$ trennen sich gemeinsam im Intervall J (Lemma 15). Die letzte Nullstelle der Funktion $s'(x)$ im Intervall J liegt rechts von der letzten Nullstelle der Funktion $h'(x)$ in demselben Intervall. Also hat die Funktion $s'(x)$ mindestens $n + 1$ Nullstellen im Intervall $(b, d\rangle$ und dieses widerspricht der Behauptung des Satzes 21. Daher folgt: $d < \alpha$. Der Punkt α wurde im Satz mit dem Symbol $\mu_n(b)$ bezeichnet. Nach dem Lemma 7 und 8 ist $w(\alpha) \neq 0$, $w'(\alpha) \neq 0$. Von der Gleichung (12) ergibt sich dann: $y^{(4)}(\alpha) \neq 0$. Also ist der Punkt $x = \alpha$ eine zweifache (der Definition nach) Nullstelle der Funktion $w''(x)$. Der Satz ist bewiesen.

Damit haben wir auch den folgenden Satz bewiesen:

Satz 28. *Sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12), welche im Punkt $x = b$ $(>a)$ eine zweifache Nullstelle hat. Dann liegt zwischen jeden zwei benachbarten Nullstellen der Funktion $y''(x)$ im Intervall (b, ∞) genau ein Punkt $\mu_k(b)$. (Ist die letzte Nullstelle der Funktion $y''(x)$ zweifach, dann fällt diese mit dem Punkt $\mu_n(b)$ zusammen.)*

Wenn $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12) ist, dann nennen wir die

Funktion $y^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$ ganz, *oszillierend*, wenn die Menge deren Nullstellen im Intervall (a, ∞) unendlich und von oben unbeschränkt ist. In jedem übrigen Fall nennen wir diese *Funktion nichtoszillierend.*

Die Gleichung (12) nennen wir *oszillierend*, wenn diese mindestens eine oszillierende Lösung besitzt und wir nennen sie *nichtoszillierend*, wenn alle deren Lösungen nichtoszillierend sind.

Satz 29 (Satz 26 in [1]). *Sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (12). Dann haben die Funktionen $y^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2$ denselben Oszillationscharakter (d. h. es sind alle oszillierend oder es ist keine oszillierend).*

Satz 30 (Satz 27 in [1]). *Die Gleichung (12) ist genau dann oszillierend, wenn es für ein beliebiges $b \in (a, \infty)$ und für jedes $i = 0, 1, 2$ unendlich viele konjugierte Punkte $\eta_n^i(b)$ gibt.*

Von dem Satz 21 und 30 folgt

Satz 31. *Die Gleichung (12) ist genau dann oszillierend, wenn es für ein belibiges $b \in (a, \infty)$ und für $i = 0, 1$ unendlich viele Punkte $\varphi_n^i(b)$ gibt.*

Von dem Satz 27 und 31 folgt

Satz 32. *Die Gleichung (12) ist genau dann oszillierend, wenn es für ein beliebiges $b \in (a, \infty)$ unendlich viele Punkte $\mu_n(b)$ gibt.*

Von den Sätzen 30, 31 und 32 folgt

Satz 33. *Sei $b > a$. Legen wir $\psi_n^j = \eta_n^j(b)$, $j = 0, 1, 2$, $\psi_n^3 = \varphi_n^0(b)$, $\psi_n^4 = \varphi_n^1(b)$, $\psi_n^5 = \mu_n(b)$. Dann gibt es für jedes $j = 0, 1, \ldots, 5$ entweder endlich oder unendlich viele Punkte ψ_n^j.*

II.

In diesem Teil wollen wir besonders die Eigenschaften der Lösungen der zu der Gleichung (12) adjungierten Gleichung

$$(14) \qquad y^{(4)} + (p(x) \,.\, y)'' + q(x) \,.\, y = 0\,, \quad p(x) \leqq 0\,, \quad q(x) < 0$$

behandeln. Wir machen die Voraussetzung, dass die Funktion $p(x)$ stetige Ableitungen bis zu der 2. Ordnung hat.

Lemma 34. *Eine nichttriviale Lösung $y(x)$ der Gleichung (14) genüge im Punkt $b \in (a, \infty)$ den Anfangsbedingungen: $y(b) = y'(b) = 0$, $y''(b) \geqq 0$, $y'''(b) \geqq 0$ (mindestens einer der letzten Werte sei von Null verschieden). Dann sind die Unglei-*

chungen

$$(15) \qquad y(x) > 0\,, \quad y'(x) > 0\,, \quad y''(x) > 0 \quad \textit{für} \quad x \in (b, \infty)$$

erfüllt. Daher folgt dann: $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ *und die Funktion* $y'(x)$ *ist für* $x > b$ *wachsend.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass die Funktion $f(x) = y \,.\, y' \,.\, y''$ in irgendeinem Punkt des Intervalles (b, ∞) verschwindet. Dem Rolleschen Satz nach gibt es zumindest einen Punkt $c \in (b, \infty)$ derart, dass $y''(c) = 0$ sein wird. Sei $x = c$ der erste solche Punkt, welcher rechts vom Punkt $x = b$ liegt. Die Ungleichungen (15) gelten dann im Intervall (b, c). Nach einer zweifachen Integration der Gleichung (14) von b bis x $(b < x)$ ergibt sich für die Lösung $y(x)$ die Identität:

$$y''(x) - y''(b) - y'''(b) \,.\, (x - b) + p(x) \,.\, y(x) +$$

$$+ \int_b^x (x - t) \,.\, q(t) \,.\, y(t)\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Wenn wir $x = c$ legen, ist die linke Seite der Identität eine negative Zahl und wir bekommen so einen Widerspruch. Die Ungleichungen (15) gelten also im ganzen Intervall (b, ∞). Das Lemma ist bewiesen.

Die Gleichung (14) wird zu einer Gleichung von demselben Typ (mit der unabhängigen Variablen t) mittels der Substitution $x = b + d - t$ überführt, wo d eine beliebige Zahl ist, die grösser als die Zahl a ist. Daher und vom Lemma 34 folgt (für $t = d$) die Behauptung:

Lemma 35. *Eine nichttriviale Lösung der Gleichung (14) genüge im Punkt* $b \in \in (a, \infty)$ *den Anfangsbedingungen:* $y(b) = y'(b) = 0$, $y''(b) \geqq 0$, $y'''(b) \leqq 0$ *(mindestens einer der letzten zwei Werte sei von Null verschieden). Dann gilt* $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$, $y''(x) > 0$ *für* $x \in (a, b)$.

Wenn man in der Arbeit [1] die Lemmas 3 und 4 (welche Sonderfälle der Lemmas 3 und 4 in dieser Arbeit sind) mit den Lemmas 34 und 35 ersetzt, kann festgestellt werden, dass die Lösungen der Gleichung (14) mit den Lösungen der Gleichung (12) gemeinsame Eigenschaften haben, die in den folgenden Sätzen der Arbeit [1] formuliert sind: die Lemmas 5 und 6, die Folgerung 7, das Lemma 8, die Folgerungen 9 und 10, die Sätze 14, 15, 16, 17 und 19, die Lemmas 20 und 21, die Folgerung 22, der Satz 23, das Lemma 24 und die Sätze 25 und 27. Ähnliche Eigenschaften der Lösungen der Gleichung (14) wollen nur in Sätzen ausgedrückt sein, da deren Beweise denen von der Arbeit [1] gleich sind.

Lemma 36. *Eine nichttriviale Lösung* $y(x)$ *der Gleichung (14) erfüllt in höchstens einem Punkt* b $(> a)$ *eine der Bedingungen:*

1. $y(b) = y'(b) = y''(b) = 0$,
2. $y(b) = y'(b) = y'''(b) = 0$.

Für $x \in (a, b) \cup (b, \infty)$ *ist* $y \,.\, y' \,.\, y'' \neq 0$, $\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$ *und die Funktion* $y'(x)$ *ist für* $x > b$ *streng monoton.*

Lemma 37. *Eine nichttriviale Lösung* $y(x)$ *der Gleichung* (14) *erfüllt in höchstens einem Punkt* b ($> a$) *eine der folgenden Bedingungen:*

1. $y(b) = y'(b) = 0,\ 0 \neq \operatorname{sgn} y''(b) \neq \operatorname{sgn} y'''(b) \neq 0,$
2. $y(b) = y'(b) = 0,\ \operatorname{sgn} y''(b) = \operatorname{sgn} y'''(b) \neq 0.$

Im Fall 1 *ist* $y \,.\, y' \,.\, y'' \neq 0$ *für* $x \in (a, b)$. *Im Fall* 2 *ist* $y \,.\, y' \,.\, y'' \neq 0$, *die Funktion* $y'(x)$ *ist streng monoton für* $x > b$ *und* $\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$.

Satz 38. *Es gibt eine Lösung der Gleichung* (14) *so, dass für alle* $x \in (a, \infty)$ *einer der folgenden Fälle gilt:*

1. *eine der Funktionen* $y^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$ *ist von Null verschieden,*
2. *die Funktionen* $y(x)$ *und* $y''(x)$ *sind von Null verschieden.*

Beweis. Der Fall 1 für $i = 2$ folgt unmittelbar vom Lemma 36 (Bedingung 2). Sei $i = 1$ und sei $y(x)$ eine Lösung der Gleichung (14), welche die Bedingungen $y(b) = y'(b) = y''(b) = 0$, $y'''(b) > 0$, $b > a$, erfüllt. Nach dem Lemma 36 ist $y'(x) > 0$ für $x \neq b$. Sei $t_0 > b$. Wir konstruieren eine Lösung $v(x)$ der Gleichung (14), welche die Bedingungen: $v(t_0) = y(t_0)$, $v'(t_0) = y'(t_0)$ (> 0), $v''(t_0) = y''(t_0)$, $v'''(t_0) > y'''(t_0)$ erfüllt. Dann genügt die Lösung $z(x) = v(x) - y(x)$ der Gleichung (14) den Anfangsbedingungen: $z(t_0) = z'(t_0) = z''(t_0) = 0$, $z'''(t_0) > 0$. Nach dem Lemma 36 ist $z'(x) > 0$ für $x \neq t_0$. Das bedeutet, dass $v'(x) > y'(x) > 0$ für $x \neq t_0$, $v'(t_0) > 0$ ist. Also ist $v'(x) > 0$ für $x \in (a, \infty)$. Um den Fall 2 zu beweisen, konstruieren wir eine Lösung $u(x)$, welche die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt: $u(t_0) = y(t_0)$ (> 0), $u'(t_0) = y'(t_0)$, $u''(t_0) > y''(t_0)$ (> 0), $u'''(t_0) = y'''(t_0)$. Dann ist $w(x) = u(x) - y(x)$ eine Lösung der Gleichung (14) mit den Anfangsbedingungen: $w(t_0) = w'(t_0) = w'''(t_0) = 0$, $w''(t_0) > 0$. Nach dem Lemma 36 ist $w(x) > 0$ und $w''(x) > 0$ für $x \neq t_0$. Das bedeutet, dass $u(x) > 0$, $u''(x) > 0$ für alle $x \in (a, \infty)$ ist. Der Satz ist bewiesen.

Lemma 39. *Sei* $y(x)$ *eine nichttriviale Lösung der Gleichung* (14). *Für die Zahlen* $b < c < d$ ($a < b$) *gelte:* $y^{(i)}(b) = y(c) = y^{(j)}(d) = 0$, $0 \leqq i, j \leqq 2$ *ganzzahlig. Dann ist* $y'(c) \neq 0$.

Von diesem Lemma folgt unmittelbar

Folgerung 40. *Eine nichttriviale Lösung der Gleichung* (14) *besitzt im Intervall* (a, ∞) *nicht mehr als zwei zweifache Nullstellen.*

Von den Lemmas 36 und 37 folgt

Folgerung 41. *Hat eine nichttriviale Lösung der Gleichung* (14) *zwei zweifache*

Nullstellen in den Punkten $b < c$ $(a < b)$, dann liegen alle übrigen (einfachen) Nullstellen dieser Lösung im Intervall (b, c).

Satz 42. *Jede zwei nichttriviale Lösungen $u(x)$ und $y(x)$ der Gleichung (14), welche in den Punkten $b < c < d$ $(a < b)$ die Bedingungen: $u^{(i)}(b) = v^{(i)}(b) = u^{(j)}(c) = v^{(j)}(c) = u^{(k)}(d) = v^{(k)}(d) = 0$, $0 \leqq i, k \leqq 2$ ganz, $j = 0, 1$ erfüllen, sind linear abhängig.*

Satz 43. *Jede zwei nichttrivialen Lösungen $u(x)$ und $v(x)$ der Gleichung (14), welche die Bedingungen: $u(b) = u'(b) = u^{(i)}(c) = 0$, $v(b) = v'(b) = v^{(i)}(c) = 0$, wo $b \neq c$ $(a < b, c)$, $0 \leqq i \leqq 2$ ganz, erfüllen, sind linear abhängig.*

Satz 44. *Jede zwei nichttrivialen Lösungen der Gleichung (14), welche drei gemeinsame Nullstellen haben, sind linear abhängig.*

Satz 45. *Es seien $u(x)$ und $v(x)$ nichttriviale, linear unabhängige Lösungen der Gleichung (14), welche in den Punkten $b < c$ $(a < b)$ folgende Bedingungen: $u^{(i)}(b) = v^{(i)}(b) = u^{(j)}(c) = v^{(j)}(c) = 0$, $0 \leqq i, j \leqq 2$ ganz, erfüllen. Dann trennen sich im Intervall (b, c) gemeinsam die Nullstellen der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$.*

Satz 46. *Es seien $u(x)$ und $v(x)$ nichttriviale Lösungen der Gleichung (14), welche in den Punkten $b < c < d$ $(a < b)$ die Bedingungen: $u^{(i)}(b) = v^{(i)}(b) = u^{(j)}(c) = v^{(k)}(d) = 0$, $0 \leqq i, j, k \leqq 2$ ganz, erfüllen. Dann gibt es eine Lösung $y(x)$ der Gleichung (14) so, dass $y^{(i)}(b) = 0$ ist und deren Nullstellen trennen sich im Intervall (b, c) gemeinsam mit den Nullstellen der Lösung $u(x)$ so wie auch mit den Nullstellen der Lösung $v(x)$.*

Lemma 47. *Es seien $u(x)$ und $v(x)$ nichttriviale, linear unabhängige Lösungen der Gleichung (14), welche die Bedingungen: $u(b) = u'(b) = u^{(i)}(c) = 0$ und $v(b) = v^{(i)}(c) = 0$, wo $b \neq c$ $(a < b, c)$, $0 \leqq i \leqq 2$ ganz, erfüllen. Sei $x = \beta \in (b, c\rangle$ bzw. $\beta \in \langle c, b)$ die erste Nullstelle der Lösung $u(x)$ rechts bzw. links vom Punkt b. Dann hat die Lösung $v(x)$ genau eine Nullstelle im Intervall (b, β) bzw. (β, b).*

Lemma 48. *Es seien $u(x)$ und $v(x)$ nichttriviale Lösungen der Gleichung (14). Die Lösung $u(x)$ besitze in den Punkten $b < c$ $(a < b)$ zweifache Nullstellen und die Lösung $v(x)$ besitze in diesen Punkten einfache Nullstellen. Es sei β bzw. γ die erste Nullstelle der Lösung $u(x)$ rechts vom Punkt b bzw. links vom Punkt c. Dann hat die Lösung $v(x)$ genau eine Nullstelle im Intervall (b, β) und genau eine Nullstelle im Intervall (γ, c).*

Bemerkung. Zum Unterschied mit dem Lemma 47, wo $\beta \neq c$ für $i = 0$ ist, kann im Lemma 48 $\beta = c$ sein (das ist dasselbe wie $\gamma = b$).

Vom Satz 45 und dem Lemma 48 folgt unmittelbar

Folgerung 49. *Eine nichttriviale Lösung $u(x)$ der Gleichung (14) besitze in den Punkten $b < c$ $(a < b)$ zweifache Nullstellen und eine nichttriviale Lösung $v(x)$ der Gleichung (14) besitze in diesen Punkten einfache Nullstellen. Dann hat die Lösung $u(x)$ genau dann n $(\geqq 0)$ Nullstellen im Intervall (b, c), wenn die Lösung $v(x)$ $n + 1$ Nullstellen in diesem Intervall hat.*

Satz 50. *Es sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (14), welche eine einfache oder zweifache Nullstelle im Punkt $x = b$ $(a < b)$ und mindestens $n + 3$ $(n \geqq 1)$ Nullstellen im Intervall $\langle b, \infty)$ hat (zweifache Nullstellen werden als zwei Nullstellen gerechnet). Dann existieren n Punkte η_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $(b < < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_n)$ und n Lösungen $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, der Gleichung (14) mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$y_k(x)$, $0 \leqq k \leqq n$, hat in den Punkten $x = b$ und $x = \eta_k$ zweifache Nullstellen,*
2. *$y_k(x)$ hat im Intervall $\langle b, \eta_k \rangle$ genau $k + 3$ Nullstellen,*
3. *jede nichttriviale Lösung $u(x)$ der Gleichung (14), weclhe nicht ein konstantes Vielfaches von $y_k(x)$ ist und für welche $u(b) = 0$ ist, hat im Intervall $\langle b, \eta_k \rangle$ weniger als $k + 3$ Nullstellen.*

Jede Lösung der Gleichung (14), welche dieselbe Eigenschaften wie $y_k(x)$ hat, ist ein konstantes Vielfaches von $y_k(x)$.

Den Punkt $x = \eta_n$ bezeichnen wir mit dem Symbol $\eta_n(b)$ und nennen ihn den *n-ten (rechten) mit dem Punkt $x = b$ konjugierten Punkt.* Die Lösung $y_n(x)$ nennen wir die *mit dem n-ten konjugierten Punkt vereinigte Extremallösung.*

Lemma 51. *Es sei $u_n(x)$ die mit dem n-ten konjugierten Punkt $\eta_n(b)$ $(a < b)$ vereinigte Extremallösung der Gleichung (14). Sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (14), welche eine zweifache Nullstelle im Punkt $x = b$ hat und welche mindestens n einfache Nullstellen im Intervall (b, ∞) hat. Wenn die Lösungen $u_n(x)$ und $y(x)$ linear unabhängig sind, dann hat die Lösung $y(x)$ genau diese n Nullstellen im Intervall $(b, \eta_n(b))$.*

Daher folgt sofort

Satz 52. *Es sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung (14), welche im Punkt $x = b$ eine zweifache Nullstelle hat. Dann liegt zwischen jeden zwei benachbarten Nullstellen der Lösung $y(x)$ im Intervall (b, ∞) genau ein konjugierter Punkt $\eta_n(b)$. (Wenn die letzte Nullstelle der Lösung $y(x)$ zweifach ist, dann fällt diese mit dem konjugierten Punkt zusammen.)*

Ähnlicherweise wie bei den Lösungen der Gleichung (12) nennen wir auch eine *Lösung* der Gleichung (14) *oszillierend,* wenn die Menge deren Nullstellen im Intervall (a, ∞) unendlich und von oben unbeschränkt ist. In allen übrigen Fällen nennen wir die *Lösung nichtoszillierend.*

Die Gleichung (14) nennen wir *oszillierend*, wenn sie mindestens eine oszillierende Lösung hat und *nichtoszillierend*, wenn alle deren Lösungen nichtoszillierend sind.

Satz 53. *Die Gleichung* (14) *ist genau dann oszillierend, wenn für ein beliebiges* $b \in (a, \infty)$ *unendlich viele konjugierte Punkte* $\eta_n(b)$ *existieren.*

Satz 54. *Die konjugierten Punkte* $\eta_n^0(b)$ *der Gleichung* (12) *fallen mit den konjugierten Punkten* $\eta_n(b)$ *der Gleichung* (14) *zusammen.*

Beweis. Die Beweismethode ist in der Arbeit [2] gegeben (der Beweis des ersten Teiles des Satzes 10). Sei $L(u) = 0$ bzw. $M(v) = 0$ die Gleichung (12) bzw. (14). Dann ist

$$\int_b^c [v \,.\, L(u) - u \,.\, M(v)] \,\mathrm{d}x = \tag{16}$$

$$= [u''' \,.\, v - v''' \,.\, u - u'' \,.\, v' + v'' \,.\, u' + p \,.\, v \,.\, u' - u \,.\, (p \,.\, v)']_b^c = 0\,, \quad b > a\,.$$

Es existiere eine mit dem konjugierten Punkt $c = \eta_n^0(b)$ vereinigte Extremallösung $u(x)$ der Gleichung (12). Das bedeutet, dass $u(b) = u'(b) = u(c) = u'(c) = 0$ ist. Man kann eine Lösung $v(x)$ der Gleichung (14) so konstruieren, dass $v(b) = v'(b) = v(c) = 0$ sein wird. Wenn wir in (16) einsetzen, erhalten wir: $u''(c) \,.\, v'(c) = 0$. Nach dem Lemma 7 (Fall a)) ist $u''(c) \neq 0$. Das bedeutet, dass $v'(c) = 0$ ist. Nach einem Vertauschen der Gleichung (12) mit der Gleichung (14) ergibt sich dasselbe. Der Satz ist bewiesen.

Von den Sätzen 30, 53 und 54 folgt

Satz 55. *Die Gleichung* (14) *ist genau dann oszillierend, wenn die Gleichung* (12) *oszillierend ist.*

Von den Sätzen 18 und 54 folgt

Satz 56. $\eta_n(b)$ *ist eine wachsende Funktion der Variablen* b $(> a)$.

Vom Lemma 19 und dem Satz 54 folgt

Lemma 57. *Es sei* $b > a$ *und* $c = \eta_n(b)$ *sei der n-te konjugierte Punkt der Gleichung* (14). *Dann sind die Ungleichungen* $\eta_{n+k}(b) < \eta_k(c) < \eta_{n+k+2}(c)$, *wo* k, n *natürliche Zahlen sind, erfüllt.*

Vom Satz 56 und dem Lemma 57 folgt unmittelbar

Satz 58. *Sei* $b > a$ *und* $\eta_n(b) \leqq c \leqq \eta_{n+1}(b)$. *Dann ist*

$$\eta_{n+k}(b) \leqq \eta_k(c) < \eta_{n+k+3}(b)\,, \tag{17}$$

wo $n \geqq 0$, $k > 1$ *ganze Zahlen sind und* $b = \eta_0(b)$. *Das Gleichheitszeichen gilt in der Ungleichung* (17) *nur für* $n = 0$ (*d. h.* $b = c$).

Nun beweisen wir einen Vergleichssatz für die Gleichungen (12) und

$$y^{(4)} + p(x) \, . \, y'' + q_1(x) \, . \, y = 0 \tag{18}$$

und für die adjungierte Gleichung (14) und

$$y^{(4)} + [p(x) \, . \, y]'' + q_1(x) \, . \, y = 0 \,, \tag{19}$$

wobei $q_1(x) \leqq q(x) < 0$ und q_1, q sind im Intervall (a, ∞) stetig.

Offenbar gelten alle für die Gleichung (12) bzw. (14) angeführten Sätze auch für die Gleichung (18) bzw. (19).

Satz 59. *Es sei $\eta_n^0(b)$ ein konjugierter Punkt der Gleichung (12) (und der Gleichung (14)) und $\bar{\eta}_n^0(b)$ sei ein konjugierter Punkt der Gleichung (18) (und der Gleichung (19)). Dann ist die Ungleichung*

$$\bar{\eta}_n^0(b) \leqq \eta_{3n-2}^0(b) \tag{20}$$

erfüllt. Das Zeichen $=$ gilt in dieser Ungleichung höchstens für $n = 1$.

Beweis. Sei $u(x)$ die mit dem konjugierten Punkt $c = \eta_1^0(b)$ vereinigte Extremallösung der Gleichung (12). Wir konstruieren eine Lösung $v(x)$ der adjungierten Gleichung (19) so, dass $v(b) = v'(b) = v(c) = 0$. Ohne Einschränkung kann man voraussetzen, dass $u(x) > 0$ für $x \in (b, c)$ ist. Setzen wir voraus, dass $v(x) > 0$ für $x \in (b, c)$ ist. Wir multiplizieren die Gleichung (12) mit $v(x)$ und die Gleichung (19) mit $u(x)$. Nach der Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und nach Integration von b bis c ergibt sich

$$u''(c) \, . \, v'(c) = \int_b^c (q - q_1) \, . \, u \, . \, v \, \mathrm{d}x \, . \tag{21}$$

Der Voraussetzung nach ist $u''(c) > 0$. Nachdem die rechte Seite der Gleichung (21) nichtnegativ ist, muss $v'(c) \geqq 0$ sein. Dei Bedingung $v'(c) > 0$ widerspricht der Voraussetzung: $v(x) > 0$ für $x \in (b, c)$. Das bedeutet, dass $v(x)$ mindestens eine Nullstelle im Intervall (b, c) hat. Nach den Sätzen 52 und 54 also ist $\bar{\eta}_1^0(b) \leqq \eta_1^0(b)$. Die Ungleichung (20) beweisen wir nun durch Induktion. Setzen wir voraus, dass sie für ein beliebiges (natürliches) $n = k$ erfüllt ist. Sei $b_1 = \bar{\eta}_1^0(b)$. Nach dem Lemma 19 ist

$$\bar{\eta}_{k+1}^0(b) < \bar{\eta}_k^0(b_1) < \bar{\eta}_{k+3}^0(b) \tag{22}$$

und nach dem Satz 20 ist

$$\eta_k^0(b) < \eta_k^0(b_1) < \eta_{k+3}^0(b) \, . \tag{23}$$

Der Voraussetzung nach ist die Ungleichung $\bar{\eta}_k^0(b_1) < \eta_{3k-2}^0(b_1)$ erfüllt. Von der zweiten Ungleichung in (23) folgt die Ungleichung $\eta_{3k-2}^0(b_1) < \eta_{3k+1}^0(b)$. Von diesen letzten zwei Ungleichungen und von der ersten Ungleichung in (22) ergibt sich die Ungleichung $\bar{\eta}^0_{k+1}(b) < \eta^0_{3k+1}(b)$. Das bedeutet, dass die Ungleichung (20) auch für $n = k + 1$ gilt. Also gilt diese für alle n. Nach dem Satz 54 gilt unser Satz auch für die adjungierten Gleichungen (14) und (19).

Der Satz 59 sichert (für ein beliebiges natürliches n) die Existenz des Punktes $\bar{\eta}^0_n(b)$, wenn der Punkt $\eta^0_{3n-2}(b)$ existiert. Wenn wir noch die Behauptungen der Sätze 30 (bzw. 53) und 55 in Betracht nehmen, dann bekommen wir den folgenden.

Satz 60. *Es sei die Gleichung* (12) (*oder die Gleichung* (14)) *oszillierend und sei die Ungleichung* $q_1(x) \leqq q(x)$ (< 0) *erfüllt. Dann sind auch die Gleichungen* (18) *und* (19) *oszillierend.*

Zum Schluss führen wir noch hinreichende Bedingungen dafür an, dass die Gleichungen (12) und (14) nichtoszillierend sind.

Satz 61. *Es sollen die Integrale*

$$\int_b^\infty |p''(x)/2 + q(x)| \, dx \,, \quad \int_b^\infty (\varepsilon - p(x))^{-1} \, dx$$

existieren, wo $0 < \varepsilon \leqq \pi^2/(c - b)^2$ *und* $b < c$ *beliebige Zahlen vom Intervall* (a, ∞) *sind. Dann sind die Gleichungen* (12) *und* (14) *nichtoszillierend.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass die Gleichung (14) oszillierend ist. Nach dem Satz 53 gibt es einen konjugierten Punkt $c_1 = \eta_k(b)$ und eine Extremallösung $y(x)$ der Gleichung (14) so, dass $y(b) = y'(b) = y(c_1) = y'(c_1) = 0$. Wenn man die Gleichung (14) mit $y(x)$ multipliziert und diese dann von b bis c_1 integriert, ergibt sich

$$\int_b^{c_1} y''^2 \, dx - \int_b^{c_1} p \, y'^2 \, dx = - \int_b^{c_1} (p''/2 + q) \, . \, y^2 \, dx \,. \tag{24}$$

Für die Lösung $y(x)$ gilt die Ungleichung (siehe D. Sansone: Обыкновенные дифференциальные уравнения (russische Übersetzung), 1953, S. 262):

$$\pi^2/(c - b)^2 \, . \int_b^{c_1} y'^2 \, dx \leqq \int_b^{c_1} y''^2 \, dx \,. \tag{25}$$

Sei $0 < \varepsilon \leqq \pi^2/(c - b)^2$, wobei $b < c_1 < c$. Von (24) und (25) ergibt sich

$$\int_b^{c_1} (\varepsilon - p) \, . \, y'^2 \, dx \leqq \int_b^{c_1} |p''/2 + q| \, . \, y^2 \, dx \,. \tag{26}$$

$$y = \int_b^x y' \, dx \,, \quad \varepsilon - p > 0 \,,$$

also ist

$$y = \int_b^x (\varepsilon - p)^{-1/2} \cdot y' \cdot (\varepsilon - p)^{1/2} \, \mathrm{d}t \, .$$

Daher und von der Buňakowski-Schwarz-Ungleichung folgt die Ungleichung

$$y^2(x) \leqq \int_b^x (\varepsilon - p(t))^{-1} \, \mathrm{d}t \, . \int_b^x (\varepsilon - p(t)) \, . \, y'^2(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Wenn $b < x < c_1$ ist, dann ist

$$y^2(x) \leqq \int_b^x (\varepsilon - p(t))^{-1} \, \mathrm{d}t \, . \int_b^{c_1} (\varepsilon - p(t)) \, . \, y'^2(t) \, \mathrm{d}t.$$

Wenn wir diese Ungleichung mit $|p''/2 + q|$ multiplizieren und von b bis c_1 integrieren, dann ergibt sich, mit Rücksicht auf (26), die Ungleichung

$$\int_b^{c_1} (\varepsilon - p) \, . \, y'^2 \, \mathrm{d}x \leqq \int_b^{c_1} |p''/2 + q| \, . \left[\int_b^x (\varepsilon - p(t))^{-1} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \, . \int_b^{c_1} (\varepsilon - p) \, . \, y'^2 \, \mathrm{d}x \, .$$

Daher folgt

$$1 \leqq \int_b^{c_1} |p''/2 + q| \, . \left[\int_b^x (\varepsilon - p(t))^{-1} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \, ,$$

$$1 \leqq \int_b^{c_1} |p''/2 + q| \, \mathrm{d}x \, . \int_b^{c_1} (\varepsilon - p)^{-1} \, \mathrm{d}x \, .$$

Sei $\int_b^\infty |p''/2 + q| \, \mathrm{d}x = K < \infty$. Dann ist

$$1 \leqq K \, . \int_b^{c_1} (\varepsilon - p)^{-1} \, \mathrm{d}x \, .$$

Nachdem wir voraussetzen, dass die Gleichung (14) oszillierend ist, gibt es immer zu dem Punkt c_{n-1} einen konjugierten Punkt c_n, wo n eine beliebige natürliche Zahl und $c_0 = b$ ist. Wenn wir dieses Verfahren n-mal wiederholen (wir integrieren immer von c_{n-1} bis c_n), bekommen wir n Ungleichungen:

$$1 \leqq K \, . \int_{c_{k-1}}^{c_k} (\varepsilon - p)^{-1} \, \mathrm{d}x \, , \quad k = 1, 2, \ldots, n \, .$$

Durch das Addieren dieser Ungleichungen ergibt sich die Ungleichung

$$n \leqq K \, . \int_b^{c_n} (\varepsilon - p)^{-1} \, \mathrm{d}x \, .$$

Da n eine beliebige natürliche Zahl ist, ist diese Ungleichung in einem Widerspruch mit der Voraussetzung, dass die gegebenen Integrale existieren. Damit haben wir die Behauptung des Satzes für die Gleichung (14) bewiesen. Nach dem Satz 55 gilt die Behauptung auch für die Gleichung (12).

Von der Gleichung (24), Satz 54 (und dem Satz 50) folgt

Lemma 62. *Es sei* $\frac{1}{2}p''(x) + q(x) \geqq 0$ *für* $x \in (a, \infty)$. *Dann gibt es keine konjugierten Punkte* $\eta_n^0(b)$ $(b > a)$ *der Gleichungen* (12) *und* (14). (*Keine Lösung der Gleichung* (12) *und* (14) *hat mehr als drei Nullstellen.*)

Daher folgt unmittelbar

Satz 63. *Es sei* $\frac{1}{2}p''(x) + q(x) \geqq 0$ *für* $x \in (a, \infty)$. *Dann sind die Gleichungen* (12) *und* (14) *nichtoszillierend.*

Literatur

[1] *V. Pudei:* O vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y^{(4)} + p(x) . y'' + q(x) . y = 0$. Časopis pro pěstování matematiky; *93* (1968), 201—216.

[2] *T. L. Sherman:* Properties of solutions of n^{th} order linear differential equations. Pac. J. Math., *15* (1965), 1045—1060.

Anschrift des Verfassers: Pardubice, Leninovo náměstí 565 (Vys. škola chemicko-technologická).