Časopis pro pěstování matematiky

František Zítek

Sur la norme de Fourier. II.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 1, 62--65

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117684

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

SUR LA NORME DE FOURIER, II

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 5 août 1968)

Nous renvoyons notre Lecteur à notre travail antérieur [4] où il trouvera toutes les définitions et explications nécessaires.

Le présent article a pour but de démontrer l'équivalence, dans l'espace Q, de toutes les trois normes dont on parle dans [4]: celle de Fourier, celle de Gauss et la norme majorante de H. Bergström. Nous allons commencer par démontrer la proposition suivante:

Il existe une constante positive C telle que l'on ait pour toute fonction $f \in \mathsf{Q}$ l'inégalité

$$(1) \qquad \| f \|_\sigma \leqq C \cdot {}_F\| f \|_\sigma$$

pour tout $\sigma > 0$.

En effet, soit $f \in \mathsf{Q}$ et posons $a = f(-\infty)$, $b = f(+\infty)$, $c = \max[0, f(0-) - f(0+)]$. Nous pouvons alors écrire f sous la forme de $f(t) = a + (b - a + c) H(t) - c\, E(t)$, où $H \in \mathsf{D}$, E est la fonction unité: $E(t) = 0$ pour $t < 0$, $E(t) = 1$ pour $t > 0$, $E(0) = \frac{1}{2}$, et $(b - a + c) \geqq 0$. Alors si $\varphi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}\, \mathrm{d}f(t)$, $\chi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}\, \mathrm{d}H(t)$, nous avons

$$(2) \qquad \varphi(s) = (b - a + c)\, \chi(s) - c = (b - a + c)\, [\chi(s) - 1] + (b - a)\,.$$

D'après la définition de la norme de Fourier

$$_F\| f \|_\sigma = |a| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi(s)| =$$
$$= |a| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |(b - a + c)\, [\chi(s) - 1] + (b - a)|\,.$$

On a donc

$$(3) \qquad |a| \leqq {}_F\| f \|_\sigma \quad \text{pour tout} \quad \sigma > 0$$

et

(4) $$|(b-a+c)[\chi(0)-1]+(b-a)| = |b-a| \leqq {}_F\|f\|_\sigma \quad \text{pour tout} \quad \sigma > 0,$$

d'où

(5) $$\sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |(b-a+c)[\chi(s)-1]| =$$
$$= \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |(b-a+c)[\chi(s)-1]+(b-a)-(b-a)| \leqq$$
$$\leqq \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |(b-a+c)[\chi(s)-1]+(b-a)| + |b-a| \leqq 2 \cdot {}_F\|f\|_\sigma .$$

Considérons maintenant l'expression

$$|a| + \int_{-\infty}^{-\sigma} |\mathrm{d}f(t)| + \int_{\sigma}^{+\infty} |\mathrm{d}f(t)| =$$
$$= |a| + (b-a+c)\int_{-\infty}^{-\sigma} \mathrm{d}H(t) + (b-a+c)\int_{\sigma}^{+\infty} \mathrm{d}H(t) \leqq$$
$$\leqq |a| + (b-a+c)\int_{|t| \geqq \sigma} \mathrm{d}H(t) .$$

Nous appliquons l'inégalité (11.8) du premier chapitre de [2] où nous posons $\mu = \sigma$, $\varrho = \sigma^{-1}$, $A = [0, \sigma^{-1}]$, $a = \sigma^{-1}$, ce qui donne l'inégalité

$$\int_{|t| \geqq \sigma} \mathrm{d}H(t) \leqq \frac{(\sigma^{-1} + 2\pi\sigma^{-1})^2}{\sigma^{-3}} \int_0^{1/\sigma} \mathrm{Re}\,[1-\chi(s)]\,\mathrm{d}s \leqq (1+2\pi)^2 \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |1-\chi(s)| ,$$

d'où

(6) $$(b-a+c)\int_{|t| \geqq \sigma} \mathrm{d}H(t) \leqq (1+2\pi)^2 (b-a+c) \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\chi(s)-1| \leqq$$
$$\leqq 2(1+2\pi)^2 \cdot {}_F\|f\|_\sigma ,$$

en vertu de (5). Il en résulte enfin l'inégalité

(7) $$|a| + \int_{-\infty}^{-\sigma} |\mathrm{d}f(t)| + \int_{\sigma}^{+\infty} |\mathrm{d}f(t)| \leqq [2(1+2\pi)^2 + 1] \cdot {}_F\|f\|_\sigma .$$

Considérons maintenant l'expression

$$\sigma^{-2} \int_{|t| \leqq \sigma} t^2 |\mathrm{d}f(t)| = \sigma^{-2}(b-a+c) \int_{|t| \leqq \sigma} t^2 \,\mathrm{d}H(t) .$$

Nous appliquons une autre inégalité de [2], à savoir (11.9) du chapitre 1, et nous trouvons

$$(8) \qquad \sigma^{-2}(b - a + c)\int_{|t|\leqq\sigma} t^2\,\mathrm{d}H(t) \leqq$$

$$\leqq \sigma^{-2}(b - a + c)(1 + 2\pi)^2\,\sigma^3\int_0^{1/\sigma}\mathrm{Re}\,[1 - \chi(s)]\,\mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq (b - a + c)(1 + 2\pi)^2 \sup_{|s|\leqq 1/\sigma}|\chi(s) - 1| \leqq 2(1 + 2\pi)^2\,.\,{}_F\|f\|_\sigma\,.$$

Ensuite, en combinant (3) et (4) nous voyons que

$$(9) \qquad |f(+\infty)| = |b| = |b - a + a| \leqq |b - a| + |a| \leqq 2\,.\,{}_F\|f\|_\sigma\,.$$

Considérons enfin l'expression

$$\left|\sigma^{-1}\int_{|t|\leqq\sigma} t\,\mathrm{d}f(t)\right| = \sigma^{-1}(b - a + c)\left|\int_{|t|\leqq\sigma} t\,\mathrm{d}H(t)\right|.$$

Pour tout s tel que $|s\sigma| \leqq 1$, nous avons

$$\chi(s) - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{ist} - 1)\,\mathrm{d}H(t) =$$

$$= \int_{|t|>\sigma}(e^{ist} - 1)\,\mathrm{d}H(t) + \int_{|t|\leqq\sigma}(e^{ist} - 1 - ist)\,\mathrm{d}H(t) + \int_{|t|\leqq\sigma} ist\,\mathrm{d}H(t)\,,$$

donc

$$\int_{|t|\leqq\sigma} ist\,\mathrm{d}H(t) = \chi(s) - 1 - \int_{|t|>\sigma}(e^{ist} - 1)\,\mathrm{d}H(t) - \int_{|t|\leqq\sigma}(e^{ist} - 1 - ist)\,\mathrm{d}H(t)\,,$$

ce qui donne

$$(10) \qquad |s|\,.\left|\int_{|t|\leqq\sigma} t\,\mathrm{d}H(t)\right| \leqq |\chi(s) - 1| + 2\int_{|t|>\sigma}\mathrm{d}H(t) + \tfrac{1}{2}s^2\int_{|t|\leqq\sigma} t^2\,\mathrm{d}H(t) \leqq$$

$$\leqq \sup_{|s|\leqq 1/\sigma}|\chi(s) - 1| + 2\int_{|t|>\sigma}\mathrm{d}H(t) + \tfrac{1}{2}\sigma^{-2}\int_{|t|\leqq\sigma} t^2\,\mathrm{d}H(t)\,.$$

En multipliant (10) par $(b - a + c)$ nous obtenons en vertu de (5), (6) et (8)

$$|s|\,.(b - a + c)\left|\int_{|t|\leqq\sigma} t\,\mathrm{d}H(t)\right| \leqq (b - a + c)\sup_{|s|\leqq 1/\sigma}|\chi(s) - 1| +$$

$$+ 2(b - a + c)\int_{|t|\geqq\sigma}\mathrm{d}H(t) + \tfrac{1}{2}\sigma^{-2}(b - a + c)\int_{|t|\leqq\sigma} t^2\,\mathrm{d}H(t) \leqq$$

$$\leqq 2\,.\,{}_F\|f\|_\sigma + 4(1 + 2\pi)^2\,{}_F\|f\|_\sigma + (1 + 2\pi)^2\,{}_F\|f\|_\sigma =$$

$$= [2 + 5(1 + 2\pi)^2]\,.\,{}_F\|f\|_\sigma\,.$$

Cette inégalité est vraie pour tout s tel que $|s\sigma| \leqq 1$, donc aussi pour $s = \sigma^{-1}$, c'est-à-dire que

$$(11) \qquad \sigma^{-1}(b - a + c)\left|\int_{|t| \leqq \sigma} t \, \mathrm{d}H(t)\right| \leqq [2 + 5(1 + 2\pi)^2] \, . \, {}_F\|f\|_\sigma \, .$$

En somme, nous pouvons écrire les quatre inégalités suivantes

$$(12) \qquad |f(-\infty)| + \int_{-\infty}^{-\sigma} |\mathrm{d}f(t)| + \int_{\sigma}^{+\infty} |\mathrm{d}f(t)| \leqq$$
$$\leqq 2[(1 + 2\pi)^2 + 1] \, . \, {}_F\|f\|_\sigma \leqq [2 + 5(1 + 2\pi)^2] \, . \, {}_F\|f\|_\sigma$$

en vertu de (7),

$$(13) \qquad |f(+\infty)| \leqq 2 \, . \, {}_F\|f\|_\sigma \leqq [2 + 5(1 + 2\pi)^2] \, . \, {}_F\|f\|_\sigma$$

en vertu de (9),

$$(14) \qquad \sigma^{-1}\left|\int_{|t| \leqq \sigma} t \, \mathrm{d}f(t)\right| \leqq [2 + 5(1 + 2\pi)^2] \, . \, {}_F\|f\|_\sigma$$

en vertu de (11) et

$$(15) \qquad \sigma^{-2}\int_{|t| \leqq \sigma} t^2 |\mathrm{d}f(t)| \leqq 2(1 + 2\pi)^2 \, . \, {}_F\|f\|_\sigma \leqq [2 + 5(1 + 2\pi)^2] \, . \, {}_F\|f\|_\sigma$$

en vertu de (8).

En tenant compte de la définition de la norme majorante $\|f\|_\sigma$ (cfr. [1] ou bien [4], p. 350), nous voyons que pour toute fonction $f \in \mathrm{Q}$ on a

$$(16) \qquad \|f\|_\sigma \leqq [2 + 5(1 + 2\pi)^2] \, . \, {}_F\|f\|_\sigma$$

ce qui signifie que la proposition énoncée au début est vraie et que l'on peut poser $C = 2 + 5(1 + 2\pi)^2 = 7 + 20\pi + 20\pi^2 < 268$.

Dans [4], nous avons déjà démontré l'inégalité inverse ${}_F\|f\|_\sigma \leqq 5\|f\|_\sigma$ pour toute $f \in \mathrm{R}(\mathrm{M})$. Il en résulte donc que la norme de Fourier est équivalente à la norme majorante dans l'espace Q. Comme l'a montré M. H. Bergström (voir [1], p. 64), la norme de Gauss est équivalente à la norme majorante dans Q; dans cet espace, toutes les trois normes sont donc équivalentes, c.q.f.d.

Références

[1] *H. Bergström:* Limit Theorems for Convolutions. Stockholm—New York 1963.

[2] *J. L. Doob:* Stochastic Processes. New York 1953.

[3] *F. Zítek:* Sur quelques théorèmes limites pour les fonctions aléatoires. Časopis pro pěstování matematiky, *91* (1966), 453—462.

[4] *F. Zítek:* Sur la norme de Fourier. Časopis pro pěstování matematiky, *93* (1968), 349—353.

Adresse de l'auteur: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).