Pavel Bartoš

Über gewisse Eigenschaften der optischen Gleichung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 3, 300--304

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117798

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÜBER GEWISSE EIGENSCHAFTEN DER OPTISCHEN GLEICHUNG

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Eingegangen am 4. October 1972)

In diesem Artikel versteht man unter dem Begriff Zahl (wenn ausdrücklich nicht etwas anderes vorausgesetzt wird) immer natürliche Zahlen. Es werden für $n \geqq 2$ folgende Symbole benutzt:

$$P(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j\,; \quad M(x) = [x_1, x_2, \ldots, x_n]\,; \quad D(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,;$$

$$S(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,.$$

Im Artikel [3] wurde die Formel $M(x) = D(x)\, M(M(x)/x)$ abgeleitet und bei Lösung der Gleichung $S(x) = y\, M(x)$ benutzt. Dazu hat Herr ANDRZEJ MĄKOWSKI (Warszawa) den Autor aufmerksam gemacht, dass diese Formel bekannt war (s. [1], [2]).

In dieser Abhandlung werden mittels ähnlicher Formeln, die ganz einfach und wahrscheinlich auch schon bekannt sind, Lösungen gewisser Gleichungen auf die Lösung der optischen Gleichung

$$S\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \tag{1}$$

zurückgeführt.

Satz 1. *Für $n \geqq 2$ gelten die folgende Formeln:*

(2a) $$M\left(\frac{P(x)}{x}\right) = \frac{P(x)}{D(x)}\,;$$ (2b) $$D\left(\frac{P(x)}{x}\right) = \frac{P(x)}{M(x)}$$

(2c) $$M\left(\frac{M(x)}{x}\right) = \frac{M(x)}{D(x)}\,;$$ (2d) $$D\left(\frac{M(x)}{x}\right) = 1$$

(2e) $$M\left(\frac{x}{D(x)}\right) = \frac{M(x)}{D(x)}\,;$$ (2f) $$D\left(\frac{x}{D(x)}\right) = 1\,.$$

Beweis. Wir bestätigen die Formel (2a), der Beweis der übrigen ist analog.

Es sei $x_i = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_{i,j}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, wo p_j untereinander verschiedene Primzahlen und $\alpha_{i,j}$ nichtnegative ganze Zahlen sind so, dass für jedes i wenigstens eine $\alpha_{i,j}$ positiv ist. Sodann ist

$$M\left(\frac{P(x)}{x}\right) = \prod_{j=1}^{k} \exp\left\{\operatorname{Max}_{i}\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} - \alpha_{ij}\right] \ln p_j\right\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \exp\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} - \operatorname{Min}_{i} \alpha_{ij}\right] \ln p_j\right\} = \frac{P(x)}{D(x)}.$$

Satz 2. *Wenn* (a) *eine beliebige Lösung der Gleichung* (1) *ist, so haben die Gleichungen in der Tab.* 1 *die dort angegebene Lösungen.*

Beweis. Wir bestätigen den Fall No 1, analog sind die Beweise aller übrigen und darum werden sie da nicht angeführt. Nach (1) ist $S(P(a)/a) = P(a)\, S(1/a) = P(a)$ und nach (2a) ist $D(a)\, M(P(a)/a) = D(a)\,(P(a)/D(a)) = P(a)$.

Hiemit ist bestätigt, dass die Zahlen

$$x_i = \frac{P(a)}{a_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \quad y = D(a)$$

eine Lösung der Gleichung $S(x) = y\, M(x)$ darstellen.

Satz 3. *Wenn* (a) *eine beliebige Lösung der Gleichung* (1) *ist, so bilden die Zahlen*

$$x_i = \frac{P(a)}{a_i^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

eine Lösung (*in natürlichen Zahlen*) *der Gleichung*

$$[S(\sqrt{x})]^{n-2} = P(\sqrt{x})\,.$$

Beweis. Die Zahlen x_i sind tatsächlich natürliche Zahlen. Wegen der Symmetrie genügt es den Beweis für $i = n$ anzugeben. Nach (1) ist

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_i} = a_1 a_2 \ldots a_n\,,$$

woraus sichtbar ist, dass $a_n \mid a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ gilt.

Weiter haben wir

$$\left[S\left(\frac{\sqrt{P(a)}}{a}\right)\right]^{n-2} = \left[\sqrt{(P(a))}\, S\left(\frac{1}{a}\right)\right]^{n-2} = [\sqrt{P(a)}]^{n-2}$$

Tab. 1

No	Gleichung	Lösung		
		$x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$	y	z
1	$S(x) = y\, M(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$D(a)$	—
2	$S(x) = y\, D(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$M(a)$	—
3	$S(x)\, D(x) = y\, M(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$\frac{P(a)\, D(a)}{M(a)}$	—
		$\frac{M(a)}{a_i}$	$D(a)$	—
4	$S(x)\, M(x) = y\, D(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$\frac{M(a)\, P(a)}{D(a)}$	—
		$\frac{M(a)}{a_i}$	$\frac{[M(a)]^2}{D(a)}$	—
5	$[S(x)]^{n-1} = P(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	—	—
6	$z[S(x)]^{n-2}\, M(x) = P(x),\ n > 2$	$\frac{P(a)}{a_i}$	—	$D(a)$
7	$z[S(x)]^{n-2}\, D(x) = P(x),\ n > 2$	$\frac{P(a)}{a_i}$	—	$M(a)$
8	$z[S(x)]^{n-3}\, M(x)\, D(x) = P(x),\ n > 3$	$\frac{P(a)}{a_i}$	—	$M(a)\, D(a)$
9	$S(x) = y\, M(x)\, D(x)$	$\frac{P(a)}{a_i}$	$\frac{D(a)\, P(a)}{M(a)}$	—
		$\frac{M(a)}{a_i}$	$D(a)$	—
10	$z\, S(x) = y\, P(x)$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$P(a)$	$[M(a)]^{n-1}$
11	$z\, S(x)\, M(x) = y\, P(x),\ n > 2$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$P(a)$	$D(a)\, [M(a)]^{n-2}$

Tab. 1 *(Forsetzung)*

No	Gleichung	Lösung		
		$x_i, i = 1, 2, \ldots, n$	y	z
12	$z\, S(x)\, P(x) = y\, M(x)$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$D(a)\, [M(a)]^n$	$P(a)$
13	$z\, S(x)\, D(x) = y\, P(x)$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$P(a)$	$[M(a)]^{n-1}$
14	$z\, S(x)\, P(x) = y\, D(x)$	$\frac{M(a)}{a_i}$	$[M(a)]^{n+1}$	$P(a)$
15	$z\, S\left(\frac{1}{x}\right) = y\, M(x)$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^2$	$M(a)$
16	$S\left(\frac{1}{x}\right) = y\, D(x)$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$D(a)$	—
17	$S\left(\frac{1}{x}\right) M(x) = y\, D(x)$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$M(a)$	—
18	$z\, S\left(\frac{1}{x}\right) D(x) = y\, M(x)$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^2$	$M(a)$
19	$z\, S\left(\frac{1}{x}\right) = y\, M(x)\, D(x)$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^2$	$M(a)$
20	$z\, S\left(\frac{1}{x}\right) = y\, P(x)$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^{n+1}$	$P(a)$
21	$z\, S\left(\frac{1}{x}\right) M(x) = y\, P(x)$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^n$	$\frac{P(a)}{M(a)}$
22	$z\, S\left(\frac{1}{x}\right) P(x) = y\, M(x), \quad n > 2$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$P(a)$	$M(a)\, [D(a)]^{n-2}$
23	$z\, S\left(\frac{1}{x}\right) D(x) = y\, P(x)$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$[D(a)]^{n+1}$	$P(a)$
24	$z\, S\left(\frac{1}{x}\right) P(x) = y\, D(x)$	$\frac{a_i}{D(a)}$	$P(a)$	$[D(a)]^{n-1}$

und ebenfalls auch

$$P\left(\frac{\sqrt{P(a)}}{a}\right) = \frac{[\sqrt{P(a)}]^n}{P(a)} = [\sqrt{P(a)}]^{n-2}\,.$$

Satz 4. *Wenn* (α) *die sogenannte extreme Lösung der Gleichung* (1) *ist, dann bilden die Zahlen*

$$x_i = \frac{\sqrt{P(\alpha)}}{\alpha_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$[S(x)]^{n-2} = P(x)\,.$$

Beweis. Es ist

$$\left[S\left(\frac{\sqrt{P(\alpha)}}{\alpha}\right)\right]^{n-2} = [\sqrt{P(\alpha)}]^{n-2}$$

und

$$P\left(\frac{\sqrt{P(\alpha)}}{\alpha}\right) = \frac{[\sqrt{P(\alpha)}]^n}{P(\alpha)} = [\sqrt{P(\alpha)}]^{n-2}$$

und somit ist die Gleichung befriedigt. Wie bekannt, hat die extreme Lösung der Gleichung (1) die Eigenschaft

$$\alpha_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$$

aus der hervorgeht, dass $\sqrt{P(\alpha)}/\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ ganze Zahlen sind, weiter ist leicht zu erkennen, dass $x_n = 1$ ist. So ist der Beweis vollendet.

Mit den angegebenen Ergebnissen sind keinerfalls alle Möglichkeiten erschöpft. Die Lösungen der optischen Gleichung liefern in Verbindung mit den Formeln (2) sehr mannigfaltige Beziehungen.

Literatur

[1] *Stieltjes T. J.:* Sur la théorie des nombres. Annales de la fac. des Sciences de Toulouse, *4* (1890).

[2] *Kesaan Menon P.:* A generalization of the Relation $[m, n]\,(m, n) = mn$. The Mathematics Student 37 (1969), 194—195.

[3] *Bartoš P.:* O jednom zovšeobecnení číselnoteoretického vzťahu $[a_1, a_2] = a_1a_2/(a_1, a_2)$ a jeho použití. Časopis pro pěstování matematiky, Praha, *97* (1972), 96—98.

Anschrift des Verfassers: 801 00 Bratislava, Sibírska 9.