Časopis pro pěstování matematiky

Jan Havrda

K zobecnění pojmu projektor

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 3, 265--268

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117808`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

K ZOBECNĚNÍ POJMU PROJEKTOR

JAN HAVRDA, Praha

(Došlo dne 17. ledna 1972)

Úkolem článku je jisté zobecnění známého pojmu projektor na lineárním prostoru se skalárním součinem, přičemž množinou, na kterou se promítá, je zde neprázdná konvexní uzavřená množina. V článku jsou též uvedeny některé základní vlastnosti tohoto zobecněného projektoru.

Symbolem L budeme značit lineární prostor se skalárním součinem $(.,.)$, symbol $\|.\|$ bude značit jím indukovanou normu. Velká písmena A, I, S apod. označují operátory definované na L s oborem hodnot v L; přitom I značí identický operátor. Symbolem L_A apod. budeme označovat obor hodnot operátoru A.

1. Lemma. 1. *Je-li A idempotentní operátor, pak množina L_A je rovna množině samodružných bodů operátoru A.*

2. *Je-li A spojitý idempotentní operátor, pak L_A je uzavřená množina.*

Důkaz je zřejmý.

2. Věta. *Buď A idempotentní operátor takový, že pro všechna $x_1, x_2 \in L$ platí*

$$\|Ax_1 - Ax_2\|^2 \leqq \operatorname{Re}(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2). \tag{1}$$

Potom L_A je neprázdná konvexní uzavřená množina a pro každé $x_0 \in L$ při všech $z \in L_A$ platí

$$\|x_0 - Ax_0\| \leqq \|x_0 - z\|. \tag{2}$$

Přitom Ax_0 je jediný bod množiny L_A, pro který při všech $z \in L_A$ platí nerovnost (2).

Důkaz. Z nerovnosti (1) vyplývá, že při všech $x_1, x_2 \in L$ platí $\|Ax_1 - Ax_2\| \leqq \leqq \|x_1 - x_2\|$, operátor A je tedy spojitý a podle 2) lemmatu 1 je L_A uzavřená množina. Okolnost, že $L_A \neq \emptyset$ je zřejmá.

Z nerovnosti (1) a 1) lemmatu 1 dále plyne, že pro všechna $x_1 \in L$ a $z \in L_A$ platí $\|Ax_1 - z\|^2 \leqq \operatorname{Re}(x_1 - z, Ax_1 - z)$ čili

$$\operatorname{Re}(z - Ax_1, x_1 - Ax_1) \leqq 0. \tag{3}$$

Nyní dokážeme, že L_A je konvexní množina. Buď $z_1, z_2 \in L_A$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Označme $y = A(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$, $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 - y = v$. Podle (3) platí $\operatorname{Re}(z_1, v) \leqq \operatorname{Re}(y, v)$, $\operatorname{Re}(z_2, v) \leqq \operatorname{Re}(y, v)$, tedy též $\operatorname{Re}(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, v) \leqq \operatorname{Re}(y, v)$ čili $\operatorname{Re}(y + v, v) \leqq \operatorname{Re}(y, v)$, takže $\|v\|^2 \leqq 0$. Odtud $v = 0$ a $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in L_A$.

Buď $x_0 \in L$, $z \in L_A$. Potom $\|z - x_0\|^2 - \|Ax_0 - x_0\|^2 = \|z - Ax_0\|^2 - 2 \operatorname{Re}(z - Ax_0, x_0 - Ax_0) \geqq 0$ v důsledku platnosti vztahu (3). Tedy platí (2). Jestliže pro $z_1 \in L_A$ platí $\|z_1 - x_0\| = \|Ax_0 - x_0\|$, pak $0 = \|z_1 - x_0\|^2 - \|Ax_0 - x_0\|^2 = \|z_1 - Ax_0\|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1 - Ax_0, x_0 - Ax_0) \geqq 0$ opět v důsledku platnosti vztahu (3), tedy $\|z_1 - Ax_0\| = 0$. Věta je dokázána.

3. Označení. Systém všech operátorů splňujících předpoklady věty 2 označme $\mathscr{A}_0$.

4. Důsledek. *Buď $A \in \mathscr{A}_0$. Potom každý bod $x \in L$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$x = x_0 + y_0\,, \quad x_0 \in L_A\,, \quad y_0 \in L \tag{4}$$

tak, že pro všechna $z \in L_A$ platí

$$\operatorname{Re}(z - x_0, y_0) \leqq 0\,. \tag{5}$$

Vyjádření bodu x ve tvaru (4) s vlastností (5) je jediné, přičemž $x_0 = Ax$.

Důkaz. Položíme-li $x_0 = Ax$, $y_0 = x - Ax$, platí (4) a (5) v důsledku platnosti nerovnosti (3). Zbývá tedy dokázat jen jednoznačnost. Kdyby navíc platilo $x = x_1 + y_1$, $x_1 \in L_A$, $y_1 \in L$, a kdyby při všech $z \in L_A$ bylo $\operatorname{Re}(z - x_1, y_1) \leqq 0$, pak $x_1 - x_0 = y_0 - y_1$, $\operatorname{Re}(x_1 - x_0, y_0) \leqq 0$, $\operatorname{Re}(x_0 - x_1, y_1) \leqq 0$, tudíž $0 \geqq \operatorname{Re}(x_1 - x_0, y_0 - y_1) = \operatorname{Re}(x_1 - x_0, x_1 - x_0) = \|x_1 - x_0\|^2$. Proto $x_1 = x_0$ a tedy též $y_0 = y_1$.

5. Lemma. Buď $A \in \mathscr{A}_0$.

1) *Jestliže $x \in L$, $x = Ax + y$, $\lambda \geqq 0$, potom $A(Ax + \lambda y) = Ax$.*

2) *Jestliže $x_1, x_2 \in L$, $x_1 = Ax_1 + y_1$, $x_2 = Ax_2 + y_2$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, pak existuje $x_3 \in L$ tak, že $Ax_3 = A(Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$.*

Důkaz. 1) Jestliže $x = Ax + y$, podle nerovnosti (3) pro všechna $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - Ax, y) \leqq 0$, tedy při $\lambda \geqq 0$ též $\operatorname{Re}(z - Ax, \lambda y) \leqq 0$. Označíme-li $v = Ax + \lambda y$, podle důsledku 4 dostáváme $Ax = Av = A(Ax + \lambda y)$.

2) Jestliže $x_1 = Ax_1 + y_1$, $x_2 = Ax_2 + y_2$, pak při všech $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - Ax_1, y_1) \leqq 0$, $\operatorname{Re}(z - Ax_2, y_2) \leqq 0$. Násobením prvé z těchto nerovností λ_1^2 a druhé λ_2^2 a sečtením dostaneme, že pro všechna $z \in L_A$ je $\operatorname{Re}(z - \lambda_1 Ax_1 - \lambda_2 Ax_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \leqq 0$. Podle věty 2 je $z_3 = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 \in L_A$. Existuje tedy $x_3 \in L$ tak, že $z_3 = Ax_3$. Přitom při všech $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - Ax_3, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \leqq 0$. Označíme-li $v = Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, vidíme, že podle důsledku 4 je $Ax_3 = Av = A(Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$.

6. Věta. *Buď $A \in \mathscr{A}_0$, $S = I - A$. Potom L_S je konvexní kužel.*

Důkaz. a) Buď $y \in L_S$, $\lambda \geqq 0$. Existuje $x \in L$ tak, že $y = Sx = x - Ax$. Podle 1) lemmatu 5 platí $\lambda y = Ax + \lambda y - Ax = Ax + \lambda y - A(Ax + \lambda y) = S(Ax + \lambda y)$, tedy $\lambda y \in L_S$.

b) Buďte $y_1, y_2 \in L_S$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Existují $x_1, x_2 \in L$ tak, že $y_1 = Sx_1$, $y_2 = Sx_2$. Podle 2) lemmatu 5 existuje $x_3 \in L$ tak, že $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - A(Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = S(Ax_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$, tedy $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in L_S$. Odtud $y_1 + y_2 = 2(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2) \in L_S$.

7. Věta. *Buď $A \in \mathscr{A}_0$, $S = I - A$. Je-li množina L_A kompaktní, pak $L_S = L$.*

Důkaz. Buď $y \in L$, $x_0 \in L_A$ a označme $A(x_0 + ny) = x_n$, $S(x_0 + ny) = y_n$. $n = 1, 2, \ldots$ Na základě věty 2 při $n = 1, 2, \ldots$ tedy platí $x_0 + ny = x_n + y_n$ a při všech $z \in L_A$ je $\operatorname{Re}(z - x_n, y_n) \leqq 0$. Poněvadž $x_n \in L_A$ při $n = 1, 2, \ldots$, existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$, která má limitu $x^0 \in L_A$. Při $k = 1, 2, \ldots$ platí

$$\frac{y_{n_k}}{n_k} = \frac{x_0 - x_{n_k}}{n_k} + y\,,$$

takže $\lim_k y_{n_k}/n_k = y$. Navíc při všech $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - x_{n_k}, y_{n_k}/n_k) \leqq 0$ a přechodem k limitě při $k \to \infty$ dostaneme $\operatorname{Re}(z - x^0, y) \leqq 0$. Označíme-li $v = x^0 + y$ podle důsledku 4 je $Sv = y$, tedy $y \in L_S$.

8. Označení. Symbolem $\mathscr{A}_1$ označíme systém všech operátorů $A \in \mathscr{A}_0$, pro něž platí, že při všech $x \in L$ a všech $\lambda \geqq 0$ je $A\lambda x = \lambda Ax$.

9. Věta. *Jestliže $A \in \mathscr{A}_1$, pak $S = I - A \in \mathscr{A}_1$.*

Důkaz. Buď $A \in \mathscr{A}_1$, $S = I - A$. Podle důsledku 4 při $x \in L$, $x = Ax + Sx$ a při všech $z \in L_A$ je $\operatorname{Re}(z - Ax, Sx) \leqq 0$, tedy při všech $\lambda \geqq 0$ platí $0 \geqq \operatorname{Re}(\lambda Ax - Ax, Sx) = (\lambda - 1) \operatorname{Re}(Ax, Sx)$, takže $\operatorname{Re}(Ax, Sx) = 0$. Tudíž pro všechna $z \in L_A$ a všechna $y \in L_s$ máme

$$\operatorname{Re}(z, y) \leqq 0\,. \tag{6}$$

a) Buď $x \in L$, $x = Ax + Sx$, tedy $x - Ax = 0 + Sx$ a při všech $z \in L_A$ platí $\operatorname{Re}(z - 0, Sx) \leqq 0$. Podle důsledku 4 tudíž $A(x - Ax) = 0$ čili $AS = 0$. Nyní $S^2x = Sx - ASx = Sx$ při všech $x \in L$.

b) Pro $x_1, x_2 \in L$ je $x_1 = Ax_1 + Sx_1$, $x_2 = Ax_2 + Sx_2$ a podle nerovnosti (1) platí $(Ax_1 - Ax_2, Ax_1 - Ax_2) \leqq \operatorname{Re}(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2)$ čili $0 \leqq \operatorname{Re}(Sx_1 - Sx_2, Ax_1 - Ax_2)$ čili $\|Sx_1 - Sx_2\|^2 \leqq \operatorname{Re}(x_1 - x_2, Sx_1 - Sx_2)$.

c) Buď $x \in L$, $\lambda \geqq 0$. Pak $S\lambda x = \lambda x - A\lambda x = \lambda(x - Ax) = \lambda Sx$.

10. Důsledek. *Je-li* $A \in \mathscr{A}_1$, $S = I - A$, *pak* L_A *i* L_S *je uzavřený konvexní kužel.* Toto tvrzení ihned plyne z vět 9, 6 a 2.

11. Označení. Buď $\mathfrak{A} = \{L_A : A \in \mathscr{A}_1\}$. Dále při $L_A \in \mathfrak{A}$ klaďme $L_A^\perp = L_S$, kde $S = I - A$.

12. Věta. *Trojice* $(\mathfrak{A}, \subset, \perp)$ *je uspořádaná množina s ortogonalitou.*

Důkaz. a) Buď $L_A \in \mathfrak{A}$, $L_A^\perp = L_S$. Pak $L_S^\perp = L_A$ v důsledku platnosti věty 9.

b) Nechť $L_{A_1}, L_{A_2} \in \mathfrak{A}$, $L_{A_1} \subset L_{A_2}$. Buď $L_{A_1}^\perp = L_{S_1}$, $L_{A_2}^\perp = L_{S_2}$. Je-li $y \in L_{S_2}$, podle nerovnosti (6) pro všechna $z \in L_{A_2}$ platí $\mathrm{Re}\,(z - 0, y) \leqq 0$, což tedy platí též pro všechna $z \in L_{A_1}$. Jelikož navíc $y = 0 + y$ a $0 \in L_{A_1}$, podle důsledku 4 je $y \in L_{S_1}$. Tedy $L_{S_2} \subset L_{S_1}$.

c) Pro všechna $L_A \in \mathfrak{A}$ platí $L_A \subset L = L_I$, $L_A^\perp \subset L = L_I$. Nechť $L_A \subset L_B$, $L_A^\perp \subset L_B$, kde $L_B \in \mathfrak{A}$. Je-li $x \in L = L_I$, je $x = Ax + Sx$, kde $S = I - A$. Přitom $Ax \in L_A \subset L_B$ $Sx \in L_A^\perp \subset L_B$, tedy $x = Ax + Sx \in L_B$. Existuje proto $\sup\,(L_A, L_A^\perp)$ a platí $\sup\,(L_A, L_A^\perp) = L = L_I$.

Adresa autora: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2 (katedra matematiky FEL ČVUT).

Summary

GENERALIZATION OF THE NOTION OF THE PROJECTOR

JAN HAVRDA, Praha

In the paper, the notion of a projector on a linear space L with the scalar product $(.,.)$ (and the induced norm $\|.\|$) is generalized. The set which is projected upon is a nonvoid closed convex set.

If $A : L \to L$ is such an idempotent operator that for all $x_1, x_2 \in L$ the inequality (1) holds, then $L_A = \{Ax : x \in L\}$ is a nonvoid convex closed set and for all $x_0 \in L$ and $z \in L_A$ the inequality (2) holds. Ax_0 is the only point in L_A to satisfy the inequality (2) for every $z \in L_A$. Furthermore, every $x \in L$ can be expressed uniquely by (4) so that for all $z \in L_A$ the inequality (5) holds. If $S = I - A$, where I is the identity operator, then $L_S = \{Sx : x \in L\}$ is a convex cone. If L_A is a compact set then $L_S = L$.

Let $\mathscr{A}_1$ stand for the family of all idempotent operators $A : L \to L$ such that for all $x_1, x_2 \in L$ the inequality (1) holds and for all $x \in L$ and $\lambda \geqq 0$ the formula $A\lambda x = \lambda Ax$ is satisfied. Then the implication $A \in \mathscr{A}_1 \Rightarrow S \in \mathscr{A}_1$ holds. In this case, L_A and L_S are closed convex cones. Let $\mathfrak{A}$ be the set $\{L_A : A \in \mathscr{A}_1\}$ and let us denote $L_A^\perp = L_S$. Then $(\mathfrak{A}, \subset, \perp)$ is a poset with orthogonality.