Časopis pro pěstování matematiky

František Machala

Fastgeordnete und geordnete affine Klingenbergsche Ebenen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 106 (1981), No. 2, 138--155

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118084

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 106 (1981), Praha

FASTGEORDNETE UND GEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSCHE EBENEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 28. März 1979)

Wie bekannt, eine affine Ebene heißt geordnet, wenn auf allen ihren Geraden Zwischenrelationen gegeben sind, die durch alle Parallelprojektionen reproduziert werden (Siehe z. B. [5]). Ähnlich lassen sich geordnete affine Klingenbergsche Ebenen (weiter kurz AK-Ebene) definieren. In [3] und [4] sind jedoch die Parallelprojektionen in den AK-Ebenen auf eine andere Weise definiert worden und zwar so, daß die Definition aus [3] etwas allgemeiner ausfällt. Deswegen nennen wir die Parallelprojektionen im Sinne von [3] verallgemeinerte Parallelprojektionen, kurz V-Parallelprojektionen. Falls die Zwischenrelationen auf den Geraden der AK-Ebene durch Parallelprojektionen nach [4] bzw. durch V-Parallelprojektionen reproduziert werden, sprechen wir von fastgeordneter bzw. geordneter AK-Ebene. In einer weiteren Arbeit (Fastgeordnete und geordnete lokale Ringe und ihre geometrische Anwendung) zeigt der Autor, daß die Klasse geordneter AK-Ebenen eine eigene Unterklasse der fastgeordneten AK-Ebenen bildet, daß es also fastgeordnete AK-Ebenen gibt, die nicht geordnet sind.

In der nachstehenden Arbeit werden fastgeordnete AK-Ebenen und Beziehungen zwischen den fastgeordneten und geordneten AK-Ebenen untersucht. Jeder geraden einer fastgeordneten AK-Ebene werden zwei Halbebenen zugeordnet. In der AK--Ebene mit den Zwischenrelationen werden dann einige notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz der Halbebenen festgesetzt (Satz 5). Durch die Definition 8 werden konvexe fastgeordnete AK-Ebenen eingeführt und für die Konvexität sind verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen bewiesen (Satz 6). Im Satz 10 werden einige notwendige und hinreichende Bedingungen gegeben, damit die fastgeordnete AK-Ebene geordnet wird. Zum Schluß wird ein Satz über die zentralen Projektionen in geordneten AK-Ebenen angeführt.

Definition 1. Es seien $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge und $\leqq$ eine binäre Relation auf $\mathcal{M}$. Das Paar $(\mathcal{M}, \leqq)$ heißt *geordnete Menge* und $\leqq$ die *Anordnung* von $\mathcal{M}$, wenn folgende Bedingungen für alle $A, B, C \in \mathcal{M}$ erfüllt sind:

(A1) $A \leqq A$,

(A2) $A \leqq B \wedge B \leqq A \Rightarrow A = B$,

(A3) $A \leqq B \wedge B \leqq C \Rightarrow A \leqq C$,

(A4) $A \leqq B \vee B \leqq A$.

Bemerkung 1. Ist $A \leqq B$ und zugleich $A \neq B$, so schreiben wir, wie üblich, $A < B$. Eine Abbildung σ einer geordneten Menge $(\mathscr{M}, \leqq)$ auf eine geordnete Menge $(\mathscr{N}, \leqq)$ heißt *monoton wachsend* bzw. *monoton fallend*, wenn $A \leqq B \Rightarrow A^\sigma \leqq B^\sigma$ bzw. $A \leqq B \Rightarrow B^\sigma \leqq A^\sigma$ gilt. Ist σ entweder monoton wachsend oder monoton fallend, dann heißt sie *monoton*.

Definition 2. Eine ternäre Relation $(***)$ auf der Menge $\mathscr{M}$ heißt *Zwischenrelation*, wenn folgende Bedingungen für alle $A, B, C, X \in \mathscr{M}$ erfüllt sind:

(Z1) $(ABC) \Rightarrow (CBA)$,

(Z2) $(ABC) \vee (ACB) \vee (CAB)$,

(Z3) $(ABC) \wedge (ACB) \Rightarrow B = C$,

(Z4) $(ABC) \Rightarrow (ABX) \vee (XBC)$.

Gilt (ABC), dann liegt B *zwischen* A und C.

Aus den Axiomen (Z1) bis (Z4) folgen nachstehende Beziehungen (Z5) bis (Z7) ([3], S. 24):

(Z5) $(ABC) \wedge (ACD) \Rightarrow (ABD) \wedge (BCD)$,

(Z6) $(ABC) \wedge (BCD) \Rightarrow (ACD) \vee B = C$,

(Z7) $(AAB) \wedge (ABA) \Rightarrow A = B$.

Satz 1. *Sei $(***)$ eine Zwischenrelation auf der Menge $\mathscr{M}$. Sind $0, 1$ zwei verschiedene Elemente von $\mathscr{M}$, dann gibt es eine Anordnung $\leqq_{01}$ von $\mathscr{M}$ mit $0 \leqq_{01} 1$ und $(ABC) \Leftrightarrow A \leqq_{01} B \leqq_{01} C \vee C \leqq_{01} B \leqq_{01} A$. Ist $(\mathscr{M}, \leqq)$ eine geordnete Menge, dann $(ABC) :\Leftrightarrow A \leqq B \leqq C \vee C \leqq B \leqq A$ ist eine Zwischenrelation auf $\mathscr{M}$. Erklären wir durch diese Zwischenrelation eine Anordnung $\leqq_{01}$ von $\mathscr{M}$ für zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in \mathscr{M}$, dann gilt*

$$A \leqq_{01} B \Leftrightarrow \begin{array}{ll} A \leqq B, & \textit{falls} \quad 0 < 1 \\ B \leqq A, & \textit{falls} \quad 1 < 0. \end{array}$$

Zum Beweis siehe [3], § 2.2.

Definition 3. Es sei $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine Inzidenzstruktur im Sinne von Dembowski [1] und sei auf $\mathscr{L}$ eine solche Äquivalenzrelation $\parallel$ (Parallelität) erklärt, daß zu beliebigen $P \in \mathscr{P}, p \in \mathscr{L}$ genau eine Gerade q mit $p \parallel q$ und $P \mathrm{I} q$ existiert. $\mathscr{A}$ heißt eine *affine Kligenbergsche Ebene* (kurz AK-Ebene), wenn es eine affine Ebene $\mathscr{A}' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}', \mathrm{I})$ und einen Epimorphismus $\varkappa$ von $\mathscr{A}$ auf $\mathscr{A}'$ [1] gibt und folgende Forderungen erfüllt sind:

(K1) $P, Q \in \mathscr{P},\ P\varkappa \neq Q\varkappa \Rightarrow \exists!\, p \in \mathscr{L};\ P, Q \mathrm{I} p,$

(K2) $p, q \in \mathscr{L},\ p\varkappa \nparallel q\varkappa \Rightarrow \exists!\, P \in \mathscr{P};\ P \mathrm{I} p, q.$

Bemerkung 2. Als Folgerung der Definition 3 ergibt sich $a \parallel b \Rightarrow a\varkappa \parallel b\varkappa$. Zur Vereinfachung schreiben wir weiter $\bar{P}$ bzw. $\bar{p}$ anstatt $P\varkappa$ bzw. $p\varkappa$ für $P \in \mathscr{P}$ bzw. $p \in \mathscr{L}$. Die Punkte P, Q heißen *benachbart*, wenn $\bar{P} = \bar{Q}$, anderenfalls sind P, Q *fern*. Genauso sind die Geraden a, b mit $\bar{a} = \bar{b}$ bzw. $\bar{a} \neq \bar{b}$ benachbart bzw. fern. Die einzige nach (K1) durch die Punkte P, Q bestimmte Gerade p wird mit $p = PQ$ bezeichnet. Mit $P = p \sqcap q$ bezeichnet man den nach (K2) durch die Geraden p, q bestimmten Punkt P.

Bemerkung 3. Im folgenden bedeutet $L(A, a)$ eine Parallele zur Geraden a durch den Punkt A. Die Menge $\Pi(a)$ aller zu a parallelen Geraden heißt eine *Richtung*. Mit $P(a)$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Geraden a, d.h. $P(a) = \{X / X \mathrm{I} a\}$. Mit $F(P, p)$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Geraden p, die zum Punkt $P \mathrm{I} p$ benachbart sind, d.h. $F(P, p) = \{X / X \mathrm{I} p, \bar{X} = \bar{P}\}$ für $P \mathrm{I} p$.

Definition 4. Es seien g, g' zwei Geraden der AK-Ebene $\mathscr{A}$ und $\Pi(h)$ eine Richtung mit $\bar{g} \nparallel \bar{h},\ \bar{g}' \nparallel \bar{h}$. Eine Abbildung $\varphi : P(g) \to P(g')$ mit $\varphi(A) = g' \sqcap L(A, h)$ für $A \in P(g)$ heißt eine *Parallelprojektion* von g auf g' mit der Richtung $\Pi(h)$. Solche Parallelprojektion wird mit $\varphi(g, g', \Pi(h))$ bezeichnet.

Bemerkung 4. Jede Parallelprojektion $\varphi(g, g', \Pi(h))$ ist eine bijektive Abbildung von $P(g)$ auf $P(g')$.

Definition 5. Eine AK-Ebene $\mathscr{A}$ heißt *fastgeordnet*, wenn es auf jeder Geraden von $\mathscr{A}$ mindestens drei voneinander ferne Punkte gibt und für jede Gerade g eine Zwischenrelation auf $P(g)$ erklärt ist, welche bei Übergang zu einer anderen Geraden mittels einer Parallelprojektion stets erhalten bleibt.

Bemerkung 5. Unter der Bezeichnung $(ABC)_g$ versteht man, daß die Punkte A, B, C in der Geraden g enthalten sind und der Punkt B zwischen A und C in der auf $P(g)$ erklärten Zwischenrelation liegt.

Definition 6. Es sei $\Pi(h)$ eine Richtung in der fastgeordneten AK-Ebene $\mathscr{A}$ und g eine Gerade mit $\bar{g} \nparallel \bar{h}$. Für beliebige $h_1, h_2, h_3 \in \Pi(h)$ setzen wir $(h_1 h_2 h_3)_{\Pi(h)} :\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (A_1 A_2 A_3)_g$, wo $A_i = h_i \sqcap g$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ sind.

Bemerkung 6. Mit Definition 6 wird in jeder Richtung $\Pi(h)$ eine Zwischenrelation $(***)_{\Pi(h)}$ eingeführt, die von der Wahl der Geraden g mit $\bar{g} \nparallel \bar{h}$ unabhängig ist. Ist g eine Gerade, dann läßt sich nach Satz 1 auf $P(g)$ ein Paar voneinander inversen Anordnungen durch $(***)_g$ erklären. Ähnlich lassen sich auch in jeder Richtung $\Pi(h)$ zwei Anordnungen durch $(***)_{\Pi(h)}$ einführen.

Bemerkung 7. Sind die Punkte A, B, C in den Geraden g und g' enthalten, dann $(ABC)_g \Leftrightarrow (ABC)_{g'}$ ([4], Satz 3). Wird es im folgenden deutlich, daß die Punkte A, B, C in der Geraden g enthalten sind, dann schreibt man kurz (ABC) statt $(ABC)_g$.

Satz 2. *Sind X, Y zwei Punkte einer Geraden g der fastgeordneten AK-Ebene $\mathscr{A}$, dann existieren unendlich viele Punkte Q bzw. R mit (QXY) bzw. (XYR), die zu X, Y und auch voneinander fern sind.*

Beweis. 1. Es seien X, Y Punkte einer Geraden g. Zunächst beweisen wir, daß ein Punkt Q bzw. R mit (QXY) bzw. (XYR) existiert, der zu X und Y fern ist.

a) Es seien X, Y fern. Wir wählen eine Gerade h mit $h \parallel g$ und $\bar{h} \neq \bar{g}$. Unserer Annahme nach gibt es auf h drei voneinander ferne Punkte A, B, C (Abb. 1). Nach (Z2) ist $(ABC) \vee (ACB) \vee (BAC)$. Es sei z.B. (ABC). Setzen wir $a = L(A, BX)$, dann wegen $\bar{B} \neq \bar{C}$ und $\overline{BX} \neq \overline{CX}$ gilt $\bar{a} \nparallel \overline{CX}$ und daher gibt es einen Punkt

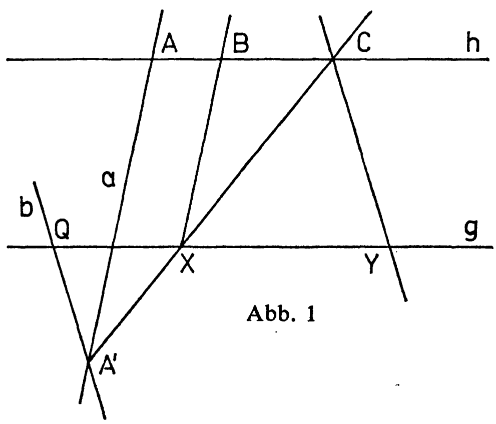

Abb. 1

$A' = a \sqcap CX$. Wir setzen weiter $b = L(A', CY)$ und $Q = b \sqcap g$. Dann ist $\varphi_1(h, CX, \Pi(BX))$ eine Parallelprojektion mit $\varphi_1(A) = A'$, $\varphi_1(B) = X$, $\varphi_1(C) = C$, woraus sich $(ABC) \Rightarrow (A'XC)$ ergibt. Genauso $\varphi_2(CX, g, \Pi(CY))$ ist eine Parallelprojektion mit $\varphi_2(A') = Q$, $\varphi_2(X) = X$, $\varphi_2(C) = Y$, was $(A'XC) \Rightarrow (QXY)$ impliziert.

Aus $\bar{Q} = \bar{X}$ bzw. $\bar{Q} = \bar{Y}$ folgt unserer Konstruktion nach $\bar{X} = \bar{Y}$, also ein Widerspruch. Somit ist Q fern zu X und Y. Analog läßt sich ein Punkt R mit (XYR) konstruieren, der fern zu X, Y ist.

b) Seien X, Y benachbart. Wir beweisen die Existenz eines Punktes Q mit (QXY), der fern zu X und Y ist. Es gibt einen Punkt M von g, der fern zu X und folglich auch zu Y ist. Nach (Z2) ist $(MXY) \vee (XMY) \vee (XYM)$. Gilt (MXY), so genügt M unseren Forderungen. Es sei (XMY). Wegen $\bar{X} \neq \bar{M}$ gibt es nach a) einen Punkt Q mit (QXM) und $\bar{Q} \neq \bar{X}$, $\bar{Q} \neq \bar{M}$. Aus (Z6) folgt $(QXM) \wedge (XMY) \Rightarrow (QMY) \vee X = M$ und wegen $\bar{X} \neq \bar{M}$ ergibt sich also (QMY). Nach (Z5) gilt dann $(QXM) \wedge (QMY) \Rightarrow (QXY)$ und Q hat die verlangten Eigenschaften. Schließlich sei (XYM). Nach a) gibt es wieder einen Punkt Q mit (QXM) und $\bar{Q} \neq \bar{X}$, $\bar{Q} \neq \bar{M}$. Gemäß (Z5) ist $(MYX) \wedge (MXQ) \Rightarrow (YXQ)$, also (QXY). Analog erklären wir einen Punkt R von g mit (XYR) und $\bar{R} \neq \bar{X}$, $\bar{R} \neq \bar{Y}$.

2. Es sei Q ein Punkt von g mit (QXY) und $\bar{Q} \neq \bar{X}$, $\bar{Q} \neq \bar{Y}$. Nach 1 gibt es einen Punkt Q_1 mit (Q_1QX) und $\bar{Q}_1 \neq \bar{Q}$, $\bar{Q}_1 \neq \bar{X}$. Nach (Z2) ist $(XQ_1Y) \vee (XYQ_1) \vee (Q_1XY)$. Gilt (XQ_1Y), dann folgt aus (Z5): $(XQQ_1) \wedge (XQ_1Y) \Rightarrow (XQY)$ und (Z3) impliziert $(XQY) \wedge (QXY) \Rightarrow Q = X$, also einen Widerspruch zu $\bar{Q} \neq \bar{X}$. Es sei (XYQ_1). Nach (Z6) erhält man $(QXY) \wedge (XYQ_1) \Rightarrow (QYQ_1) \vee X = Y$. Ist $X \neq Y$, dann ergibt sich nach (Z5): $(Q_1YQ) \wedge (Q_1QX) \Rightarrow (YQX)$ und nach (Z3): $(YQX) \wedge (YXQ) \Rightarrow Q = X$, also wieder in Widerspruch. Für $X \neq Y$ gilt also (Q_1XY) und für $X = Y$ ergibt sich nach (Z7) auch (Q_1XY). Nach Fall 1 gibt es weiter einen Punkt Q_2 mit (Q_2Q_1X) und $\bar{Q}_2 \neq \bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2 \neq \bar{X}$, woraus nach obigem (Q_2XY) folgt. Diesem Verfahren nach erhalten wir unendlich viele voneinander ferne Punkte Q mit (QXY). Analog läßt sich die Existenz unendlich vieler voneineander ferner Punkte R mit (XYR) nachweisen.

Definition 7. Es sei g eine Gerade der fastgeordneten AK-Ebene $\mathscr{A}$. Nach Definition 6 und Bemerkung 6 führen wir in $\Pi(g)$ eine Anordnung $\leqq$ ein. Die Teilmengen $H_g^+ = \{A \mid g < L(A, g)\}$, $H_g^- = \{A \mid L(A, g) < g\}$ von $\mathscr{P}$ heißen durch die Gerade g erklärte *Halbebenen.*

Bemerkung 8. Die Zwischenrelation $(***)_{\Pi(g)}$ hervorruft zwei inverse Anordnungen $\leqq$ und $\leqq'$ auf $\Pi(g)$. Sind H_g^+, H_g^- bzw. $\mathscr{H}_g^+, \mathscr{H}_g^-$ die zu $\leqq$ bzw. $\leqq'$ gehörigen Halbebenen, dann $H_g^+ = \mathscr{H}_g^-$ und $H_g^- = \mathscr{H}_g^+$. Es wird ferner angenommen, daß in $\Pi(g)$ eine feste Anordnung $\leqq$ gewählt ist.

Satz 3. *Sind H_g^+, H_g^- die durch eine Gerade g erklärten Halbebenen, dann gilt:*

(H1) $h \parallel g \Rightarrow h = g \vee P(h) \subset H_g^+ \vee P(h) \subset H_g^-$.

(H2) *Ist h eine Gerade mit $\bar{h} \neq \bar{g}$ und sind X, Y, Z Punkte mit $X, Y, Z \mathrel{\mathrm{I}} h$, $Y \mathrel{\mathrm{I}} g$, dann $(XYZ) \wedge X \in H_g^\pm \Rightarrow Z \in H_g^\mp \cup P(g)$.*

(H3) *Ist* h *eine Gerade mit* $\bar{h} \neq \bar{g}$ *und* X, Y, Z *Punkte mit* $X, Y, Z \mathrm{I} h$, $Y \mathrm{I} g$, *dann* $X \in H_g^+ \wedge Z \in H_g^- \Rightarrow (XYZ)$.

(H4) $\exists X$ non I g, $X \in (H_g^+ \cup H_g^-) \setminus (H_g^+ \cap H_g^-)$.

(H5) $H_g^+ \cap H_g^- = \emptyset$.

(H6) $H_g^+ \cup H_g^- = \mathscr{P} \setminus P(g)$.

Beweis. Ad (H1) Es sei h eine Gerade mit $h \parallel g$ und $h \neq g$. Dann gilt entweder $g < h$ oder $h < g$. Nach Definition 7 erhält man daraus $P(h) \subset H_g^+ \vee P(h) \subset H_g^-$.

Ad (H2) Es gelten die Voraussetzungen von (H2) mit $X \in H_g^+$. Wir setzen $a = L(X, g)$ und $b = L(Z, g)$. Wegen $\bar{h} \nparallel \bar{g}$ und (XYZ) gilt nach Definition 6 $a \leqq g \leqq b \vee b \leqq g \leqq a$. Wegen $X \in H_g^+$ ist $g < a$, also $b \leqq g < a$. Gilt $b = g$, dann $Z \mathrm{I} g$. Anderenfalls ist $P(b) \subset H_g^-$ und $Z \in H_g^-$. Analog verfahren wir im Falle $X \in H_g^-$.

Ad (H3) Wir setzen $a = L(X, g)$, $b = L(Z, g)$. Wegen $X \in H_g^+$ und $Z \in H_g^-$ gilt $b < g < a$ und wegen $\bar{h} \nparallel \bar{g}$ erhält man daraus nach Definition 6 (XYZ).
Die Richtigkeit der Behauptungen (H4) bis (H6) folgt unmittelbar aus Definition 7.

Satz 4. *Es sei auf jeder Geraden der AK-Ebene* $\mathscr{A}$ *eine Zwischenrelation erklärt. Ist* g *eine Gerade von* $\mathscr{A}$ *und sind* H_g^+, H_g^- *Mengen, welche (H2) und (H4) erfüllen, dann erfüllen sie auch (H3), (H5) und (H6).*

Beweis. Wir nehmen an, daß (H2) und (H4) für H_g^+ und H_g^- gelten.

1. Zunächst wollen wit $H_g^+ \cap P(g) = \emptyset$ beweisen. Es sei $A \in H_g^+ \cap P(g)$. Nach (H4) gibt es einen Punkt X non I g mit $X \in H_g^+ \cup H_g^-$ und $X \notin H_g^+ \cap H_g^-$.

a) Es sei $\bar{X}$ non I $\bar{g}$. Aus $A \mathrm{I} g$ folgt $\bar{X} \neq \bar{A}$ und daher gibt es eine Gerade $h = AX$. Wegen $\bar{X}$ non I $\bar{g}$ ist $\bar{h} \neq \bar{g}$ und folglich $\bar{h} \nparallel \bar{g}$. Nach (Z7) gilt (AAX) und aus (H2) folgt $(AAX) \wedge A \in H_g^+ \Rightarrow X \in H_g^- \cup P(g)$. Wegen X non I g ist also $X \in H_g^-$ und gemäß $X \notin H_g^+ \cap H_g^-$ gilt $X \notin H_g^+$. Nach Satz 2 gibt es einen Punkt $Q \mathrm{I} h$ mit (QAX) und $\bar{Q} \neq \bar{A}$, $\bar{Q} \neq \bar{X}$. Aus $\bar{h} \neq \bar{g}$ folgt daraus Q non I g und nach (H2) ergibt sich $(AAQ) \wedge A \in H_g^+ \Rightarrow Q \in H_g^-$. Gleichzeitig aber gilt $(QAX) \wedge Q \in H_g^- \Rightarrow X \in H_g^+$, was ein Widerspruch ist. Somit gibt es keinen Punkt A mit $A \in H_g^+ \cap P(g)$.

b) Es sei $\bar{X} \mathrm{I} \bar{g}$. Durch X führen wir eine Gerade h mit $\bar{h} \nparallel \bar{g}$ und setzen $Y = h \sqcap g$. Es gibt einen Punkt Q mit (QYX) und $\bar{Q} \neq \bar{Y}$, $\bar{Q} \neq \bar{X}$. Unserer Annahme nach ist $X \in H_g^+ \cup H_g^-$, also $X \in H_g^+ \vee X \in H_g^-$. Sei $X \in H_g^+$. Nach (H2) erhält man $(XYQ) \wedge X \in H_g^+ \Rightarrow Q \in H_g^-$. Gilt zugleich $Q \in H_g^+$, dann $(QYX) \wedge Q \in H_g^+ \Rightarrow X \in H_g^-$, was $X \notin H_g^+ \cap H_g^-$ widerspricht. Somit erhalten wir $\bar{Q}$ non I $\bar{g}$, $Q \in H_g^+ \cup H_g^-$ und $Q \notin H_g^+ \cap H_g^-$. Mit Anwendung von Q statt X verfahren wir weiter analog zu a).

Ähnlich wie in a), b) läßt sich auch $H_g^- \cap P(g) = \emptyset$ beweisen.

2. Wir wollen die Gültigkeit von (H6) beweisen. Nach Teil 1 genügt es X non I $g \Rightarrow$ $\Rightarrow X \in H_g^+ \cup H_g^-$ zu zeigen. Gemäß (H4) gibt es einen Punkt A mit A non I g und $A \in H_g^+ \cup H_g^-$. Sei z.B. $A \in H_g^+$. Durch A führen wir eine Gerade h mit $\bar{h} \nparallel \bar{g}$ und setzen $B = h \sqcap g$. Nach Satz 2 gibt es einen Punkt C I h mit (ABC) und $\bar{C} \neq \bar{A}$, $\bar{C} \neq \bar{B}$. Wegen C non I g folgt dann aus (H2): $(ABC) \wedge A \in H_g^+ \Rightarrow C \in H_g^-$.

a) Ist X non I g und $\bar{X}$ non I $\bar{h}$, so gilt $\bar{X} \neq \bar{A}$, $\bar{X} \neq \bar{C}$ und mithin gibt es die Geraden $a = AX$, $c = CX$. Wegen $\bar{A} \neq \bar{C}$ gilt $\bar{a} \nparallel \bar{c}$ und folglich $\bar{a} \nparallel \bar{g} \vee \bar{c} \nparallel \bar{g}$.

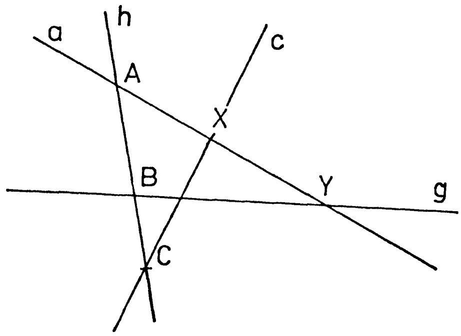

Abb. 2

α) Es sei $\bar{a} \nparallel \bar{g}$ (Abb. 2). Setzen wir $Y = a \sqcap g$, so $(AYX) \vee (XAY) \vee (AXY)$. Gilt (AYX), dann nach (H2) erhält man $(AYX) \wedge A \in H_g^+ \Rightarrow X \in H_g^-$. Ferner sei (XAY). Es gibt einen Punkt Z I a mit (AYZ) und $\bar{Z} \neq \bar{A}$, $\bar{Z} \neq \bar{Y}$, also mit Z non I g. Nach (Z6) ergibt sich $(XAY) \wedge (AYZ) \Rightarrow (XYZ) \vee A = Y$ und wegen A non I g ist (XYZ). Unter Anwendung von (H2) erhält man schrittweise $(AYZ) \wedge A \in H_g^+ \Rightarrow$ $\Rightarrow Z \in H_g^-$ und $(ZYX) \wedge Z \in H_g^- \Rightarrow X \in H_g^+$. Schließlich sei (AXY). Nach Satz 2 gibt es einen Punkt Z I a mit (XYZ) und $\bar{Z} \neq \bar{X}$, $\bar{Z} \neq \bar{Y}$. Wegen X non I g und $\bar{a} \nparallel \bar{g}$ ist $X \neq Y$ und aus (Z6) folgt daher $(AXY) \wedge (XYZ) \Rightarrow (AYZ)$. Gemäß (H2) ergibt sich dann $(AYZ) \wedge A \in H_g^+ \Rightarrow Z \in H_g^-$ und $(ZYX) \wedge Z \in H_g^- \Rightarrow X \in H_g^+$. In den allen untersuchten Fällen gilt also $X \in H_g^+ \cup H_g^-$.

β) Es sei $\bar{a} \parallel \bar{g}$ und folglich $\bar{c} \nparallel \bar{g}$. Unter Anwendung von C beweisen wir analog zu α), daß $X \in H_g^+ \cup H_g^-$ gilt.

b) Es sei X non I g und $\bar{X}$ I $\bar{h}$. Wählen wir einen geeigneten Punkt A' mit A' non I g und $\bar{A}'$ non I $\bar{h}$, so gilt nach a) $A' \in H_g^+ \cup H_g^-$. Ferner läßt sich analog wie unter a) mit A' verfahren.

3. Wir beweisen die Gültigkeit von (H5). Nehmen wir zunächst an, daß ein Punkt $A \in H_g^+ \cap H_g^-$ existiert. Nach Teil 1 ist dann A non I g. Es sei X ein Punkt mit $X \in (H_g^+ \cup H_g^-) \setminus (H_g^+ \cap H_g^-)$, also mit $X \in H_g^+$, $X \notin H_g^- \vee X \notin H_g^+$, $X \in H_g^-$. Es sei z.B. $X \in H_g^+$ und $X \notin H_g^-$.

a) Wir nehmen $\bar{A} \neq \bar{X}$ an und setzen $h = AX$.

α) Sei $\bar{h} \nparallel \bar{g}$. Ist $Y = h \sqcap g$, so $(AYX) \vee (AXY) \vee (XAY)$. Es sei (AYX). Wegen X non I g ergibt sich nach (H2) $(AYX) \wedge A \in H_g^+ \Rightarrow X \in H_g^-$, also ein Widerspruch. Ferner sei (AXY). Es gibt einen Punkt Q I h mit (AYQ) und $\bar{Q} \neq \bar{A}$, $\bar{Q} \neq \bar{Y}$, also mit Q non I g. Aus (H2) folgt $(AYQ) \wedge A \in H_g^- \Rightarrow Q \in H_g^+$ und aus (Z5) dann $(AXY) \wedge (AYQ) \Rightarrow (XYQ)$. Dies gibt aber einen Widerspruch zu (H2), denn $(QYX) \wedge \wedge\ Q \in H_g^+ \Rightarrow X \in H_g^-$. Schließlich sei (XAY). Für den im vorangehenden Falle erklärten Punkt Q gilt nach (Z6) $(XAY) \wedge (AYQ) \Rightarrow (XYQ) \vee A = Y$, also (XYQ), denn $A \neq Y$. Unter Anwendung von (H2) erhält man wieder $X \in H_g^-$.

β) Es sei $\bar{h} \parallel \bar{g}$. Wir wählen eine Gerade p durch A mit $\bar{p} \nparallel \bar{g}$ und setzen $Y = p \sqcap g$. Ferner wählen wir auf p einen Punkt Q mit (AYQ) und $\bar{Q} \neq \bar{A}$, $\bar{Q} \neq \bar{Y}$. Offenbar ist $\bar{Q} \neq \bar{X}$, $\overline{XQ} \nparallel \bar{g}$ und wegen $A \in H_g^+ \cap H_g^-$ erhält man nach (H2) $Q \in H_g^+ \cap H_g^-$. Weiter gehen wir analog zu α) vor, nur benutzen wir den Punkt Q statt A.

b) Es sei $\bar{A} = \bar{X}$. Durch A führen wir eine Gerade p mit $\bar{p} \nparallel \bar{g}$ und auf p bestimmen wir nach a), β) einen Punkt Q mit $Q \in H_g^+ \cap H_g^-$, $\bar{Q} \neq \bar{X}$ und ferner verfahren wir unter Anwendung von Q analog zum Fall a).

4. Wir beweisen, daß (H3) gilt. Es sei h eine Gerade mit $\bar{h} \nparallel \bar{g}$ und seien X, Y, Z Punkte mit X, Y, Z I h, Y I g und $X \in H_g^+$, $Z \in H_g^-$. Gemäß (Z2) ist $(XZY) \vee \vee\ (YXZ) \vee (XYZ)$. Es sei (XZY). Nach Satz 2 gibt es einen Punkt R I h mit (ZYR) und $\bar{R} \neq \bar{Z}$, $\bar{R} \neq \bar{Y}$. Wegen R non I g erhält man nach (H2) $(ZYR) \wedge Z \in H_g^- \Rightarrow \Rightarrow R \in H_g^+$. Aus (Z6) folgt $(XZY) \wedge (ZYR) \Rightarrow (XYR) \vee Z = Y$. Wegen Z non I g ist $Z \neq Y$ und deswegen (XYR). Nach (H2) ergibt sich dann $(XYR) \wedge X \in H_g^+ \Rightarrow \Rightarrow R \in H_g^-$, was $H_g^+ \cap H_g^- = \emptyset$ widerspricht. Es sei (YXZ). Es gibt einen Punkt Q mit (QYX) und $\bar{Q} \neq \bar{X}$, $\bar{Q} \neq \bar{Y}$. Gemäß $X \in H_g^+$ und Q non I g folgt aus (H2) $Q \in \in H_g^-$. Nach (Z6) ist $(ZXY) \wedge (XYQ) \Rightarrow (ZYQ) \vee X = Y$ und wegen $X \in H_g^+ \Rightarrow \Rightarrow X$ non I g erhält man daraus (ZYQ). Nach (H2) gilt dann $(ZYQ) \wedge Z \in H_g^- \Rightarrow \Rightarrow Q \in H_g^+$, also $Q \in H_g^+ \cap H_g^-$, was wieder ein Widerspruch ist. Laut (Z2) soll daher (XYZ) gelten.

Satz 5. *Ist auf jeder Geraden der AK-Ebene $\mathscr{A}$ eine Zwischenrelation erklärt, dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(1) *$\mathscr{A}$ ist fastgeordnet.*

(2) *Es gibt Halbebenen H_g^+, H_g^- für jede Gerade g.*

(3) *Für jede Gerade g gibt es Mengen H_g^+, H_g^-, die (H1), (H2), und (H4) erfüllen.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) Ist $\mathscr{A}$ fastgeordnet, dann läßt sich nach Definition 6 und Bemerkung 6 eine Anordnung in jeder Richtung $\Pi(g)$ erklären und durch diese die Halbebenen H_g^+, H_g^- nach Definition 7 bestimmen.

(2) $\Rightarrow$ (3) Gibt es Halbebenen H_g^+, H_g^- für eine Gerade g, dann nach Satz 3 sind (H1), (H2) und (H4) erfüllt.

(3) $\Rightarrow$ (1) Wir nehmen an, daß für jede Gerade g solche Mengen H_g^+, H_g^- existieren, für die (H1), (H2) und (H4) erfüllt sind. Es sei $\varphi(g, g', \Pi(h))$ eine Parallelprojektion. Nach Definition 4 gilt dann $\bar{g} \nparallel \bar{h}$ und $\bar{g}' \nparallel \bar{h}$. Sind A, B, C Punkte von g und setzen wir $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$, dann $A, A' \mathrm{I}\, h_1$, $B, B' \mathrm{I}\, h_2$, $C, C' \mathrm{I}\, h_3$ mit $h_1, h_2, h_3 \in \Pi(h)$. Es sei dabei (ABC). Wir wollen $(A'B'C')$ beweisen. Gilt $A = B$, dann ist auch $A' = B'$ und nach (Z7) ergibt sich $(A'B'C')$. Ähnlich geht man in den Fällen $B = C$ und $A = C$ vor. Es seien also A, B, C voneinander verschieden. Wegen $\bar{g} \nparallel \bar{h}_2$ gilt dann A, C non $\mathrm{I}\, h_2$. Da φ eine bijektive Abbildung ist, sind auch A', B', C' voneinander verschieden und gemäß $\bar{g}' \nparallel \bar{h}_2$ ist A' non $\mathrm{I}\, h_2$ und C' non $\mathrm{I}\, h_2$. Nach Satz 4 gilt $H_{h_2}^+ \cup H_{h_2}^- = \mathscr{P} \setminus P(g)$ und wegen A non $\mathrm{I}\, h_2$ erhält man daraus $A \in H_{h_2}^+ \cup H_{h_2}^-$. Es sei z.B. $A \in H_{h_2}^+$. Nach (H2) und wegen C non $\mathrm{I}\, h_2$ ergibt sich dann $(ABC) \wedge A \in H_{h_2}^+ \Rightarrow C \in H_{h_2}^-$. Wegen $A \,\mathrm{I}\, h_1$ und $C \,\mathrm{I}\, h_3$ folgt aus (H1) $P(h_1) \subset H_{h_2}^+$ und $P(h_3) \subset H_{h_2}^-$, also $A' \in H_{h_2}^+$ und $C' \in H_{h_2}^-$. Da nach Satz 4 auch (H3) gilt, folgt dauraus $(A'B'C')$.

Definition 8. Eine Teilmenge $F(P, p)$ einer fastgeordneten AK-Ebene heißt konvex, falls aus $X, Z \in F(P, p)$, $Y \,\mathrm{I}\, p$ und (XYZ) stets $Y \in F(P, p)$ folgt. Eine fastgeordnete AK-Ebene heißt *konvex*, falls $F(P, p)$ für jedes Paar (P, p) mit $P \,\mathrm{I}\, p$ konvex ist.

Satz 6. *Ist $\mathscr{A}$ eine fastgeordnete AK-Ebene, dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(1) *Es gibt eine konvexe Teilmenge $F(P, p)$ von $\mathscr{A}$.*

(2) *$\mathscr{A}$ ist konvex.*

(3) *Sind a, b zwei Geraden von $\mathscr{A}$, $\leqq$ eine durch die Zwischenrelation auf $P(a)$ erklärte Anordnung von $P(a)$ und h, k Geraden mit $\bar{h} \parallel \bar{k}$, $\bar{h} \nparallel \bar{a}$, $\bar{h} \nparallel \bar{b}$, dann ist das Produkt der Parallelprojektionen $\varphi_1(a, b, \Pi(h))$, $\varphi_2(b, a, \Pi(k))$ eine monoton wachsende Abbildung von $(P(a), \leqq)$ auf $(P(a), \leqq)$.*

(4) *Sind g, h Geraden mit $\bar{g} \nparallel \bar{h}$ und A, C Punkte mit $A, C \,\mathrm{I}\, h$, $A \in H_g^+$, $C \in H_g^-$, dann gibt es einen Punkt B mit $B \,\mathrm{I}\, h, g$.*

(5) *Haben die Geraden g, h mit $\bar{g} \nparallel \bar{h}$ keinen Punkt gemeinsam, dann $P(h)$ ist in einer durch g erklärten Halbebene enthalten.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) Siehe [4], Satz 10.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei $\mathscr{A}$ konvex und seien dabei die Voraussetzungen von (3) erfüllt. Ist $\leqq'$ eine durch die Zwischenrelation auf $P(b)$ erklärte Anordnung von $P(b)$, dann ist φ_1 nach Satz 4, [4] eine monotone Abbildung von $(P(a), \leqq)$ auf $(P(b), \leqq')$. Da auch $\varphi_2 : (P(b), \leqq') \to (P(a), \leqq)$ monoton ist, ist ebenso $\varphi = \varphi_2\varphi_1$ monoton. Nach Satz 1 genügt es also zu zeigen, daß $A < B \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B)$ für ein Paar $A, B \,\mathrm{I}\, a$ gilt. Es seien also A, B zwei ferne Punkte von a mit $A < B$. Wird $A' = \varphi(A)$,

$B' = \varphi(B)$ gesetzt, wegen $\bar{h} \parallel \bar{k}$ sind dann A, A' bzw. B, B' benachbart und wegen $\bar{A} \neq \bar{B}$ sind daher A', B' fern. Nach (Z2) gilt $(AA'B) \vee (A'AB) \vee (ABA')$ und zugleich $(AB'B) \vee (B'AB) \vee (ABB')$. Da $\mathscr{A}$ konvex ist, gilt $(ABA') \wedge \bar{A} = \bar{A}' \Rightarrow \bar{A} = \bar{B}$ und $(B'AB) \wedge \bar{B}' = \bar{B} \Rightarrow \bar{A} = \bar{B}$, was ein Widerspruch zu $\bar{A} \neq \bar{B}$ ist. Mithin erhalten wir $((AA'B) \vee (A'AB)) \wedge ((AB'B) \vee (ABB'))$. Es sei $(AA'B) \wedge (AB'B)$. Wegen $A < B$ folgt daraus $A \leqq A' < B \wedge A < B' \leqq B$. Aus $B' < A'$ ergibt sich $A < B' < A' < B$ und $(AB'A')$, woraus $\bar{A}' = \bar{B}'$, also ein Widerspruch folgt. Wegen $A' \neq B'$ erhält man daher $A' < B'$. Gilt $(AA'B) \wedge (ABB')$, dann ist $A \leqq A' < B \wedge A < B \leqq B'$ und $A \leqq A' < B \leqq B'$, also $A' < B'$. Aus $(A'AB) \wedge (AB'B)$ folgt $A' \leqq A < B \wedge A < B' \leqq B$ und $A' \leqq A < B' \leqq B$, also $A' < B'$. Es sei schließlich $(A'AB) \wedge (ABB')$. Dann gilt $A' \leqq A < B \wedge A < B \leqq B'$ und $A' \leqq A < B \leqq B'$, also $A' < B'$. Wegen $A < B \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B)$ ist φ monoton wachsend.

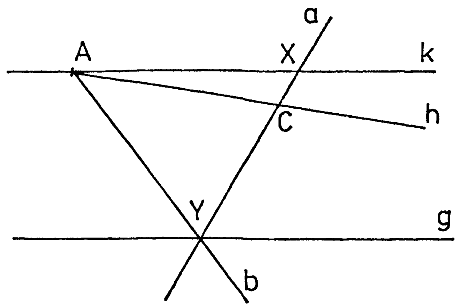

Abb. 3

(3) $\Rightarrow$ (4) Es seien g, h Geraden mit $\bar{g} \neq \bar{h}$, A, C Punkte mit $A, C \mathrel{\mathrm{I}} h$, $A \in H_g^+$, $C \in H_g^-$ und sei vorausgesetzt, daß g, h keinen Punkt gemeinsam haben. Dann gilt $\bar{g} \parallel \bar{h}$. Sind g und h parallel, dann aus (H1) und $A \in H_g^+$ folgt $P(h) \subset H_g^+$, was ein Widerspruch zu $C \mathrel{\mathrm{I}} h$ und $C \in H_g^-$ ist. Es sei also $g \nparallel h$. Setzen wir $k = L(A, g)$, dann $\bar{k} = \bar{h}$ und $P(k) \subset H_g^+$ (Abb. 3). Wegen $C \in H_g^-$ ist also C non I k. Durch C führen wir eine Gerade a mit $\bar{a} \nparallel \bar{g}$. Dann $\bar{a} \nparallel \bar{k}$ und a schneidet k, g in den Punkten X, Y. Wegen C non I k ist $C \neq X$, wegen $\bar{k} = \bar{h}$ ist $\bar{C} = \bar{X}$ und wegen $\bar{g} \neq \bar{k}$ ist $\bar{Y}$ non I $\bar{k}$, $\bar{Y} \neq \bar{A}$, $\bar{Y} \neq \bar{X}$. Nach (H3) erhält man $X \in H_g^+ \wedge C \in H_g^- \wedge \bar{a} \neq \bar{g} \Rightarrow (XYC)$. Setzen wir $b = AY$, dann ist $\bar{b} \nparallel \bar{k}$, $\bar{b} \nparallel \bar{h}$. Da $\bar{a} \nparallel \bar{k}$ und $\bar{a} \nparallel \bar{h}$ gilt, sind $\varphi_1(a, b, \Pi(h))$, $\varphi_2(b, a, \Pi(k))$ Parallelprojektionen. Ist $\leqq$ eine durch die Zwischenrelation auf $P(a)$ erklärte Anordnung von $P(a)$, dann wegen $\bar{h} \parallel \bar{k}$ ist $\varphi = \varphi_2\varphi_1$ eine monoton wachsende Abbildung von $(P(a), \leqq)$. Es sei z.B. $X \leqq Y$. Wegen $\bar{X} \neq \bar{Y}$ und (XYC) gilt dann $X < Y < C$. Zugleich ist $\varphi(C) = X$, $\varphi(Y) = Y$ und mithin $Y < C \Rightarrow \varphi(Y) < \varphi(C) \Rightarrow Y < X$, was aber ein Widerspruch ist. Somit haben g, h einen Punkt gemeinsam.

(4) $\Rightarrow$ (5) Es seien g, h Geraden mit $\bar{g} \neq \bar{h}$, die keinen Punkt gemeinsam haben. Gibt es Punkte A, C von h mit $A \in H_g^+$ und $C \in H_g^-$, dann haben g, h nach (4) einen Punkt gemeinsam, was ein Widerspruch ist.

(5) $\Rightarrow$ (1) Es sei p eine Gerade und P ein Punkt mit $P \mathrm{I} p$. Ferner seien X, Y, Z Punkte mit $X, Z \in F(P, p)$, $Y \mathrm{I} p$ und (XYZ). Gilt $X = Z$, dann ist nach (Z7) $X = Y$ und $Y \in F(P, p)$. Ferner nehmen wir an, daß X, Y, Z voneinander verschieden sind. Durch Y führen wir eine Gerade g mit $\bar{g} \neq \bar{p}$ und setzen $g' = L(X, g)$ (Abb. 4).

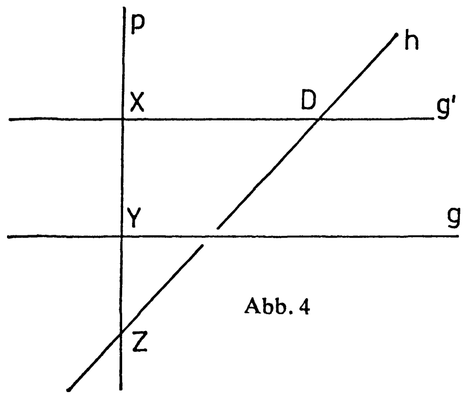

Abb. 4

Dann ist $\bar{g}' \neq \bar{p}$, $g' \neq g$ und Z non I g. Wählen wir auf g' einen Punkt D mit $\bar{D}$ non I $\bar{p}$, dann ist $\bar{D} \neq \bar{Z}$ und es gibt eine Gerade $h = DZ$. Es sei $\bar{Y} \neq \bar{X}$ und folglich $\bar{Y} \neq \bar{Z}$. Dann gilt $\bar{g} \neq \bar{g}'$ und $\bar{g} \neq \bar{h}$. Wegen $\bar{g} \parallel \bar{g}'$, $\bar{g}' = \bar{h}$ und $\bar{g} \neq \bar{h}$ haben g, h keinen Punkt gemeinsam. Da $g' \neq g$ ist, erhält man nach (H1) $P(g') \subset H_g^+ \vee \vee P(g') \subset H_g^-$. Es sei $P(g') \subset H_g^+$, also $X, D \in H_g^+$. Gemäß (H2) gilt wegen Z non I $g : X \in H_g^+ \wedge (XYZ) \Rightarrow Z \in H_g^-$. Die Gerade h enthält zwei Punkte D, Z mit $D \in H_g^+$ und $Z \in H_g^-$, was ein Widerspruch zu (5) ist. Somit ist $\bar{Y} = \bar{X}$ und $Y \in F(P, p)$.

Satz 7. *Ist eine fastgeordnete AK-Ebene $\mathscr{A}$ konvex, dann läßt sich auf jeder Geraden der zu $\mathscr{A}$ gehörigen affinen Ebene $\mathscr{A}'$ (Definition 3) eine Zwischenrelation derart erklären, daß $\mathscr{A}'$ im Sinne von [5] geordnet ist.*

Zum Beweis siehe [4], Satz 12.

Definition 9. Es sei $\mathscr{A}$ eine AK-Ebene. Eine Abbildung $\varphi(g, g', \Pi(h))$ aus der Definition 4, wo $\bar{g} \nparallel \bar{h}$ nicht notwendig erfüllt werden muß, heißt *verallgemeinerte Parallelprojektion*, kurz *V-Parallelprojektion*.

Satz 8. *Eine V-Parallelprojektion $\varphi(g, g', \Pi(h))$ ist eine bijektive Abbildung von $P(g)$ auf $P(g')$ genau dann, wenn sie eine Parallelprojektion ist.*

Beweis. Es sei $\varphi(g, g', \Pi(h))$ eine V-Parallelprojektion. Gilt $\bar{g} \nparallel \bar{h}$, dann ist offenbar φ eine bijektive Abbildung von $P(g)$ auf $P(g')$. Es sei $\bar{g} \parallel \bar{h}$. Wegen $\bar{g}' \nparallel \bar{h}$ ist $\bar{g} \nparallel \bar{g}'$ und g, g' schneiden sich in genau einem Punkt P. Sei A ein beliebiger Punkt von g. Setzen wir $a = L(A, h)$ und $A' = a \sqcap g'$, dann ist $\varphi(A) = A'$. Wegen $a \parallel h$ ist $\bar{a} \parallel \bar{h}$ und wegen $\bar{h} \parallel \bar{g}$ erhält man daraus $\bar{a} \parallel \bar{g}$. Aus $A \mathrm{I} a, g$ folgt dann $\bar{a} = \bar{g}$ und $\bar{A}' = \bar{P}$. Somit erhält man $\varphi(P(g)) \subset F(P, g')$.

Definition 10. Eine fastgeordnete AK-Ebene $\mathscr{A}$ heißt *geordnet*, wenn die Zwischenrelationen auf der Geraden von $\mathscr{A}$ durch alle V-Parallelprojektionen reproduziert werden.

Bemerkung 9. Es sei $\mathscr{A}$ eine (gewöhnliche) affine Ebene. Sind g, h parallele Geraden von $\mathscr{A}$ und g' eine Gerade mit $g' \not\parallel h$, dann ist $\varphi(g, g', \Pi(h))$ eine V-Parallelprojektion, die keine Parallelprojektion ist. Ist $\mathscr{A}$ fastgeordnet, dann ist sie zugleich geordnet. In einer anderen Arbeit des Verfassers: „Fastgeordnete und geordnete lokale Ringe und ihre geometrische Anwendung" werden solche AK-Ebene gefunden, die fastgeordnet aber nicht geordnet sind.

Satz 9. *Sei $\mathscr{A}$ eine geordnete AK-Ebene. Sind X, Y zwei verschiedene Punkte einer Geraden g von $\mathscr{A}$, dann gibt es unendlich viele voneinander verschiedene Punkte von g, die zwischen X, Y liegen.*

Beweis. Es seien X, Y zwei verschiedene Punkte einer Geraden g. Wir wählen eine Gerade h mit $h \parallel g$ und $\bar{h} \neq \bar{g}$. Auf h gibt es drei voneinander ferne Punkte A, B, C. Es sei z.B. (ABC). Ist $b = L(B, AX)$, dann wegen $\bar{A} \neq \bar{C}$ und $\overline{AX} \neq \overline{CX}$ gilt $\bar{b} \not\parallel \overline{CX}$ und b, CX schneiden sich in genau einem Punkt B' (Abb. 5). Wegen

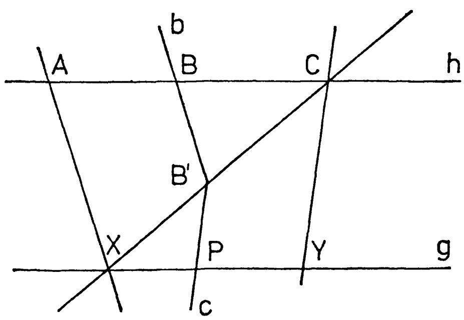

Abb. 5

$\overline{CY} \neq \bar{g}$ schneiden sich auch g, $c = L(B', CY)$ in genau einem Punkt P. $\varphi_1(h, CX, \Pi(AX))$ ist eine Parallelprojektion, denn $\overline{AX} \not\parallel \bar{h}$ und $\overline{AX} \not\parallel \overline{CX}$. Aus $\varphi_1(A) = X$, $\varphi_1(B) = B'$, $\varphi_1(C) = C'$ folgt dann $(ABC) \Rightarrow (XB'C)$. Wegen $\overline{CY} \not\parallel \bar{g}$ ist $\varphi_2(XC, g, \Pi(CY))$ eine V-Parallelprojektion mit $\varphi_2(X) = X$, $\varphi_2(B') = P$, $\varphi_2(C) = Y$, woraus $(XB'C) \Rightarrow (XPY)$ folgt. Da A, B, C voneinander fern sind, sind auch X, B', C fern. Wegen $X \neq C$ ist dabei $CX \neq CY$. Aus $X = P$ folgt $c = CX$ und $CX = CY$, also ein Widerspruch. Aus $P = Y$ folgt ähnlicherweise $c = CY$ und $CX = CY$. Die Punkte X, P, Y sind also voneinander verschieden. Da P, Y verschieden sind, läßt sich nach obigem einen Punkt $P_1 \mathrm{I}\, g$ mit (PP_1Y) und $P_1 \neq P, Y$ erklären. Nach (Z2) gilt dann $(P_1XY) \vee (P_1YX) \vee (XP_1Y)$. Ist (P_1XY), dann erhält man nach (Z5) und (Z3) $(YPX) \wedge (YXP_1) \Rightarrow (YPP_1)$ und $(YPP_1) \wedge (PP_1Y) \Rightarrow P = P_1$, was aber ein Widerspruch ist. Analog ergibt sich ein Widerspruch mit $(XPY) \wedge (XYP_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (PYP_1)$ und $(PYP_1) \wedge (PP_1Y) \Rightarrow P_1 = Y$. Somit ist (XP_1Y). Aus $X = P_1$ folgt wegen (Z3) $(XPY) \wedge (PP_1Y) \Rightarrow (P_1PY) \wedge (PP_1Y) \Rightarrow P = P_1$, also ein Widerspruch. Die Punkte X, P_1 sind also verschieden. Ferner läßt sich ein Punkt P_2 mit (P_1P_2Y) und $P_2 \neq P_1$, $P_2 \neq Y$ konstruieren, wobei (XP_2Y) und $P_2 \neq X$ gilt. Diese Prozedur läßt sich weiter ausdehnen.

Bemerkung 10. Sind die Punkte X, Y aus Satz 9 benachbart, dann sind die im Beweis dieses Satzes konstruierten Punkte $P, P_1, P_2, \ldots$ mit X und Y benachbart. Somit gilt: Zwischen zwei verschiedenen benachbarten Punkten einer Geraden g liegen unendlich viele voneinander verschiedene und benachbarte Punkte. Sei $\mathscr{A}$ fastgeordnet. Sind die Punkte X, Y fern, dann ist die im Beweis des Satzes 9 erklärte Abbildung φ_2 eine Parallelprojektion, denn es gilt $\overline{CX} \neq \overline{CY}$. Daher gibt es einen Punkt P mit (XPY), der zu X und Y fern ist. Zwischen zwei fernen Punkten einer Geraden g gibt es also unednlich viele voneinander ferne Punkte. Sind aber X, Y benachbart, dann gilt $\overline{XC} = \overline{YC}$ und φ_2 ist keine Parallelprojektion. In diesem Fall wird also die Existenz eines Punktes von g zwischen X, Y durch unsere Konstruktion nicht verborgen.

Sei $\mathscr{A}$ eine fastgeordnete AK-Ebene und seien g, h zwei benachbarte Geraden, die mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Wir betrachten folgende Behauptungen:

(H'2) $X, Y, Z \mathrel{I} h,\ Y \mathrel{I} g,\ (XYZ),\ X \in H_g^{\pm} \Rightarrow Z \in H_g^{\pm} \cup P(g)$,

(H'3) $X, Y, Z \mathrel{I} h,\ Y \mathrel{I} g,\ X \in H_g^{+},\ Z \in H_g^{-} \Rightarrow (XYZ)$,

(F1) $X, Y, Z \mathrel{I} h,\ X, Z \mathrel{I} g,\ (XYZ) \Rightarrow Y \mathrel{I} g$,

(F2) $X, Z \mathrel{I} h,\ X \in H_g^{+},\ Z \in H_g^{-} \Rightarrow \exists Y \mathrel{I} h, g,\ (XYZ)$,

(F3) $g \neq h \Rightarrow \exists X,\ Z \mathrel{I} h,\ X \in H_g^{+},\ Y \in H_g^{-}$.

Satz 10. *Ist $\mathscr{A}$ eine fastgeordnete AK-Ebene, dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(1) *$\mathscr{A}$ ist geordnet.*

(2) *In $\mathscr{A}$ gelten* (F1), (F2) *und* (F3).

(3) *In $\mathscr{A}$ gelten* (H'3) *und* (F3).

(4) *In $\mathscr{A}$ gilt* (H'2).

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2)

Ad (F1) Es gelten die Voraussetzungen von (F1). Durch den Punkt X führen wir eine Gerade p mit $\bar{p} \not\parallel \bar{g}$. Da g, h benachbart sind, gilt auch $\bar{p} \not\parallel \bar{h}$ und p, h schneiden sich in genau einem Punkt X. Betrachten wir eine V-Parallelprojektion $\varphi(h, p, \Pi(g))$, dann ist $\varphi(X) = \varphi(Z) = X$, $\varphi(Y) = Y'$ mit $Y' = L(Y, g) \sqcap p$. Hieraus folgt $(XYZ) \Rightarrow$ $\Rightarrow (XY'Z)$ und nach (Z7) dann $X = Y'$. Somit ist $L(Y, g) = g$ und $Y \mathrel{I} g$.

Ad (F2) Seien die Voraussetzungen von (F2) erfüllt, wo mit Y ein gemeinsamer Punkt von g, h bezeichnet wird. Setzen wir $g_1 = L(X, g)$ und $g_2 = L(Z, g)$, dann ist $g_1 \neq g$, $g_2 \neq g$ und $P(g_1) \subset H_g^+$, $P(g_2) \subset H_g^-$. Der Definition von H_g^+ und H_g^- nach gilt $g_2 < g < g_1$ in der Anordnung von $\Pi(g)$. Wählen wir eine Gerade p mit $\bar{p} \not\parallel \bar{g}$ und bezeichnen wir mit X', Y', Z' ihre Schnittpunkte mit g_1, g, g_2, dann nach Definition 6 ist $(X'Y'Z')$. Die Punkte X', Y', Z' sind zugleich die Bilder von X, Y, Z in der V-Parallelprojektion $\varphi(h, p, \Pi(g))$. Gilt (XZY), dann ist $(X'Z'Y')$, denn $\mathscr{A}$ ist geordnet. Aus $(X'Y'Z') \wedge (X'Z'Y')$ folgt dann nach (Z3) $Z' = Y'$, was ein Widerspruch ist. Analog ergibt sich $(YXZ) \Rightarrow (Y'X'Z')$ und $(X'Y'Z') \wedge (Y'X'Z') \Rightarrow$ $\Rightarrow X' = Y'$, also wieder ein Widerspruch. Somit ist (XYZ).

Ad (F3) Es seien g, h zwei verschiedene benachbarte Geraden, die einen Punkt Y gemeinsam haben. Wegen $g \neq h$ gibt es einen Punkt $X \mathrel{\mathrm{I}} h$ mit X non I g. Dann ist entweder $X \in H_g^+$ oder $X \in H_g^-$. Es sei z.B. $X \in H_g^+$. Nach Satz 2 gibt es einen Punkt Z von h mit (XYZ) und $\bar{X} \neq \bar{Z}$, $\bar{Y} \neq \bar{Z}$. Wegen $g \neq h$ ist Z non I g. Setzen wir $g_1 = L(X, g)$ und $g_2 = L(Z, g)$, dann $P(g_1) \subset H_g^+$. Wir wählen eine Gerade p mit $\bar{p} \not\parallel \bar{g}$ und bezeichnen mit X', Y', Z' ihre Schnittpunkte mit g_1, g, g_2. Wegen $P(g_1) \subset H_g^+$ gilt dann $X' \in H_g^+$. Ist $\varphi(h, p, \Pi(g))$ eine V-Parallelprojektion, dann $\varphi(X) = X'$, $\varphi(Y) = Y'$, $\varphi(Z) = Z'$ und $(XYZ) \Rightarrow (X'Y'Z')$. Nach (H2) ergibt sich $(X'Y'Z') \wedge X' \in H_g^+ \Rightarrow Z' \in H_g^- \cup P(g)$. Wegen Z non I g ist $g_2 \neq g$ und $Z' \neq Y'$, woraus $Z' \in H_g^-$ folgt. Dies bedeutet $P(g_2) \subset H_g^-$ und $Z \in H_g^-$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es genügt (F1) $\wedge$ (F2) $\Rightarrow$ (H'3) zu beweisen: Seien die Voraussetzungen von (H'3) erfüllt. Nach (F2) gibt es einen Punkt $B \mathrel{\mathrm{I}} g, h$ mit (XBZ). Für X, Y, B gilt nach (Z2) $(XYB) \vee (XBY) \vee (BXY)$ und ähnlicherweise für Y, Z, B gilt $(ZYB) \vee$ $\vee (YBZ) \vee (BZY)$. Aus (BXY) folgt nach (F1) $X \mathrel{\mathrm{I}} g$, also ein Widerspruch zu $X \in H_g^+$. Analog erhält man auch im Falle (BZY) ein Widerspruch. Somit gilt $(XYB) \vee (XBY)$ und zugleich $(ZYB) \vee (YBZ)$.

a) Sei $(XYB) \wedge (ZYB)$. Unter Anwendung von (Z5) und (Z3) ergibt sich $(ZYB) \wedge$ $\wedge (ZBX) \Rightarrow (YBX)$ und $(XYB) \wedge (YBX) \Rightarrow Y = B$, also $(XBZ) \Rightarrow (XYZ)$.

b) Sei $(XYB) \wedge (YBZ)$. Nach (Z5) ist $(XYB) \wedge (XBZ) \Rightarrow (YBZ)$ und $(XYB) \wedge$ $\wedge (XBZ) \Rightarrow (XYZ)$.

c) Ist $(XBY) \wedge (ZYB)$, dann gilt nach (Z5) $(ZYB) \wedge (ZBX) \Rightarrow (ZYX) \Rightarrow (XYZ)$.

d) Sei $(XBY) \wedge (YBZ)$. Gemäß (Z2) ist $(XZY) \vee (YXZ) \vee (XYZ)$. Aus (XZY) erhält man nach (Z5) und (Z3) $(XBZ) \wedge (XZY) \Rightarrow (BZY)$ und $(BZY) \wedge (ZBY) \Rightarrow$ $\Rightarrow Z = B$, was $Z \in H_g^-$ widerspricht. Aus (YXZ) folgt ähnlich $(YBX) \wedge (YXZ) \Rightarrow$ $\Rightarrow (BXZ)$ und $(BXZ) \wedge (XBZ) \Rightarrow X = B$, was wieder ein Widerspruch zu $X \in H_g^+$ ist. Somit gilt (XYZ).

(3) $\Rightarrow$ (4) Es seien die Vorausetzungen von (H'2) mit $X \in H_g^+$ erfüllt. Wegen $X \in H_g^+$ ist X non I g und $g \neq h$. Wir nehmen $Z \in H_g^+$ an. Nach (F3) gibt es dann

einen Punkt M von h mit $M \in H_g^-$. Nach (H'3) erhält man $X \in H_g^+ \wedge M \in H_g^- \Rightarrow$ $\Rightarrow (XYM)$ und $Z \in H_g^+ \wedge M \in H_g^- \Rightarrow (ZYM)$. Für die Punkte M, X, Z gilt nach (Z2) $(MXZ) \vee (XMZ) \vee (XZM)$,

a) Sei (MXZ). Unter Anwendung von (Z5) und (Z3) erhält man $(ZYX) \wedge$ $\wedge (ZXM) \Rightarrow (YXM)$ und $(YXM) \wedge (XYM) \Rightarrow X = Y$, also ein Widerspruch zu $X \in H_g^+$.

b) Gilt (XMZ), dann ist $(XYM) \wedge (XMZ) \Rightarrow (YMZ)$ und $(YMZ) \wedge (MYZ) \Rightarrow$ $\Rightarrow Y = M$, was $M \in H_g^-$ widerspricht.

c) Aus (XZM) folgt $(MYZ) \wedge (MZX) \Rightarrow (MYX)$ und $(MYX) \wedge (XYM) \Rightarrow X =$ $= Y$, also wieder ein Widerspruch.

Da aus $Z \in H_g^+$ ein Widerspruch zu (Z2) folgt, muß $Z \in H_g^- \cup P(g)$ gelten. Analog läßt sich $(XYZ) \wedge X \in H_g^- \Rightarrow Z \in H_g^+ \cup P(g)$ nachweisen.

(4) $\Rightarrow$ (1) Es genügt zu zeigen, daß jede V-Parallelprojektion, welche keine Parallelprojektion ist, alle Zwischenrelationen reproduziert. Es sei also $\varphi(g, g', \Pi(h))$ eine V-Parallelprojektion mit $\bar{g} \parallel \bar{h}$. Seien X, Y, Z Punkte von g mit (XYZ) und sei $X' = \varphi(X)$, $Y' = \varphi(Y)$ und $Z' = \varphi(Z)$ gesetzt. Dann ist $X, X' \mathrm{I}\, h_1$, $Y, Y' \mathrm{I}\, h_2$, $Z, Z' \mathrm{I}\, h_3$ mit $h_1, h_2, h_3 \in \Pi(h)$ und $\bar{h}_2 = \bar{g}$, $\bar{h}_2 \neq \bar{g}'$. Gilt $X \mathrm{I}\, h_2$ bzw. $Z \mathrm{I}\, h_2$, dann ist $h_1 = h_2$ bzw. $h_2 = h_3$ und wegen $\bar{g}' \neq \bar{h}_2$ ergibt sich daraus $X' = Y'$ bzw. $Y' = Z'$, woraus nach (Z7) $(X'Y'Z')$ folgt. Wir nehmen an, daß X, Z non I h_2 ist. Es seien $H_{h_2}^+, H_{h_2}^-$ die zu h_2 gehörigen Halbebenen. Wegen $H_{h_2}^+ \cup H_{h_2}^- = \mathscr{P} \setminus P(h_2)$ und X non I h_2 ist $X \in H_{h_2}^+ \vee X \in H_{h_2}^-$. Sei z.B. $X \in H_{h_2}^+$. Gemäß (H'2) und wegen Z non I h_2 ergibt sich $(XYZ) \wedge X \in H_{h_2}^+ \Rightarrow Z \in H_{h_2}^-$, also $P(h_1) \subset H_{h_2}^+$ und $P(h_3) \subset$ $\subset H_{h_2}^-$. Somit ist $X' \in H_{h_2}^+$ und $Z' \in H_{h_2}^-$. Wegen $\bar{g}' \neq \bar{h}_2$ erhält man nach (H3) $(X'Y'Z')$.

Bemerkung 11. Es sei $\mathscr{A}$ eine fastgeordnete AK-Ebene und seien g, h benachbarte Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben. Wir stellen schematisch den Verlauf von g, h in den einzelnen Fällen dar.

a) Ist in $\mathscr{A}$ keine der Forderungen (F1) bis (F3) erfüllt, dann ist der Verlauf von g, h durch die Anordnung von $\mathscr{A}$ nicht beeinflußt.

b) Es gelten (F1), (F3) aber nicht (F2) (Abb. 6).

c) Es gelten (F1), (F2) aber nicht (F3) (Abb. 7).

d) Es gelten (F2), (F3) aber nicht (F1) (Abb. 8).

e) Es gelten (F1), (F2), (F3), d.h. $\mathscr{A}$ ist geordnet (Abb. 9).

In der Arbeit des Verfassers, die in der Bemerkung 9 erwähnt wird, ist eine konvex fastgeordnete AK-Ebene konstruiert, in der (F1), (F3) aber nicht (F2) erfüllt wird (Fall b)).

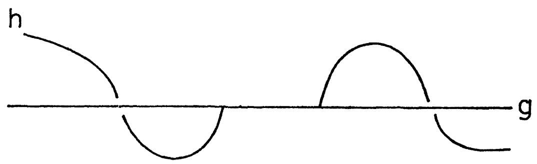

Abb. 6

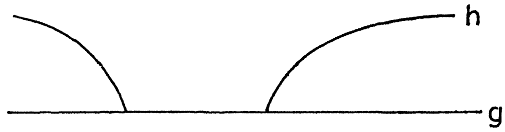

Abb. 7

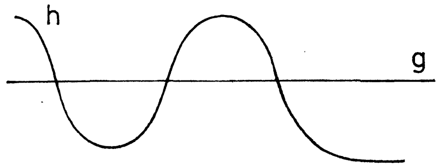

Abb. 8

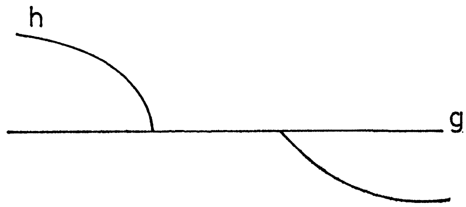

Abb. 9

Satz 11. *Gilt in einer fastgeordneten affinen Hjelmslev-Ebene* $\mathscr{A}$ [2] *die Forderung* (F1), *dann ist* $\mathscr{A}$ *konvex.*

Beweis. Es sei $\mathscr{A}$ eine fastgeordnete affine Hjemslev-Ebene. Sei p eine Gerade und P ein Punkt von $\mathscr{A}$ mit $P \mathrm{I} p$ und seien X, Y, Z Punkte mit $X, Z \in F(P, p)$, $Y \mathrm{I} p$, (XYZ). Gilt $X = Z$, dann $(XYZ) \Rightarrow X = Y$ und folglich $Y \in F(P, p)$. Gilt $X \neq Z$, dann geht durch X, Z noch eine mit p verschiedene Gerade g, wobei g und p benachbart sind. Die Punkte X, Y, Z und Geraden g, p genügen den Voraussetzungen von (F1) und mithin $Y \mathrm{I} g$. Wegen $X, Y \mathrm{I} p, g$ und $p \neq g$ gilt nach (K1) $\overline{X} = \overline{Y}$ und $Y \in F(P, p)$.

Definition 11. Eine Menge $\mathscr{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3', Z, g, g', h_1, h_2, h_3\}$ von Punkten und Geraden einer geordneten AK-Ebene heißt *Konfiguration vom Typ* (*K*), falls es gilt: $A_i \mathrm{I}\, g$, $(A_1A_2A_3)$, $A'_i \mathrm{I}\, g'$, $\bar{A}_2 \neq \bar{Z}$, $\bar{Z}$ non I $\bar{g}'$, $Z \mathrm{I}\, h_i$, $A_i \mathrm{I}\, h_i$, $A'_i \mathrm{I}\, h_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ (Abb. 10). Eine Konfiguration $\mathscr{M}$ vom Typ (K) hat die Eigenschaft (B1) bzw. (B2), falls $\neg(A_1ZA'_1) \wedge \neg(A_3ZA'_3)$ bzw. $(A_1ZA'_1) \wedge (A_3ZA'_3)$ gilt.

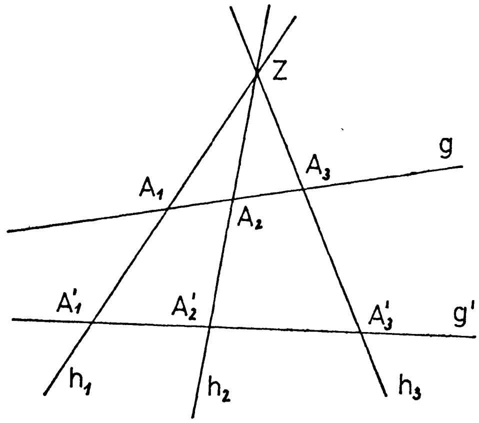

Abb. 10

Bemerkung 12. Es sei $\mathscr{M}$ eine Konfiguration vom Typ (K). Wegen $\bar{Z}$ non I $\bar{g}'$ und $A'_i \mathrm{I}\, g'$ ist $\bar{Z} \neq \bar{A}'_i$ und es läßt sich $h_i = ZA'_i$ setzen, wobei $\bar{h}_i \neq \bar{g}'$ gilt. Wegen $\bar{A}_2 \neq \bar{Z}$ und $A_2, Z \mathrm{I}\, h_2$ ist $h_2 = ZA_2 = ZA'_2$.

Satz 12. *Ist* $\mathscr{M} = \{A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3, Z, g, g', h_1, h_2, h_3\}$ *eine Konfiguration vom Typ* (K), *dann* $A_1 \mathrm{I}\, h_2 \Leftrightarrow A'_1 = A'_2$ *und* $A_3 \mathrm{I}\, h_2 \Leftrightarrow A'_3 = A'_2$.

Beweis. Es sei $A_1 \mathrm{I}\, h_2$. Wegen $A_1, A_2 \mathrm{I}\, h_2, g$ folgt aus (K2) $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$ und $\bar{Z} \neq \bar{A}_2$ impliziert $\bar{A}_1 \neq \bar{Z}$. Mithin gilt $h_1 = ZA'_1 = ZA_1 = h_2 = ZA_2 = ZA'_2$. Da $\bar{h}_2 \nparallel \bar{g}'$ ist, haben g', h_2 genau einen Punkt gemeinsam, woraus wegen $A'_2 \mathrm{I}\, h_2, g'$ und $A'_1 \mathrm{I}\, h_2, g'$ die Gleichheit $A'_1 = A'_2$ folgt. Sei $A'_1 = A'_2$. Dann gilt $h_1 = ZA'_1 = ZA'_2 = h_2$ und aus $A_1 \mathrm{I}\, h_1$ folgt $A_1 \mathrm{I}\, h_2$. Ähnlich beweisen wir die Äquivalenz $A_3 \mathrm{I}\, h_2 \Leftrightarrow A'_3 = A'_2$.

Satz 13. *Sei in einer geordneten AK-Ebene eine Konfiguration* $\mathscr{M} = \{A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3, Z, g, g', h_1, h_2, h_3\}$ *vom Typ* (K) *gegeben. Sind* A'_1, A'_2, A'_3 *voneinander verschieden, dann gilt* $(A'_1A'_2A'_3)$ *genau dann, wenn* $\mathscr{M}$ *entweder die Eigenschaft* (B1) *oder* (B2) *hat.*

Beweis. Sei $\mathscr{M}$ eine Konfiguration vom Typ (K) und seien A'_1, A'_2, A'_3 voneinander verschieden. Wegen $\bar{h}_2 \neq \bar{g}'$ ist nach (K2) A'_1, A'_3 non I h_2 und nach Satz 12 folgt hieraus A_1, A_3 non I h_2.

1. a) Wir nehmen an, daß $\mathscr{M}$ die Eigenschaft (B1) besitzt (Abb. 10). Es seien $H^+_{h_2}, H^-_{h_2}$ die zu h_2 gehörigen Halbebenen. Wegen A_1 non I h_2 ist $A_1 \in H^+_{h_2} \vee A_1 \in H^-_{h_2}$. Sei $A_1 \in H^+_{h_2}$. Gilt dabei $A'_1 \in H^-_{h_2}$, dann ergibt sich nach (H3) bzw. (H'3)

$A_1, A'_1, Z \mathrm{I} h_1, \ Z \mathrm{I} h_2, \ A_1 \in H^+_{h_2}, \ A'_1 \in H^-_{h_2} \Rightarrow (A_1 Z A'_1)$, also ein Widerspruch zu $\neg(A_1 Z A'_1)$. Aus A'_1 non I h_2 erhält man daher $A'_1 \in H^+_{h_2}$. Nach (H2) bzw. (H'2) und wegen A_3 non I h_2 gilt $(A_1 A_2 A_3) \wedge A_1 \in H^+_{h_2} \Rightarrow A_3 \in H^-_{h_2}$. Unter Anwendung von (H3) bzw. (H'3) beweisen wir wie oben, daß $A'_3 \in H^-_{h_2}$ ist. Aus $\bar{h}_2 \neq \bar{g}'$ und $A'_1 \in H^+_{h_2}$, $A'_3 \in H^-_{h_2}$ folgt nach (H3) $(A'_1 A'_2 A'_3)$.

b) Wir nehmen an, daß $\mathcal{M}$ die Eigenschaft (B2) besitzt. Gilt $A_1 \in H^+_{h_2}$, dann $(A_1 Z A'_1) \wedge A_1 \in H^+_{h_2} \Rightarrow A'_1 \in H^-_{h_2}$. Zugleich ist $(A_1 A_2 A_3) \wedge A_1 \in H^+_{h_2} \Rightarrow A_3 \in H^-_{h_2}$ und $(A_3 Z A'_3) \wedge A_3 \in H^-_{h_2} \Rightarrow A'_3 \in H^+_{h_2}$. Nach (H3) ergibt sich schließlich $A'_1 \in H^-_{h_2} \wedge$ $\wedge A'_3 \in H^+_{h_2} \Rightarrow (A'_1 A'_2 A'_3)$.

2. Es sei $(A'_1 A'_2 A'_1)$ und zugleich $\neg(A_3 Z A'_3) \wedge (A_1 Z A'_1)$. Wir nehmen dabei z.B. $A'_1 \in H^+_{h_2}$ an. Wegen $(A'_1 A'_2 A'_3)$ und $(A'_1 Z A_1)$ gilt dann $A'_3, A_1 \in H^-_{h_2}$. Ist $A_3 \in H^+_{h_2}$, dann $A_3 \in H^+_{h_2} \wedge A'_3 \in H^-_{h_2} \Rightarrow (A_3 Z A'_3)$, was ein Widerspruch zu $\neg(A_3 Z A'_3)$ ist. Wegen A_3 non I h_2 ist also $A_3 \in H^-_{h_2}$. Gleichzeitig aber gilt $(A_1 A_2 A_3) \wedge A_1 \in H^-_{h_2} \Rightarrow$ $\Rightarrow A_3 \in H^+_{h_2}$, was zum Widerspruch führt. Analog wird gezeigt, daß $\neg(A_1 Z A'_1) \wedge$ $\wedge (A_3 Z A'_3)$ nicht gelten kann. Mithin ist entweder $\neg(A_1 Z A'_1) \wedge \neg(A_3 Z A'_3)$ oder $(A_1 Z A'_1) \wedge (A_3 Z A'_3)$ und $\mathcal{M}$ entweder (B1) oder (B2) erfüllt.

Literatur

[1] *Dembowski, P.:* Finite Geometrie. New York 1968.

[2] *Lüneburg, H.:* Affine Hjemslev-Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Zeitschr. *79*, 1962, 260—288.

[3] *Kunze, M.:* Angeordnete Hjelmslevsche Geometrie. Disertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1975.

[4] *Machala, F.:* Angeordnete affine Klingenbergsche Ebenen Czech. Math. Journal *30* (105), 341—356, 1980.

[5] *Pickert, G.:* Projektive Ebenen. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York 1975.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).