Jaromír Krys
Užití kubiky při řešení jedné kombinatorické úlohy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 107 (1982), No. 3, 244--252

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118131

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 107 (1982), Praha

UŽITÍ KUBIKY PŘI ŘEŠENÍ JEDNÉ KOMBINATORICKÉ ÚLOHY

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 3. listopadu 1980)

ÚVOD

Na pracovní schůzce řešitelů dílčího státního úkolu základního výzkumu nás jedna členka našeho kolektivu seznámila s úlohou, kterou řešili resp. potřebují vyřešit pracovníci sociologického ústavu ČSAV. Jedná se o tuto záležitost. Při rozhodování o nějaké důležité věci zvou si pořádající organizace experty oboru a z jednání těchto expertů se vydá rozhodnutí. Je vyzkoušeno, že tato jednání jsou progresivní, když na jedné schůzce spolu jednají právě tři experti. Nyní formulujeme naši úlohu takto: Budiž přirozené číslo $n \geqq 3$.

a) Jaký je nejmenší počet schůzek n expertů, když na každé schůzce spolu jednají právě tři experti, přičemž každý z expertů se musí sejít s ostatními experty aspoň na jedné schůzce.

b) Určete rozpis těchto schůzek.

KAPITOLA I. TABULKY MNOŽIN BODŮ KUBIKY

V lit. [1] str. 212 je odvozeno, že tři body rovinné kubiky s bodem uzlovým leží na přímce, právě když pro jejich parametry platí $t_1t_2t_3 + 1 = 0$ (t_1, t_2, t_3 jsou komplexní čísla), takže $t_1t_2 = -t_3^{-1}$ a tedy $(t_1t_2)^{-1} = -t_3$. Odtud plyne, že množinu bodů kubiky s bodem uzlovým můžeme svázat binární operací, která každým dvěma bodům kubiky, jejichž parametry jsou komplexní čísla t_1 a t_2, přiřazuje bod, jehož parametr $t_3 = -(t_1t_2)^{-1}$. Geometrická interpretace je ta, že k daným dvěma bodům kubiky např. A, B přiřadíme bod C, který je třetím průsečíkem přímky AB s danou kubikou. Zvolme za t_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) všechny $\sqrt[n]{1}$. Vzhledem k násobení komplexních jednotek je tato množina grupou, která je izomorfní s grupou Z_n (Z_n je množina zbytkových tříd podle modulu n — operace je sčítání těchto tříd). Cayleyova tabulka grupy Z_n má prvky v řádcích cyklicky uspořádané s prvním řádkem $1, 2, \ldots, n$. V Z_n je k prvku 1 inverzní 1 a pro $i \neq 1$ je k prvku i inverzní prvek $n + 2 - i$.

Cayleyova tabulka, která má prvky v řádcích cyklicky uspořádané s prvním řádkem 1, n, $n - 1, \ldots, 3, 2$ je tedy též tabulkou množiny bodů na kubice, kde čteme následující: přímka, která spojuje dva body kubiky zapsané v záhlaví tabulky, jeden v řádku, druhý ve sloupci, obsahuje třetí bod kubiky, zapsaný v tabulce na průsečíku uvažovaného řádku a sloupce. V další kapitole užijeme těchto tabulek pro dané n a proto v této části neuvedeme konkrétní příklady.

KAPITOLA II. UŽITÍ KUBIKY PŘI ŘEŠENÍ DANÉ ÚLOHY

Nechť $n = 15$. Označme 15 různých bodů dané kubiky postupně čísly jedna až patnáct. V prvé kapitole je ukázáno, že pro danou kubiku s bodem uzlovým jsou to body, jejichž parametry jsou všechny $\sqrt[15]{1}$. Pro tyto body dostáváme tabulku:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
2	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
3	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	15
4	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	15	14
5	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	15	14	13
6	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	15	14	13	12
7	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	15	14	13	12	11
8	9	8	7	6	5	4	3	2	1	15	14	13	12	11	10
9	8	7	6	5	4	3	2	1	15	14	13	12	11	10	9
10	7	6	5	4	3	2	1	15	14	13	12	11	10	9	8
11	6	5	4	3	2	1	15	14	13	12	11	10	9	8	7
12	5	4	3	2	1	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
13	4	3	2	1	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
14	3	2	1	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
15	2	1	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3

Označíme-li naše experty také čísly od jedné do patnácti, můžeme podle naší tabulky psát jednotlivé schůzky:

1 2 15, 1 3 14, 1 4 13, 1 5 12, 1 6 11, 1 7 10, 1 8 9 ;

tyto schůzky jsme dostali z prvého řádku tabulky — nyní použijeme druhý řádek, přičemž zase vynecháme schůzky, které jsme již uvedli, a dále takové schůzky, které by obsazovali jen dva experti:

2 3 13, 2 4 12, 2 5 11, 2 6 10, 2 7 9 ,

a pokračujeme dále

				3 4 11,	3 5 10,	3 6 9,	3 7 8,
4 14 15,					, 4 5 9,	4 6 8,	
5 13 15,							5 6 7,
6 12 15,	6 13 14,						
7 11 15,	7 12 14,						
8 10 15,	8 11 14,	8 12 13,					
	9 10 14,	9 11 13,					
			10 11 12.				

Čtenář snadno zjistí, že se nesešly tyto dvojice expertů:

2 14, 3 12, 4 10, 7 4, 8 2, 9 15, 10 13, 12 9, 13 7, 14 5 a 15 3.

Na kubice jsou spojnice těchto dvojic bodů tečnami kubiky, vždy v prvním bodě dvojice. Tyto tečny najdeme sledováním bodů na hlavní diagonále tabulky, neboť bod hlavní diagonály je tečnovým bodem bodu v záhlaví příslušného řádku a sloupce. V našem případě jsou na hlavní diagonále ještě body 1, 6 a 11. Tyto body jsou inflexní body kubiky (tečnový bod splývá s bodem dotyku). Nyní k tomu, aby se uvedení experti mohli sejít, připojíme ještě další schůzky

2 14 5 (v hlavní diagonále je ve 2. sloupci 14 a ve 14. sloupci je 5),
3 12 9, 4 10 13, 5 8 2, 13 7 4, 9 15 3.

Tím je rozpis schůzek hotov a je jich 37.

Při zobecnění navrženého postupu řešení vyjdeme pro každé přirozené $n \geqq 3$ zase z tabulky, tak jak jsme vycházeli z uvedené tabulky pro $n = 15$. Uvedená tabulka bez záhlaví je latinský čtverec, který je zároveň obráceným cirkulantem. V prvém řádku bude v hlavní diagonále vždy jednička, tj. bod 1 bude vždy inflexním bodem kubiky. Dále, podle uvedené tabulky chceme, aby pro prvek tabulky platilo

$$a_{ij} = a_{1,i+j-1} = n + 3 - (i + j),$$

kde, v případě, že index $i + j - 1 > n$, zapisujeme už jen jeho zmenšení o n a také jestliže je $n + 3 - (i + j) > n$, pak zapisujeme už jen jeho zmenšení o n a když $n + 3 - (i + j) < 1$, zapisujeme hned jen jeho zvětšení o n. Odtud $a_{ii} = n + 3 - 2i$, kde $n + 3 - 2i > n$ zmenšujeme o n a $n + 3 - 2i < 1$ zvětšujeme o n, takže pro n sudé jsou na hlavní diagonále jenom lichá čísla $1, 3, \ldots, n - 1$ a pro n liché jsou na hlavní diagonále všechna čísla $1, 2, \ldots, n$. Hledejme další inflexní body kubiky různé od bodu 1. Aby bod i byl inflexní, musí platit $i = n + 3 - 2i$ tj. $3i = n + 3$. Další dva inflexní body dostaneme jen v tom případě, kdy n je dělitelné třemi. Nejsou tedy tabulky v obecném případě obdobné. Proto při řešení obecné úlohy rozeznávejme čtyři případy.

1) **Číslo n je dělitelné třemi a je liché (mezi ně patří i 15).** V tomto případě jsou v hlavní diagonále tabulky zachyceny všechny tři od sebe různé inflexní body. Dále, v hlavní diagonále jsou všechna čísla $1, 2, \ldots, n$, tj. každý bod je tečnovým bodem právě jednoho bodu. Bodů, které nejsou inflexní, je $n - 3$. Každým takovým bodem prochází $(n - 9)/2$ přímek, které spojují tento bod s dalšími dvěma různými neinflexními body — přitom nepotřebujeme spojnice bodu s jeho tečnovým bodem a spojnice bodu s bodem, pro nějž je tento bod bodem tečnovým, dále, na každé takové přímce jsou tři neinflexní body. Je tedy těchto přímek (které nám budou organizovat schůzky)

$$\tfrac{1}{3}(n - 3)(n - 9)/2 .$$

Tyto přímky určíme z tabulky tak, jak jsme začínali v případě $n = 15$ na začátku. Inflexní body jsou 3. Každým inflexním bodem prochází $(n - 1)/2$ přímek, které spojují tento inflexní bod s dalšími dvěma body. Tečnový bod inflexního bodu je daný inflexní bod a tečnový bod neinflexního bodu je neinflexní bod (v tomto případě). Je tedy těchto přímek (opět nám budou organizovat schůzky)

$$3(n - 1)/2 - 2 ,$$

protože tři různé inflexní body kubiky leží na jediné přímé, takže tato přímka by byla počítána třikrát. Nyní ještě přidáme $(n - 3)/2$ přímek (totiž opět schůzek), a to ty, jež můžeme interpretovat jako trojici bod, jeho tečnový bod, a bod, který je tečnovým bodem tohoto tečnového bodu. Dostáváme takto celkem

$$\tfrac{1}{3}(n - 3)(n - 9)/2 + 3(n - 1)/2 - 2 + (n - 3)/2 = (n^2 - 3)/6 \text{ schůzek} .$$

2) **Číslo n je dělitelné třemi a je sudé.** V tomto případě jsou v hlavní diagonále zaznamenány tři od sebe různé inflexní body, a jinak jsou tam jen lichá čísla, tj. každý bod dvakrát, tedy každé liché číslo označuje tečnový bod dvou různých bodů (inflexní bod také, ale jeden z nich je jmenovaný inflexní bod).

Bodů označených sudými čísly je $n/2$. Každým z těchto bodů prochází $(n - 2)/2$ přímek, které spojují tento bod se dvěma dalšími různými body, přičemž vynecháváme přímku, která spojuje tento bod s jeho tečnovým bodem. Inflexní body jsou 3. Každým z nich prochází $(n - 2)/2$ přímek, neboť opět nepotřebujeme přímku, která spojuje tento inflexní bod s bodem, pro něž je tento inflexní bod bodem tečnovým. Bodů označených lichými čísly, a které nejsou inflexní, je $n/2 - 3$. Jestliže $n = 6$, potom žádný takový bod neexistuje. Jestliže $n > 6$, potom tímto bodem prochází $(n - 4)/2$ pro nás vhodných přímek, neboť vynecháváme jeho spojení s tečnovým bodem a dvě spojení s body, pro něž je náš bod tečnový. Všechny uvedené přímky dostaneme tak jako v případě $n = 15$ na začátku. Protože ale každá z těchto přímek obsahuje tři body, je celkový počet přímek $\tfrac{1}{3}[(n/2)(n - 2)/2 + 3(n - 2)/2 + (n/2 - 3)(n - 4)/2] = \tfrac{1}{6}n(n - 3) + 1$. Konečně přidáme celkem $n/2$ dvojic různých přímek (každá dvojice bude určovat jednu schůzku) spojujících každý bod označený lichým číslem se dvěma dalšími body. Neinflexní bod spojíme s dvěma body, které mají daný bod za svůj tečnový. Bod, jehož tečnovým bodem je inflexní bod spojíme s tímto inflexním bodem a druhá přímka dané dvojice bude spojnice tohoto inflexního bodu s libovolným dalším bodem. Počet schůzek je v tomto případě $(n^2 + 6)/6$. Ověřme si tento výsledek na příkladě pro $n = 12$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
2	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
3	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
4	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12	11
5	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12	11	10
6	8	7	6	5	4	3	2	1	12	11	10	9
7	7	6	5	4	3	2	1	12	11	10	9	8
8	6	5	4	3	2	1	12	11	10	9	8	7
9	5	4	3	2	1	12	11	10	9	8	7	6
10	4	3	2	1	12	11	10	9	8	7	6	5
11	3	2	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4
12	2	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3

Z tabulky dostáváme:

1 2 12, 1 3 11, 1 4 10, 1 5 9, 1 6 8,
2 3 10, 2 4 9, 2 5 8, 2 6 7,
3 4 8, 3 5 7,
4 11 12, 4 5 6,
5 10 12,
6 9 12, 6 10 11,
7 8 12, 7, 9 11,
8 9 10.

Nyní přidáme 2 8 11, 4 10 7, 6 12 13 a 7 1 8, 11 5 4, 3 9 2. Tedy celkem 25 schůzek tj. $(12^2 + 6)/6 = 25$.

3) **Číslo *n* není dělitelné třemi a je liché.** V tomto případě existuje jediný inflexní bod a na hlavní diagonále jsou všechna čísla. Bodů, které nejsou inflexní, je $n - 3$. Každým takovým bodem prochází $(n - 1)/2$ přímek, neboť opět nepotřebujeme přímku s bodem, pro nějž je náš bod jeho tečnovým bodem. Inflexním bodem prochází $(n - 1)/2$ přímek, neboť opět nepotřebujeme jednu přímku – nedává schůzku tří expertů. Protože každá přímka obsahuje 3 body, je těchto přímek $\frac{1}{3}[(n - 3) . (n - 1)/2 + (n - 1)/2] = \frac{1}{6}(n^2 - 3n + 2)$. Všechny tyto body dostaneme z dané tabulky známým způsobem. Nyní ještě přidáme $(n - 1)/2$ přímek, které obsahují bod, jeho tečnový bod a tečnový bod tečnového bodu. Dostáváme v tomto případě

$$\tfrac{1}{6}(n^2 - 3n + 2) + (n - 1)/2 = (n^2 - 1)/6 \text{ schůzek}.$$

4) **Číslo n není dělitelné třemi a je sudé.** V tomto případě existuje jediný inflexní bod a na hlavní diagonále jsou jenom lichá čísla. Zcela obdobně jako v případě 2) dostáváme

$$\frac{1}{3}\left[\frac{n}{2}(n - 2)/2 + (n - 2)/2 + (n/2 - 1)(n - 4)/2\right] + n/2 = (n^2 + 2)/6$$

a toto číslo udává počet schůzek pro tento případ.

KAPITOLA III. PŘÍPADY MINIMÁLNÍHO POČTU SCHŮZEK

V této kapitole rozřešíme danou úlohu v některých případech tak, abychom dosáhli minimálního počtu schůzek. V tomto případě každá dvojice expertů se bude vyskytovat v právě jedné trojici a náš systém trojic bude pak zároveň tzv. Steinerův systém trojic – viz např. lit. [4]. Počet neuspořádaných dvojic z daných n prvků je $\binom{n}{2}$ a s každou schůzkou tří expertů se konají současně tři schůzky dvojic expertů a tedy pro minimální počet schůzek dostáváme odhad $n(n - 1)/6$. Interpretujeme-li schůzku jako přímku roviny a experta jako bod roviny, pak se jedná o existenci rovinné konfigurace typu:

$$\begin{pmatrix} n & & n(n-1)/6 & \\ & (n-1)/2 & & 3 \end{pmatrix}.$$

Je-li n sudé, potom je zřejmé, že taková konfigurace neexistuje. Víme však, že existuje konfigurace inflexních bodů kubiky:

$$\begin{pmatrix} 9 & & 12 & \\ & 4 & & 3 \end{pmatrix}.$$

V dalším ukážeme, že pomocí vhodně zvolených tabulek můžeme naši úlohu řešit pro jistá n postupem uvedeným v předcházejícím a nejdůležitější při tom bude, že dosáhneme nejmenšího možného počtu schůzek tj. $n(n - 1)/6$. Označme $1'$ vnitřek tabulky pro $n = 3$ tj.:

$1' =$

1	3	2
3	2	1
2	1	3

Dále $2' =$

4	6	5
6	5	4
5	4	6

a $3' =$

7	9	8
9	8	7
8	7	9

Nyní sestavíme tabulku pro devět prvků, která bude mít tvar pro $n = 3$, kde, ale místo 1 bude 1′, místo 2 bude 2′ a místo 3 bude 3′ tj.:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	3	2	7	9	8	4	6	5
2	3	2	1	9	8	7	6	5	4
3	2	1	3	8	7	9	5	4	6
4	7	9	8	4	6	5	1	3	2
5	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	8	7	9	5	4	6	2	1	3
7	4	6	5	1	3	2	7	9	8
8	6	5	4	3	2	1	9	8	7
9	5	4	6	2	1	3	8	7	9

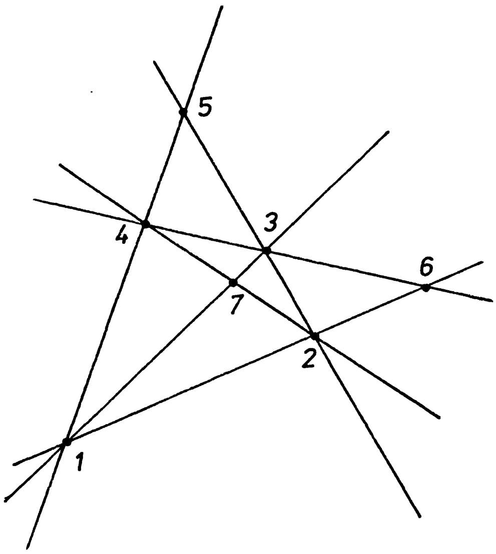
V tomto případě jsou všechny body inflexní, takže každá spojnice dvou bodů obsahuje další třetí bod a neexistují přímky spojující jenom dva různé body. Schůzky snadno určíme postupem popsaným pro $n = 15$. 1 2 3, 1 4 7, 1 5 9, 1 6 8, 2 4 9, 2 5 8, 2 6 7, 3 4 8, 3 5 7, 3 6 9, 4 5 6, 7 9 8 a toto jsou všechny nutné schůzky pro devět expertů. Stejným způsobem, kterým jsme z tabulky pro $n = 3$ dostali tabulku pro $n = 3^2$, dostaneme z předcházející tabulky pro $n = 9$, tabulku pro $n = 3^3 = 27$. Označíme 1′ vnitřek tabulky pro $n = 9$, 2′ označíme vnitřek tabulky pro čísla 10 až 18, přičemž tuto tabulku sestavíme stejným způsobem jako tabulku pro $n = 9$ a podobně označíme 3′ vnitřek tabulky pro čísla 19 až 27. Nechť laskavý čtenář si tuto tabulku sestrojí sám. Potom zjistí, že na hlavní diagonále jsou všechna čísla a navíc, že body v tabulce, která už není tabulkou množin bodů kubiky, se chovají tak jako v minulých tabulkách inflexní body kubiky. Z tabulky pro 27 prvků resp. expertů dostaneme tabulku pro 81, z této tabulky pro 243 atd. (obecně pro $n = 3^k$) a čtenář snadno pomocí těchto tabulek určí dokonce rozpis pro schůzky expertů.

Vraťme se k tabulce pro $n = 9$. Snadno si uvědomíme, že k sestrojení příslušných přímek nám stačilo znát, že body 1 2 3, 4 5 6 a 7 8 9 leží na přímce a dále jenom část dané tabulky a to:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1				7	9	8			
2				9	8	7			
3				8	7	9			

V případě $n = 3$ zřejmé, že stačí jediná schůzka, aby se příslušní experti sešli. Z předcházejícího je vidět, že minimální počet schůzek pro $n = 9$ jsme dostali $1 + 1 + 1 +$

$+ 3 . 3 = 3 . 1 + 3^2$ tj. $3 . m + (n/3)^2$, kde m je minimální počet schůzek expertů pro $n/3$ tj.: $(3n/3 . (n/3 - 1))/6 + n^2/3 = n/n - 1)/6$. Tím jsme ukázali, že postup pro $n = 9$ můžeme zobecnit pro libovolné n. Jde ovšem o to, že nejdříve musíme pro dané číslo určit minimální počet schůzek. Nechť $n = 7$. Potom minimální počet schůzek je $7 . 6/6 = 7$ (podle první kapitoly umíme najít schůzky pro $n = 7$ v počtu $(49 - 1)/6 = 8$). Nechť body $1, 2, \ldots, 7$ jsou vrcholy čtyřrohu a jeho diagonálního trojrohu (viz. obr.):



Z obrázku je vidět, že sedm schůzek: 126, 173, 145, 235, 274, 346 a 567 odpovídajících expertů řeší naši úlohu. Pomocí tohoto odvodíme předcházejícím způsobem schůzky pro $3 . 7 = 21$ expertů. Sestrojme část tabulky pro $n = 21$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1								15	21	20	19	18	17	16							
2								21	20	19	18	17	16	15							
3								20	19	18	17	16	15	21							
4								19	18	17	16	15	21	20							
5								18	17	16	15	21	20	19							
6								17	16	15	21	20	19	18							
7								16	15	21	20	19	18	17							

a dostaneme 49 schůzek: 1 15 8, 1 21 9, 1 20 10, 1 19 11, 1 18 12, 1 17 13, 1 14 16, 2 21 8, 2 20 9, 2 19 10, 2 18 11, 2 17 12, 2 16 13, 2 15 14, 3 8 20, 3 9 19, 3 10 18, 3 17 11, 3 16 12, 3 15 13, 3 21 14, 4 19 8, 4 9 18, 4 17 10, 4 16 11, 4 15 12, 4 13 21, 4 14 21, 5 8 18, 5 17 9, 5 16 10, 5 11 15, 5 12 21, 5 13 20, 5 14 19, 6 8 17, 6 9 16, 6 10 15, 6 11 21; 6 12 20, 6 13 19, 6 14 18, 7 8 16, 7 9 15, 7 10 21, 7 11 20, 7 12 19, 7 13 18, 7 14 17. Dalších 14 schůzek dostaneme tak, že pro experty 8, ..., 14 a 15, ..., 21 využijeme našeho obrázku. Celkem $21 + 49 = 70 = 21 . 20/6$. Tímto způsobem postupně najdeme minimální počet schůzek (a samozřejmě i rozpis) pro $n = 7 . 3^k$, kde k je přirozené číslo. T. Kirkman [3] našel pro schůzky v minimálním počtu, když $n = 15$. Je znám i rozpis minimálního počtu schůzek pro $n = 13$. Popsaným způsobem můžeme odvodit schůzky pro $n = 13 . 3^k$ a $n = 15 . 3^k$.

Poznámka. Tento způsob můžeme aplikovat i na hledání schůzek v prvé kapitole. V případě n dělitelného třemi a lichého, dostaneme: $3 . (n^2 - 3)/6 + n^2 = (9n^2 - 9)/6$, což je o jednu schůzku méně než dostaneme podle odvozeného vzorce.

Literatura

[1] *Bohumil Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie. Praha 1948.

[2] *J. Dénes, A. D. Keedwell:* Latin squares and thein applications. Akadémiai Kiadó, Budapest 1974.

[3] *T. P. Rev. Kirkman:* On a problem in combinations, Camb. & Dublin Math. J. *2* (1847), 191—204.

[4] *M. Hall:* Kombinatorika. Moskva 1970 (ruský překlad).

Adresa autora: 501 91 Hradec Králové, nám. V. I. Lenina 301 (Pedagogická fakulta).

Summary

SOLUTION OF A COMBINATORIAL PROBLEM USING A PLANE CUBIC CURVE

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

The following combinatorial problem connected with a practical situation is investigated:

To find the minimum number of meetings needed for n experts under the conditions that at each meeting exactly three experts should take part and each expert should meet each other at some meeting.

The proposed solution with the schedule of meetings uses properties of points of a cubic plane curve with a double point.