Jiří Čížek

Об алгебраической независимости значений некоторых E-функций. I.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 115 (1990), No. 3, 283--289

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118407`

115 (1990) ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY No. 3, 283—289

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ E-ФУНКЦИЙ

Jiří Čížek, Plzeň

(Поступило в редакцию 10. X. 1988 г.)

В 1954 г. А. Б. Шидловский доказал общую теорему об алгебраической независимости значений E-функций (см. [1], стр. 91). Для того, чтобы применить эту теорему к конкретной совокупности E-функций, удовлетворяющей системе линейных дифференциальных уравнений, необходимо доказать алгебраическую независимость этой совокупности функций над $\mathbb{C}(z)$. Многие авторы разработали ряд методов доказательства алгебраической независимости для многих конкретных совокупностей E-функций (см. [1], гл. 5.—8.). Один из таких методов используется для доказательства нижеследующей теоремы. Пусть $[\alpha, n] = \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n - 1)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, и

$$(1) \qquad A_0(z) = A_{\lambda,\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu, n]}{n!\,[\lambda, n]} z^n\,, \quad \lambda \neq 0, -1, -2, \dots$$

Функция (1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(2) \qquad y'' + \frac{\lambda - z}{z} y' - \frac{\nu}{z} y = 0\,.$$

Пусть далее $\mu_k \neq 0, -1, -2, \dots, k = 1, \dots, m$.
Обозначим

$$(3) \qquad A_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu, n]\, z^n}{n!\,[\lambda, n]\,(\mu_1 + n)\dots(\mu_k + n)}\,, \quad k = 1, \dots, m\,.$$

Функции $A_0, A_0', A_1, \dots, A_m$ образуют решение системы дифференциальных уравнений

$$(4) \qquad y_0' = \bar{y}_0\,, \quad \bar{y}_0' = \frac{\nu}{z} y_0 + \frac{z - \lambda}{z} \bar{y}_0\,, \quad y_k' = -\frac{\mu_k}{z} y_k + \frac{1}{z} y_{k-1}\,,$$

$$k = 1, \dots, m.$$

Обозначим

$$(5) \qquad D = \frac{\partial}{\partial z} + \bar{y}_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + \left(\frac{\nu}{z} y_0 + \frac{z - \lambda}{z} \bar{y}_0\right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_0} -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\mu_i}{z}y_i-\frac{1}{z}y_{i-1}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

дифференциальный оператор, связанный с системой (4).

В работе докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $\lambda\in\mathbb{Q}$, $\nu\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, *так, что* $-\lambda\notin\mathbb{Z}^+$, $\nu-\lambda\notin\mathbb{Z}$, *пусть* $\mu_i\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $i=1,\ldots,m$, *так, что* $\nu-\mu_i\notin\mathbb{N}$, $\mu_i-\lambda\notin\mathbb{Z}^+$, $\mu_i-\mu_j\notin\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $i,j=1,\ldots,m$, *пусть* $\xi\in\mathbb{A}\setminus\{0\}$. *Тогда* $m+2$ *числа* $A_0(\xi)$, $A_0'(\xi)$, $A_1(\xi),\ldots,A_m(\xi)$ *алгебраически независимы.*

Сначала рассмотрим несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Если* $\lambda,\nu\in\mathbb{C}$, $\nu\notin\mathbb{Z}$, $\nu-\lambda\notin\mathbb{Z}$, *и* y — *произвольное нетривиальное решение дифференциального уравнения* (2), *то функции* y *и* y' *алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$. (См. [1], стр. 224, Лемма 7.)

Лемма 2. *Если* $\lambda,\nu\in\mathbb{C}$, $\nu\notin\mathbb{Z}$, $\nu-\lambda\notin\mathbb{Z}$, $P=P(y_0,\bar{y}_0,z)\in\mathbb{C}[y_0,\bar{y}_0,z]$, $P\not\equiv0$ и D — *дифференциальный оператор* (5), *связанный с уравнением* (2)

$$\left(D=\frac{\partial}{\partial z}+\bar{y}_0\frac{\partial}{\partial y_0}+\left(\frac{\nu}{z}y_0+\frac{z-\lambda}{z}\bar{y}_0\right)\frac{\partial}{\partial\bar{y}_0}\right),$$

то многочлен zDP *может делиться на многочлен* P *как многочлен от трех независимых переменных тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$P=\sigma z^b,\quad \sigma\in\mathbb{C},\quad \sigma\neq0,\quad b\in\mathbb{Z}^+. \tag{6}$$

Доказателство Леммы 2 совпадает с доказательством Леммы 6 в книге [1], стр. 222.

Лемма 3. *Если* $\lambda,\nu\in\mathbb{C}$, $\nu\notin\mathbb{Z}$, $\nu-\lambda\notin\mathbb{Z}$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, *а* y — *любое нетривиальное решение дифференциального уравнения* (2), *то функции* y, y' *и* $e^{\alpha z}$ *алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство совпадает с доказательством Леммы 7, [1], стр. 223, только вместо Леммы 6, [1], стр. 222, надо применить нашу Лемму 2.

Лемма 4. *Пусть* $\lambda\in\mathbb{Q}$, $\nu\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, *так что* $-\lambda\notin\mathbb{Z}^+$, $\nu-\lambda\notin\mathbb{Z}$, *пусть* $\mu_i\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $i=1,\ldots,m$, *так, что* $\nu-\mu_i\notin\mathbb{N}$, $\mu_i-\lambda\notin\mathbb{Z}^+$, $\mu_i-\mu_j\notin\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $i,j=1,\ldots,m$. *Тогда* $m+2$ *функции* A_0, A_0', $A_1,\ldots,A_m$ *алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство. Схема доказательства совпадает с доказательством Леммы 4 книги [1], стр. 241. Применим индукцию по m. Если $m=0$, то лемма справедлива по Лемме 1. Предположим, что лемма выполняется при $m=n-1$, $n\in\mathbb{N}$, и докажем, что тогда ее утверждение справедливо и для $m=n$. Допустим противное. Тогда существует неприводимый многочлен $P=$

$= P(y_n, \ldots, y_1, y_0, \bar{y}_0, z) \in \mathbb{C}[y_n, \ldots, y_1, y_0, \bar{y}_0, z]$, содержащий y_n и такой, что

$$(7) \qquad P(A_n(z), \ldots, A_1(z), A_0(z), A_0'(z), z) = 0 .$$

По предположению индукции степень трансцендентности функций $A_0, A_0', A_1, \ldots$ $\ldots, A_n$ над $\mathbb{C}(z)$ равна $n + 1$ и эти функции связаны алгебраическим уравнением (7). Поэтому по Лемме 4, гл. 5 книги [1], стр. 191, многочлен zDP делится на многочлен P как многочлен от $n + 3$ независимых переменных, и существует функция $w \in \mathbb{C}(z)$ такая, что $zDP \equiv \omega P$. Сравнивая степени zDP и P по z и по $y_n, \ldots, y_1, y_0, \bar{y}_0$ убеждаемся в том, что $\omega = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$. Итак

$$(8) \qquad zDP \equiv (az + b)\, P .$$

Покажем, что $a = 0$. Пусть

$$Qy_n^{s_n} \ldots y_1^{s_1}\,, \quad Q \in \mathbb{C}[y_0, \bar{y}_0, z]\,, \quad Q \not\equiv 0$$

— старший член $P \in \mathbb{C}[y_0, \bar{y}_0, z]\,[y_n, \ldots, y_1]$. Приравнивая в тождестве (8) коэффициенты при старших членах, получим

$$(9) \qquad zDQ \equiv (az + b + \sum_{i=1}^{n} \mu_i s_i)\, Q .$$

По Лемме 2 $Q \equiv \sigma_1 z^{b_1}$, $\sigma_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b_1 \in \mathbb{Z}^+$. Оттуда $zDQ \equiv \sigma_1 b_1 z^{b_1}$. Подставляя Q и zDQ в тождество (9), получим, сократив на $\sigma_1 z$

$$b_1 \equiv az + b + \sum_{i=1}^{n} \mu_i s_i .$$

Итак

$$a = 0\,, \quad b + \sum_{i=1}^{n} \mu_i s_i = b_1 \in \mathbb{Z}^+ .$$

Тождество (8) примет вид

$$(10) \qquad zDP \equiv bP .$$

Представим P следующим образом:

$$P = P_l y_n^l + P_{l-1} y_n^{l-1} + \ldots + P_0\,, \quad P_l P_0 \not\equiv 0\,, \quad l \geqq 1\,,$$

$$P_i \in \mathbb{C}[y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0, \bar{y}_0, z]\,, \quad i = 0, 1, \ldots, l .$$

Как и в доказательстве Леммы 4 книги [1], стр. 242—3 (с заменой λ_n на μ_n) получаем $l = 1$, $P = P_1 y_n + P_0$, $b + \mu_n = p \in \mathbb{Z}^+$, и

$$(11) \qquad c_1 z^p y_{n-1} + zDP_0 - (p - \mu_n)\, P_0 \equiv 0\,, \quad c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} .$$

При применении оператора zD к многочлену P_0 каждая совокупность всех однородных членов заданной степени по $y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0, \bar{y}_0$ переходит в совокупность таких же членов или нуль. Из тождества (11) следует, что в P_0 входит совокупность членов первой степени по $y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0, \bar{y}_0$. Обозначим ее R, $R \not\equiv 0$. Тогда из тождества (11) имеем

$$c_1 z^p y_{n-1} + zDR - (p - \mu_n) R \equiv 0 , \tag{12}$$

откуда следует, что y_{n-1} входит в R. Докажем, что тождество (12) противоречиво. Возможны два случая.

А. $n = 1$. В этом случае

$$R = Q_0 y_0 + \bar{Q}_0 \bar{y}_0 , \quad Q_0, \bar{Q}_0 \in \mathbb{C}[z] , \quad Q_0 \not\equiv 0$$

и

$$zDR = (zQ_0' + \nu \bar{Q}_0) y_0 + (z\bar{Q}_0' + zQ_0 + (z - \lambda) \bar{Q}_0) \bar{y}_0 .$$

Сравнивая в тождестве (12) коэффциенты при y_0 и $\bar{y}_0$, получим

$$c_1 z^p + \nu \bar{Q}_0 + zQ_0' - (p - \mu_1) Q_0 \equiv 0 , \tag{13}$$

$$zQ_0 + z\bar{Q}_0' + (z + \mu_1 - \lambda - p) \bar{Q}_0 \equiv 0 . \tag{14}$$

Из (14) вытекает, что $\bar{Q}_0 \not\equiv 0$, так как в противном случае $Q_0 \equiv 0$ и что $\deg Q_0 = \deg \bar{Q}_0 = r \in \mathbb{Z}^+$. Если $r \neq p$, то получим противоречие из (13). Это ясно в случае, когда $p > r$. Пусть $p < r$, $Q_0 = a_r z^r + \ldots + a_0$, $\bar{Q}_0 = b_r z^r + \ldots + b_0$. Тогда приравнивая коэффициенты при z^r в (13) и при z^{r+1} в (14), получим

$$r a_r + \nu b_r - (p - \mu_1) a_r = 0 , \quad a_r + b_r = 0 ,$$

откуда $a_r(r - \nu - p + \mu_1) = 0$. Тогда $\nu - \mu_1 = r - p \in \mathbb{N}$, что противоречит условиям леммы. Далее, $\mu_1 - \lambda \notin \mathbb{Z}^+$, итак, $\mu_1 - \lambda - p \neq 0$. Следуя (14), $z \mid \bar{Q}_0$. Поэтому $p = \deg Q_0 = \deg \bar{Q}_0 \geqq 1$ и, так как $p - \mu_1 \neq 0$, из (13) вытекает $z \mid Q_0$. Запишем $Q_0 = z^t Q$, $\bar{Q}_0 = z^u \bar{Q}$, $t, u \in \mathbb{N}$, $t, u \leqq p$, $Q, \bar{Q}$ не делятся на z. Тогда, подставляя $Q_0' = tz^{t-1}Q + z^t Q'$, $\bar{Q}_0' = uz^{u-1}\bar{Q} + z^u \bar{Q}'$ в (13), получим

$$c_1 z^p + \nu z^u \bar{Q} + tz^t Q + z^{t+1} Q' - (p - \mu_1) z^t Q = 0 . \tag{15}$$

Предполагая, что $t < u \leqq p$, сократив (15) на z^t, получим

$$c_1 z^{p-t} + \nu z^{u-t} \bar{Q} + tQ + zQ' - (p - \mu_1) Q = 0 .$$

Итак, $z \mid (p - t - \mu_1) Q$, откуда $\mu_1 = p - t \in \mathbb{N}$, что противоречиво. Если $u < t \leqq p$, точно так же получаем

$$c_1 z^{p-u} + \nu \bar{Q} + tz^{t-u} Q + z^{t+1-u} Q' - (p - \mu_1) z^{t-u} Q = 0 ,$$

т.е. $z \mid \nu Q$, что невозможно. Итак $u = t$ и из (14) вытекает

$$z^{t+1} Q + tz^t \bar{Q} + z^{t+1} \bar{Q}' + (z + \mu_1 - \lambda - p) z^t \bar{Q} = 0$$

и после сокращения на z^t

$$z(Q + \bar{Q}' + \bar{Q}) + (t + \mu_1 - \lambda - p) \bar{Q} = 0 ,$$

т.е. $z \mid (t + \mu_1 - \lambda - p)\, Q$, но это невозможно, так как по условиям леммы $\mu_1 - \lambda \neq p - t \in \mathbb{Z}^+$.

Б. $n > 1$. В этом случае

$$R = Q_{n-1} y_{n-1} + \dots + Q_0 y_0 + \bar{Q}_0 \bar{y}_0, \quad Q_{n-1} \not\equiv 0,$$

$$\bar{Q}_0 \in \mathbb{C}[z], \quad Q_i \in \mathbb{C}[z], \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$zDR = (zQ'_{n-1} - \mu_{n-1} Q_{n-1})\, y_{n-1} +$$

$$+ (Q_{n-1} + zQ'_{n-2} - \mu_{n-2} Q_{n-2})\, y_{n-2} + \dots$$

$$\dots + (Q_1 + zQ'_0 + \nu \bar{Q}_0)\, y_0 + (z\bar{Q}'_0 + zQ_0 + (z - \lambda)\, \bar{Q}_0)\, \bar{y}_0 .$$

Сранивая в тождестве (12) коэффициенты при $y_{n-1}, \dots, y_1, y_0, \bar{y}_0$ получим систему тождеств

$$\begin{aligned}
(16) \qquad & c_1 z^p + zQ'_{n-1} - (p + \mu_{n-1} - \mu_n)\, Q_{n-1} \equiv 0, \\
& Q_{n-1} + zQ'_{n-2} - (p + \mu_{n-2} - \mu_n)\, Q_{n-2} \equiv 0, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& Q_2 + zQ'_1 - (p + \mu_1 - \mu_n)\, Q_1 \equiv 0, \\
& Q_1 + \nu \bar{Q}_0 + zQ'_0 - (p - \mu_n)\, Q_0 \equiv 0, \\
& zQ_0 + z\bar{Q}'_0 + (z + \mu_n - \lambda - p)\, \bar{Q}_0 \equiv 0 .
\end{aligned}$$

Возможны два подслучая. 1) $\mu_i - \mu_n \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Интегрируя первое из уравнений (16), находим

$$Q_{n-1} = \frac{c_1 z^p}{\mu_{n-1} - \mu_n} + c_{n-1} z^{p + \mu_{n-1} - \mu_n}, \quad c_{n-1} \in \mathbb{C} .$$

Но $p + \mu_{n-1} - \mu_n \notin \mathbb{Z}$. Поэтому $c_{n-1} = 0$ и

$$Q_{n-1} = \gamma_{n-1} z^p, \quad \gamma_{n-1} = \frac{c_1}{\mu_{n-1} - \mu_n} \neq 0 .$$

Подставляя найденное значение Q_{n-1} во вторoе из тождеств (16), аналогично получим

$$Q_{n-2} = \gamma_{n-2} z^p, \quad \gamma_{n-2} = \frac{c_1}{(\mu_{n-2} - \mu_n)(\mu_{n-1} - \mu_n)} \neq 0 .$$

Продолжая этот процесс, приходим к равенству

$$Q_1 = \gamma_1 z^p, \quad \gamma_1 \neq 0 .$$

Но тогда последнее два тождества (16) принимают вид (13), (14) (с заменой c_1 на γ_1) и поэтому противоречивы.

2) r – наибольшее число, для которого $\mu_r - \mu_n = 0$, $1 \leqq r \leqq n - 1$. Тогда получим противоречие точно так же, как в книге [1], стр. 244–245 (с заменой λ_i на μ_i). Последними двумя тождествами (16) в этом подслучае не пользуемся.

Итак, тождество (12) всегда противоречиво и утверждение леммы выполняется для значения $m = n$ а по индукции и для любого значения m.

Доказательство теоремы. Все функции $A_0, A_0', A_1, \ldots, A_m$ очевидно гипергеометрические E-функции, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений (4) и по Лемме 4 алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Для системы (4) $T(z) = z$ и $\xi\, T(\xi) = \xi^2 \neq 0$. Итак, по второй основной теореме книги [1], стр. 127, имеет место утверждение теоремы.

Литература

[1] *Шидловский А. Б.:* Трансцендентные числа, Москва, Наука 1987.

Souhrn

O ALGEBRAICKÉ NEZÁVISLOSTI HODNOT NĚKTERÝCH E-FUNKCÍ

JIŘÍ ČÍŽEK

Buďte dána čísla $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\nu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\mu_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, m$, taková, že $-\lambda \notin \mathbb{Z}^+$, $\nu - \lambda \notin \mathbb{Z}$, $\nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$, $\mu_i - \lambda \notin \mathbb{Z}^+$, $\mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Označme A_0 Kummerovu funkci

$$A_0(z) = A_{\lambda,\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu, n]}{n!\,[\lambda, n]}\, z^n$$

a dále

$$A_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu, n]\, z^n}{n!\,[\lambda, n]\,(\mu_1 + n)\ldots(\mu_k + n)}\,, \quad k = 1, \ldots, m\,,$$

kde $[\alpha, n] = \alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n - 1)$. V práci je ukázáno, že funkce $A_0, A_0', A_1, \ldots$ $\ldots, A_m$ jsou algebraicky nezávislé nad $\mathbb{C}(z)$. Podle známé základní věty o algebraické nezávislosti hodnot E-funkcí jsou algebraicky nezávislá čísla $A_0(\xi), A_0'(\xi), A_1(\xi), \ldots$ $\ldots, A_m(\xi)$, pro každé algebraické číslo $\xi \neq 0$.

Summary

ON THE ALGEBRAIC INDEPENDENCE OF THE VALUES OF SOME E-FUNCTIONS

JIŘÍ ČÍŽEK

Let λ, ν, μ_i, $i = 1, \ldots, m$, be rational numbers such that $\nu \notin \mathbb{Z}$, $\mu_i \notin \mathbb{Z}$, $-\lambda \notin \mathbb{Z}^+$, $\nu - \lambda \notin \mathbb{Z}$, $\nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$, $\mu_i - \lambda \notin \mathbb{Z}^+$, $\mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Let A_0 be the Kummer's function

$$A_0(z) = A_{\lambda,\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu, n]\, z^n}{n!\, [\lambda, n]}$$

and let

$$A_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu, n]\, z^n}{n!\, [\lambda, n]\, (\mu_1 + n) \ldots (\mu_k + n)}, \quad k = 1, \ldots, m\,,$$

where $[\alpha, n] = \alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)$. It is proved that the functions A_0, A_0', $A_1, \ldots, A_m$ are algebraically independent over $\mathbb{C}(z)$. By the well-known fundamental theorem on the algebraic independence of the values of E-functions for every algebraic number $\xi \neq 0$, the numbers $A_0(\xi), A_0'(\xi), A_1(\xi), \ldots, A_m(\xi)$ are algebraically independent, too.

Author's address: katedra matematiky, VŠSE, Nejedlého sady 14, 306 14 Plzeň.