

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Ladislav Franc

Fyzikální rozbor hlavních elektromechanických analogií

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
4 (1963), No. 1, 101--127

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119806>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1963

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra experimentální fyziky a metodiky fyziky přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. Paed. Dr. Josef Fuka*

FYZIKÁLNÍ ROZBOR HLAVNÍCH ELEKTROMECHANICKÝCH ANALOGIÍ

LADISLAV FRANČ

(Předloženo dne 15. října 1962)

Úvod: Elektromechanickými analogiemi nazýváme, jak známo, takové jevy mechanické a elektrické, jejichž matematická nebo i grafická řešení jsou totožná. Totožnost matematického řešení je kritériem analogie.

Abyste mohli mít elektromechanické analogie hlubší význam, tj. aby co možná logicky ukazovaly na obdobu dějů elektrických a mechanických bylo by třeba, aby i fyzikální podstaty matematicky totožně vyjádřených jevů byly analogické. Účelem studie je hodnotit, do jaké míry je fyzikální podobnost splněna u některých hlavních analogií. Je třeba poznamenat, že velkou úlohu má praktická potřeba najít matematicky shodná řešení mezi jevy mechanickými a elektrickými. Tato praktická potřeba je podmíněna tím, že některý z obou fyzikálních oborů je nebo v dané době byl pokročilejší v matematickém vyjádření a řešení nějakého jevu a druhý obor může nebo mohl jeho způsob potom prostě převzít. Např. mechanika převzala řešení kmitavých elektrických obvodů pro řešení kmitavých obvodů mechanických a akustických. Naopak elektrotechnika převzala z mechaniky počtářské i grafické metody určování ohybových momentů u nosníků a určuje stejným způsobem úbytky napětí v elektrických vedeních.

Požadavek, aby analogie se projevila nejen v matematickém vyjádření, ale i v soustavách fyzikálních pojmů, veličin a hlavně v podstatách fyzikálních jevů, je ležce pochopitelný. Vždyť pouze fyzikální analogie dovede nás ke správné analogii matematického vyjádření. Naopak, čistě formální podobnost či totožnost matematických vzorců pro rozdílné fyzikální jevy je věc náhodná, může usnadnit matematické řešení, ale může také snadno svést toto řešení na seestí.

Fyzikální analogie by vyžadovala, aby i mezi příslušnými veličinami a pojmy mechanickými a elektrickými platila analogie — např. potenciální energii mechanické aby odpovídala potenciální energii elektrická, mechanickým veličinám kinetického rázu (jako např. rychlost), aby odpovídaly opět elektrické veličiny stejného rázu (jako je např. proud) atp.

Je samozřejmá snaha, abychom získali co nejvíce analogií, které by ukazovaly cestu matematického řešení ve druhém fyzikálním odvětví, a to vede k tomu, že volíme podle potřeby různé soustavy analogických veličin. Pro každý případ analogie můžeme navrhnout a sestavit soustavu co nejvhodnější.

V důsledku toho se přiřazení veličin elektrických a mechanických od případu k případu různí a fyzikální vhodnost analogií je proto rozdílná.

V této studii rozeznáváme v elektrických i v mechanických okruzích tyto pojmy a hlavní druhy veličin:

- a) charakteristické veličiny energie
- b) nositele energie
- c) řazení nositelů energie

Charakteristické veličiny elektrické energie jsou napětí a proud. Charakteristické veličiny mechanické energie jsou síla a rychlost. Elektrické napětí a mechanická síla jsou veličiny rázu statického, elektrický proud a rychlost těles jsou veličiny rázu dynamického. Naproti tomu můžeme uvést paralelu, že elektrické napětí a rychlost těles vztahujeme a měříme vždy mezi dvěma místy, kdežto elektrický proud a síla, působící na těleso mohou působit a můžeme je měřit jen v jediném průřezu.

Nositelé elektrické energie jsou kondenzátor, jako nositel statické nebo potenciální energie, utajené v jeho elektrickém poli a cívka, jako nositel kinetické energie, utajené v jejím magnetickém poli. V mechanice tomu odpovídá pružina nebo vlastní pružnost tělesa pro energii statickou a hmota pohybujícího se tělesa pro energii kinetickou.

Řazení těchto nositelů energie může být v obou případech sériové nebo paralelní a kromě nositelů energie vyskytuje se v obou druzích obvodu odpor — a to buď odpor elektrický nebo odpor mechanický; mechanický odpor je reprezentovaný buď třením, nebo odporem umělým. [1]

Provedme si nyní rozbor několika neznámějších případů elektromechanických analogií.

1. Elektrický kmitavý obvod — mechanický kmitavý obvod.

Velice dobře známá a také po stránce fyzikální dokonalá je elektromechanická analogie mezi elektrickým kmitavým obvodem a mechanickým kmitavým obvodem s nositeli energie zařazenými do série (obr. 1a, 1b).

Z náčrtů vyplývá, že napětí U , kterým nabijeme kondenzátor C , odpovídá v mechanickém obvodu síla F_0 , která stlačí pružinu. Kapacitě kondenzátoru C odpovídá poddajnost pružiny C_m a náboji Q odpovídá největší výchylka y_0 .

Jestliže energie nabitého kondenzátoru je dána vzorcem

$$W_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2, \quad (1)$$

tedy energie stlačené pružiny je dána obdobně vzorcem

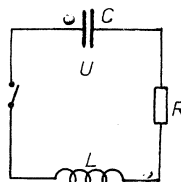
$$W_m = \frac{1}{2} y_0 F_0 = \frac{1}{2} C_m F_0^2, \text{ neboť } y_0 = C_m F_0. \quad (1a)$$

Okamžité hodnoty těchto veličin během kmitání jsou u a q pro veličiny elektrické a F a y pro veličiny mechanické.

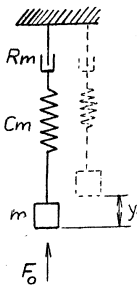
Poddajnost pružiny C_m je převrácená hodnota konstanty pružiny, tj. $C_m = \frac{1}{k}$ (kde k značí sílu potřebnou k tomu, aby se pružina protáhla nebo stlačila o 1 m). Znamená to tedy měrné stlačení, způsobené jednotkovou silou.

Zapnutím spínače vzniknou v oscilačním obvodu elektrické kmity o okamžité hodnotě proudu i . Uvolněním stlačené pružiny se rozkmitá hmota m mechanického obvodu. Oboje kmitání má v závislosti na čase sinusový průběh. Náboj na kondensátoru se periodicky mění v dynamickou formu elektrické energie, tj. proud i a stlačení pružiny se periodicky mění v kmitavý pohyb hmoty m . Platí známý vzorec, že

$$i = \frac{dq}{dt}, \text{ kde } q = Q \sin \omega t.$$



Obr. 1a.



Obr. 1b.

Podobně okamžitá rychlost kmitání v mechanickém obvodě $v = \frac{dy}{dt}$, kde $y = y_0 \sin \omega t$. Změně proudu $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ odpovídá zrychlení $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = a$.

Dále je možné uvést analogii mezi indukčností L a hmotou m mezi odporem elektrickým R a odporem mechanickým R_m .

Dokonalá analogie se projevuje i v řešení známých diferenciálních rovnic, které matematicky vyjadřují složky napětí a složky síly v obou obvodech.

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} + R_m \frac{dy}{dt} + \frac{y}{C_m} = 0. \quad (2), (2a)$$

V okamžiku, kdy prochází částice rovnovážnou polohou, se dosahuje největší energie kinetické, obdobně jako při vybitém kondenzátoru je největší energie magnetického pole.

Analogické vzorce pro kinetické formy energie jsou:

$$W_e = \frac{1}{2} LI^2, \quad W_m = \frac{1}{2} mv_0^2. \quad (3), (3a)$$

Průběhem kmitů, kdy jedna forma energie přechází ve druhou, platí analogie mezi vzorci

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2} Li^2 = \text{konst.}, \quad \frac{1}{2} yF + \frac{1}{2} mv^2 = \text{konst.} \quad (4), \quad (4a)$$

Obdobu mezi kmitavým obvodem elektrickým a kmitavým obvodem mechanickým lze rozšířit i na pojmy impedance a reaktance, neboť

vzorec $Z = \frac{U}{I}$ odpovídá pro mechanický obvod $Z_m = \frac{F_0}{v_0}$ (mechanická impedance)

vzorec $X_c = \frac{1}{\omega C}$ odpovídá pro mechanický obvod $X_m = \frac{1}{\omega C_m}$ (mechanická reaktance)

vzorec $X_L = \omega L$ odpovídá pro mechanický obvod $X_m = \omega m$ (mech. reaktance)

a dokonce možno odvodit i totožný vzorec pro fázový posuv. Pro elektrický obvod je $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ a podobně i $\cos \varphi_m = \frac{R_m}{Z_m}$.

Pro mechaniku bylo převzato i řešení střídavých obvodů symbolickým počtem. Jestliže pro elektrický obvod píšeme podle druhého Kirchhoffova zákona

$$U = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I. \quad (5)$$

potom pro mechanický obvod můžeme psát analogicky

$$F_0 = \left(R_m + j\omega m + \frac{1}{j\omega C_m} \right) v_0. \quad (5a)$$

Vlastní frekvence kmitů vzniklých v oscilačním obvodu je podle známé Thomsonovy rovnice $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ a doba kmitu

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (6)$$

Podobná rovnice se dá odvodit i pro mechanický obvod kmitavý, kde

$$T = 2\pi\sqrt{mC_m}. \quad (6a)$$

Elektromechanická analogie je dále mezi útlumem v obou kmitavých obvodech a mezi úkazy rezonančními. Pro tlumené kmity elektrické je amplituda obecného kmitu

kde $Q e^{-\delta t}$,

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (7)$$

nebo v mechanice $y_0 e^{-\delta t}$, kde

$$\delta = \frac{Rm}{2m}. \quad (7a)$$

Podíl dvou sousedních amplitud je $e^{\delta T}$ nebo $e^{\delta T}$; oba exponenty se nazývají logaritmickým dekrementem útlumu. Elektromechanická analogie se však týká jen onoho kmitavého obvodu, v němž mechanický odpor tlumící je úměrný rychlosti v a tlumící síla $F = R_m \frac{dy}{dt}$.

R_m zde tedy není vlastním třením (sílou), ale jen konstantou úměrnosti podobně jako elektrický odpor R je konstantou v Ohmově zákona $AU = R \frac{dQ}{dt}$.

Přehled analogických veličin a vzorců můžeme sestavit do tab. I.

Zdálo by se, že uvedená analogie je ideální a že analogická jsou nejen řešení matematická, ale i děje fyzikální v širokém okruhu. Soustava přidružených

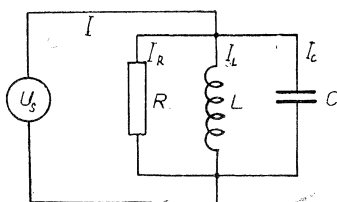
Tabulka I

Poř. čís.	Kmitavý obvod elektrický	Kmitavý obvod mechanický
1	náboj Q	max. výchylka y_0
2	náboj $q = Q \sin \omega t$	výchylka $y = y_0 \sin \omega t$
3	proud $i = \frac{dq}{dt} = \omega Q \cos \omega t$	rychlost $v = \frac{dy}{dt} = \omega y_0 \cos \omega t$
4	změna proudu $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt} = \omega^2 Q \sin \omega t$	zrychlení $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \omega^2 y_0 \sin \omega t = a$
5	napětí U	síla F_0
6	napětí $u = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$	síla $F = ma$
7	napětí $u = Ri = R \frac{dq}{dt}$	síla (tření) $= Rmv = Rm \frac{dy}{dt}$
8	napětí $\frac{q}{C}$	síla $\frac{y}{Cm}$
9	kapacita C	poddajnost pružiny $Cm = \frac{1}{k}$
10	indukčnost L	hmota m
11	odpor R	mech. odpor Rm
12	energie magnet. pole $\frac{1}{2} LI^2$	energie polybová $\frac{1}{2} mv^2$
13	energie elektr. pole $\frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CU^2$	energie potenciální $\frac{1}{2} F_0 y_0 = \frac{1}{2} Cm F_0^2$
14	doba kmitu $T = 2\pi\sqrt{LC}$	doba kmitu $T = 2\pi\sqrt{mCm}$
15	log. dekrement útlumu $\frac{RT}{2L}$	log. dekrement útlumu $\frac{RmT}{2m}$

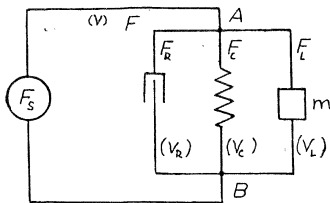
veličin je logická a uspokojuje dobře i naše fyzikální cítění, neboť analogické jsou složky charakteristických veličin rázu statického — tedy dílčí napětí a dílčí síly (poř. č. 5—8 tab. I) a na druhé straně rázu dynamického tedy dílčí proudy a rychlosti, resp. změna proudu a zrychlení (poř. č. 3—4 tab. I).

Nesnáze však nastanou, kdybychom chtěli tuto analogii aplikovat na obvody paralelní (obr. 2a, 2b).

U paralelního obvodu elektrického sečítáme proudy v jednotlivých větvích



Obr. 2a.



Obr. 2b.

a obdobně bychom měli sečítat rychlost v_r , v_c a v_l v jednotlivých větvích paralelního obvodu mechanického. Je však zřejmo, že celková rychlost v , kterou vyvinuje generátor mechanických kmitů F_s , nemůže být součtem rychlostí jednotlivých paralelních větví, neboť by došlo k porušení mechanické souvislosti obvodu následkem různých rychlostí před uzly A a B a za nimi, jedná-li se o skutečný mechanický obvod a ne snad jen o jeho schéma.

Sečítat můžeme v tomto případě jen dílčí síly, neboť je zřejmé, že celková síla, vyvinutá zdrojem F_s je součtem dílčích sil $F_r + F_c + F_l$. Zde tedy uvedená analogie selhává a rozpory překenují se dvěma způsoby [2, 3]:

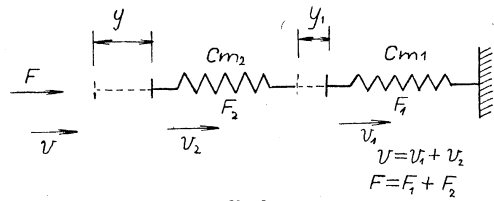
a) Necháme v platnosti analogii podle tab. I. Mechanické obvody však rozdělíme principiálně na obvody, ve kterých sečítáme rychlosti, jsou to sku-

tečné mechanické obvody sériové — a na obvody ve kterých sečítáme síly — jsou to skutečné mechanické obvody paralelní.

Z obr. 3a je zřejmé, že působením síly F vznikne celkové stlačení obou pružin (poddajností C_m) y . Pružina C_{m1} byla stlačena o výchylku y_1 , kdežto výchylka y_2 je určena nepřímo jako rozdíl výchylek: $y_2 = y - y_1$. Rovnice se dá ovšem upravit na $y = y_1 + y_2$.

Poněvadž rychlost $v_1 = \frac{dy_1}{dt}$ a rychlost $v_2 = \frac{dy_2}{dt}$, lze psát také $\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt}$ nebo $v = v_1 + v_2$. Je tedy správné v sériovém obvodu mechanickém, ať je složen z jakýchkoliv prvků, sečítat rychlosti. Naopak v mechanickém obvodu paralelním sečítáme síly, jak je patrné z obr. 3b.

Přidržíme se stále zásady, že přidružovat máme k sobě jednak veličiny rázu statického — tedy napětí a síly a na druhé straně veličiny rázu dynamického tedy proudy a rychlosti. Potom však musíme přidružovat sériovým obvodům elektrickým (kde sečítáme dílčí napětí) mechanické obvody paralelní (kde sečítáme dílčí síly)



Obr. 3a.

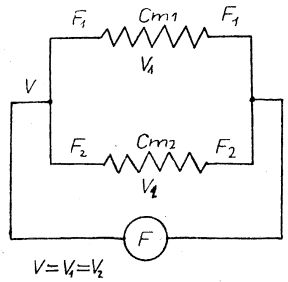
a elektrickým obvodům paralelním (kde sečítáme dílčí proudy) mechanické obvody sériové (kde sečítáme dílčí rychlosti).

Matematicky zůstávají vzorce identické, avšak fyzikálně zde dochází k určitému protikladu. Např. elektrickému obvodu sériovému podle obr. 4, kde jsou v sérii dva kondenzátory C_1 a C_2 , odpovídá mechanický obvod 3b, kde jsou dvě pružiny C_m paralelně.

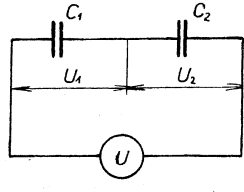
Síle $F = F_1 + F_2 = \frac{y}{C_{m1}} + \frac{y}{C_{m2}}$ odpovídá napětí $U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$.

Takto lze snadno analogicky seřazovat soustavy, které mají jen dva prvky, ať jsou spojené sériově nebo paralelně.

Při obvodech složených z více prvků vzniká další odchylka od přesné analogie způsobená v podstatě tím, že mechanická síla je veličina působící a měřitelná v jediném bodě, zatím co elektrické napětí je měřitelné a působí vždy mezi dvěma body.

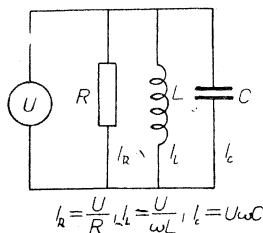


Obr. 3b.

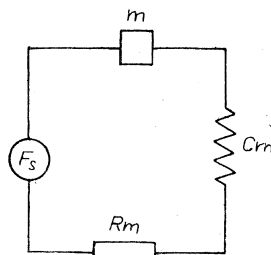


Obr. 4.

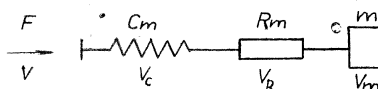
Proto paralelní obvod elektrický, který obsahuje jak indukčnost, tak i kapacitu a odpor můžeme nakreslit jediné podle obr. 5a. Avšak analogický obvod mechanický, který obsahuje nositele energie hmotu, pružinu a odpor spojené do série, může být volný podle obr. 5b nebo s protiakcí podle obr. 5c. Tento obvod můžeme dále převést na schéma podle obr. 5d.



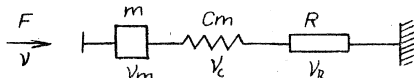
Obr. 5a.



Obr. 5d.



Obr. 5b.



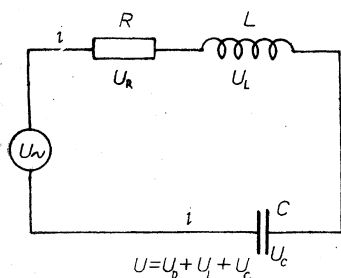
Obr. 5c.

Podobně sériový obvod elektrický podle obr. 6a by měl mít analogický paralelní obvod mechanický podle obr. 6b. Avšak stěží lze sestavit takový mechanický obvod, neboť zatímco větve R_m a C_m lze stlačovat a tím i měnit vzdálenost bodů A a B , nelze tak učinit u větve m . Proto také mechanické spojení je stěží uskutečnitelné a ekvivalentní mechanické schéma, pro něž platí obdobná pohybová rovnice jako pro obvod elektrický je podle obr. 6c. Periodický pohyb bodů A a B , vzniklý kmitáním pružiny, způsobuje, že i hmota m se rozkmitá a pohybová rovnice zůstává nezměněna.

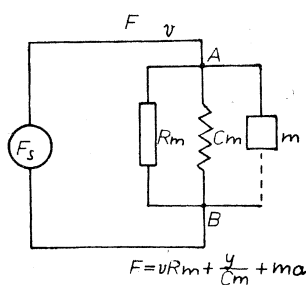
Sestavit analogický elektrický obvod k danému obvodu mechanickému je ve složitých případech obtížné a není vždy ani jednoznačné, jak je možné pochopit i z uvedených příkladů: Např. mechanické schéma 6b je za určitých předpokladů uskutečnitelné. Potom by však elektrickému schématu 6a mohlo odpovídat jak schéma 6b, tak i schéma 6c.

Při rozboru mechanických obvodů postupujeme jednak podle dříve zmíněné zásady, že prvky, na které působí stejná síla řadíme sériově, a sečítáme jejich rychlost, prvky, které mají stejnou rychlost řadíme paralelně a sečítáme síly na ně působící. Kromě toho aplikujeme i na mechanické obvody zákon Ohmův a zákony Kirchhoffovy. Mechanický zákon Ohmův je dán vzorcem $v = \frac{F}{Z_m}$.

První zákon Kirchhoffův pro mechanické obvody lze snadno odvodit z obr. 3b, kde celková síla $F = F_1 + F_2$, nebo $F - F_1 - F_2 = 0$, nebo $\Sigma F = 0$.



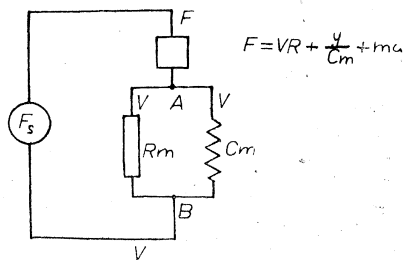
Obr. 6a.



Obr. 6b.

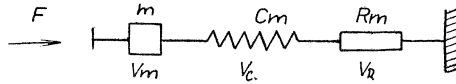
Druhý zákon Kirchhoffův lze opět snadno odvodit z obr. 3a, kde celková rychlost $v = v_1 + v_2$ nebo $v - v_1 - v_2 = 0$, nebo $\Sigma v = 0$. Kromě toho platí pro obdobu zásada, že změní-li se v obvodu mechanickém rychlost, musí v analogickém obvodu elektrickém dojít k rozvětvení proudu.

Analogický obvod elektrický stanovíme komplexním rozbořem obvodu mechanického podle všech uvedených zásad a rozdělujeme ho při tom na dílčí celky podle toho, zda mají stejnou nebo různou rychlost. Obvod na obr. 7a je sice pod vlivem společné síly, je to mechanický obvod sériový, jemuž by odpovídal analogický elektrický obvod paralelní. Avšak hmota m má s druhou částí obvodu společnou

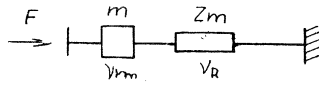


Obr. 6c.

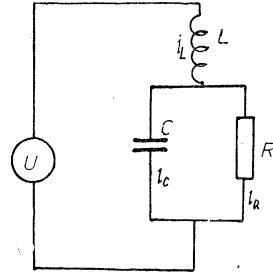
rychlost v_m a proto náhradní schéma obvodu je podle obr. 7b. V druhé části obvodu v impedanci Z_m se však změní rychlost z v_m na v_r a dále na v_r , a proto analogické prvky elektrické musí být řazeny paralelně, podle obr. 7c. Rychlosti v_m odpovídá



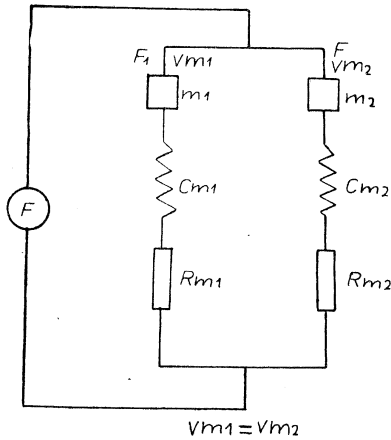
Obr. 7a.



Obr. 7b.



Obr. 7c.



proud i_L , který je součtem proudů i_C a i_R , podobně jako v_m je součtem rychlostí v_c a v_r . Podle stejných zásad je stanoveno i analogické schéma 8b mechanického obvodu 8a. Je zřejmé, že dokonalá fyzikální analogie je omezena pouze na obvody sériové. Chceme-li, aby soustava platila pro všechny obvody, musíme se spokojit tím, že řazení nositelů energie je různé pro obvody mechanické a pro obvody elektrické. Tím se stane, že sériovým obvodům elektrickým přiřazujeme paralelní obvody mechanické a naopak.

Obr. 8a.

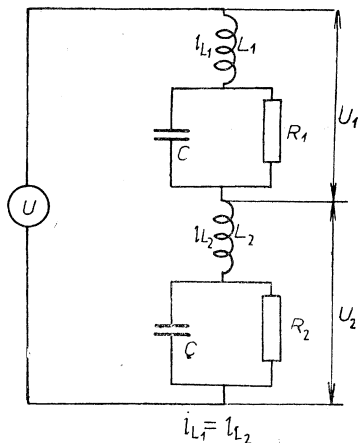
b) Druhý způsob, jak dosáhnout univerzálnosti elektromechanické analogie, která by se hodila jak pro kruhové obvody sériové, tak i paralelní, jest zvolit novou soustavu analogických veličin, která vyplývá i z obr. 2a a 2b. [1]

Dílečím proudům v jednotlivých větvích paralelního obvodu elektrického odpovídají dílečí síly v obvodu mechanickém. V sériovém obvodu elektrickém (obr. 9a) sečítáme dílečí napětí U_R , U_L a U_C , v sériovém obvodu mechanickém sečítáme dílečí rychlosti v_R , v_C , v_m . Matematicky vyjadřují skládání dílečích veličin v obvodech diferenciální rovnice.

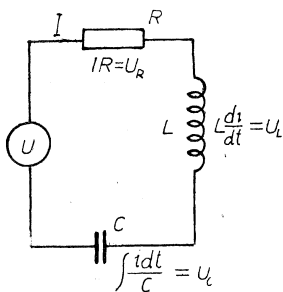
Pro obvody sériové můžeme psát rovnice takto:

pro obvod elektrický (sečítáme dílečí napětí)

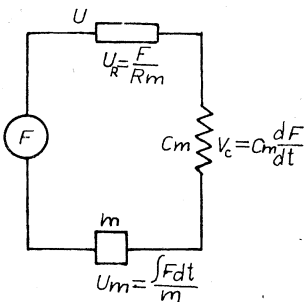
$$U = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{\int i dt}{C} \quad (8a)$$



Obr. 8b.



Obr. 9a.



Obr. 9b.

pro obvod mechanický (sečítáme dílí rychlosti)

$$v_0 = C_m \frac{dF}{dt} + \frac{F}{R_m} + \frac{fF}{m} \quad (8b)$$

Pro obvody paralelní platí tyto rovnice:
pro obvod elektrický (sečítáme dílí proudy)

$$I = \frac{fu}{L} + \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \quad (9a)$$

pro obvod mechanický (sečítáme dílí síly)

$$F = \frac{fv}{C_m} + vRm + m \frac{dv}{dt} \quad (9b)$$

Srovnáním členů těchto diferenciálních rovnic zjišťujeme, že analogickou veličinou pro indukčnost (cívku) L je poddajnost (pružina) C_m , pro elektrický odpor R převrácená hodnota mechanického odporu $\frac{1}{Rm}$, a pro kapacitu (kondenzátor) C je analogickou veličinou hmota m . Analogické veličiny a vzorce v této soustavě můžeme sestavit do tabulky II.

Tato soustava má tu výhodu, že řazení nositelů energie zůstává v mechanických obvodech stejná jako v obvodech elektrických — tzn., že sériovým obvodům elektrickým přiřazujeme opět sériové obvody mechanické a paralelním obvodům elektrickým paralelní obvody mechanické.

Z přehledu je však patrné, že daleko méně je výhodné a fyzikálně správně přiřazení charakteristických veličin energie. Příčině elektrického proudu — napětí U , přiřazujeme následek mechanické síly, tj. pohybovou veličinu. Naopak, následku napětí, elektrickému proudu I , přiřazujeme příčinu pohybu, tj. sílu F .

Můžeme dále pozorovat, že charakteristické veličině elektrické statického rázu — napětí U — přiřazujeme dynamický prvek v mechanice — rychlost v — a naopak charakteristické veličině elektrické dynamického rázu, proudu I přiřazujeme statický prvek mechanický — sílu F .

Poněvadž byly takto fyzikálně v protikladu přiřazeny charakteristické veličiny elektrické a mechanické energie jsou i vzorce pro energii potenciální a kinetickou v oboru elektřiny a mechaniky v protikladu (viz tab. II, č. 12. a 13).

Jako nový analogický pojem vystupuje impuls síly jako protějšek náboje Q (tab. II, č. 11).

Avšak výchylka y , definovaná jako $\int v dt$ by měla analogický výraz $\int u dt$ a zrychlení a definované jako $\frac{dv}{dt}$ by mělo analogický výraz $\frac{du}{dt}$. Zde fyzikální analogie selhává.

Nehledě k těmto fyzikálním protikladům jsou však matematicky obdobné vzorce totožné a tím je splněna praktická podmínka pro elektromechanickou analogii.

Tabulka II

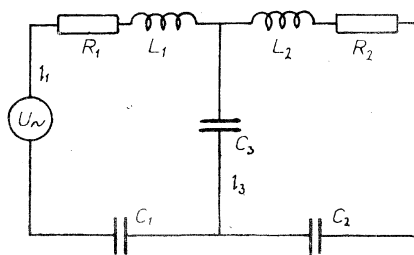
Poř. čís.	Kmitavý obvod elektrický	Kmitavý obvod mechanický
1	napětí U	rychlost v_0
2	napětí $u = L \frac{di}{dt}$	rychlost $v = C_m \frac{dF}{dt}$
3	napětí $u = iR$	rychlost $v = \frac{F}{R_m}$
4	napětí $u = \frac{fi}{C}$	rychlost $v = \frac{fF}{m}$
5	proud $i = \frac{fu}{L}$	síla $F = \frac{fv}{C_m} = \frac{dy}{C_m}$
6	proud $i = \frac{U}{R}$	síla $F = vR_m$
7	proud $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$	síla $F = m \frac{dv}{dt}$
8	kapacita C	hmota m
9	indukčnost L	poddajnost C_m
10	odpor R	převratná hodnota $\frac{1}{R_m} = G$ (mech. vodivost)
11	náboj $Q = \int i dt$	impuls síly $\int F dt = \int m dv$ (hybnost hmoty)
12	energie magnet. pole $\frac{1}{2} L I^2$	energie potenc. $\frac{1}{2} C_m F_0^2 = \frac{1}{2} y F_0$
13	energie elektr. pole $\frac{1}{2} C U^2$	energie pohybová $\frac{1}{2} m v_0^2$
14	doba kmitu $T = 2\pi\sqrt{LC}$	doba kmitu $T = 2\pi\sqrt{mC_m}$
15	log. dekrement útlumu $\frac{RT}{2L}$	log. dekrement útlumu $\frac{G_m T}{2C_m}$

Kdybychom zavedli ještě pojem mechanické vodivosti $G_m = \frac{1}{R_m}$ jako analogickou veličinu pro elektrický odpor R zůstal by i poslední vzorec tabulky č. II formálně identický.

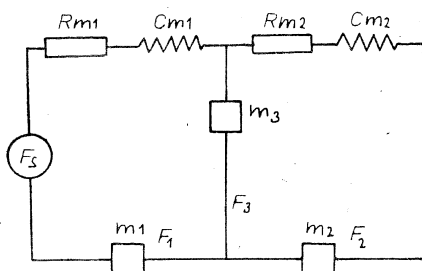
Poněvadž zde je dobrá fyzikální analogie mezi řazením prvků v obvodech a matematická identita vzorců, je tato soustava pro praxi vhodnější, nežli soustava první, a to i přes její ostatní nedostatky. Zvláště jedná-li se o obvody mechanické, vzájemně spojené některým prvkem jako prvkem vazebním, jeví se užití této soustavy výhod-

nější a jednodušší. V první soustavě by totiž transponování spřažených obvodů sériových na spřažené obvody paralelní bylo obtížnější a mohlo by vést k i omylům.

Např. dvěma elektrickým obvodům kmitovým s kapacitní vazbou podle obr. 10a odpovídá schéma obvodů mechanických s vazbou hmotovou podle obr. 10b.



Obr. 10a.



Obr. 10b.

Pro elektrické sdružené obvody můžeme napsat podle prvního Kirchhoffova zákona o součtu všech napětí v obvodu rovnice:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 + \frac{\int i_1 dt}{c_1} + \frac{\int i_3 dt}{c_3} = U,$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 + \frac{\int i_2 dt}{C_2} - \frac{\int i_3 dt}{C_3} = 0$$

Pro mechanické sdružené obvody můžeme psát analogické rovnice ($u - v$)

$$Cm_1 \frac{dF_1}{dt} + \frac{F_1}{Rm_1} + \frac{f F_1 dt}{m_1} + \frac{f F_3 dt}{m_3} = v,$$

$$Cm_2 \frac{dF_2}{dt} + \frac{F_2}{Rm_2} + \frac{f F_2 dt}{m_2} - \frac{f F_3 dt}{m_3} = 0.$$

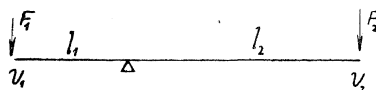
Je zřejmé, že sestavit obdobné rovnice v soustavě první by bylo značně obtížnější. Uvedené dvě analogické soustavy veličin, vzorců i řazení nositelů energie jsou schopny vyřešit všechny analogie mezi obvody elektrickými a mechanickými, jež se v praxi vyskytují.

V některých složitých případech transponují se mechanické obvody nejprve do analogických schémat mechanických podle kritéria, zde jsou mechanické prvky připojeny na společnou rychlost (pak se řadí sériově) nebo na společnou sílu (pak se řadí paralelně). Teprve k těmto analogickým schématům mechanickým se hledají analogické obvody elektrické a to podle vhodnosti, podle soustavy 1) nebo 2). Tento postup však zbytečně komplikuje případy, která by se daly vyřešit jednodušeji důsledným postupem podle některé z uvedených soustav. [3]

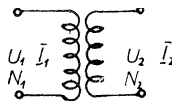
2. Transformátor — páka

Velmi snadno pochopitelná je analogie mezi mechanickou pákou a elektrickým transformátorem podle tab. 1.

Převod páky je dán poměrem $\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{v_2}{v_1}$.



Obr. 11a.



Obr. 11b.

Mechanické impedance v koncových bodech páky jsou podle analogie 1)

$$Zm_1 = \frac{F_1}{v_1}, \quad Zm_2 = \frac{F_2}{v_2}$$

a poměr impedancí je

$$\frac{Zm_1}{Zm_2} = \frac{F_1 v}{v_1 F_2} = \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \quad (10)$$

Analogicky můžeme psát známé vzorce, platné pro elektrický transformátor: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}$, kde N_1 a N_2 jsou počty závitů na primární a sekundární straně.

Poměr impedancí elektrický je však

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{U_1 I_1}{I_1 U_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (11)$$

V této soustavě analogických veličin odpovídá správně po stránce fyzikální napětí U síla F a proud I rychlost v , tedy jsou přidruženy k sobě statické a dynamické charakteristické veličiny. Avšak poměru $\frac{l_2}{l_1^2}$ odpovídá poměr $\frac{N_1}{N_2^2}$, tedy $l_1 \sim N_2$ a $l_2 \sim N_1$.

Kdybychom zavedli analogickou soustavu podle tabulky II. $U - v$ a $I - F$, mohli bychom psát rovnici $\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} \sim \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{v_2}{v_1}$, avšak poměr elektrických impedancí $\frac{z_1}{z_2} = \frac{U_1 I_2}{I_1 U_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$ by se nezměnil. Proto nemá smyslu zavádět tuto fyzikálně méně výhodnou analogii.

Lze tedy říci, že zatím co páka převádí síly v poměru délek $\frac{l_2}{l_1}$, převádí transformátor napětí v poměru počtu závitů $\frac{N_1}{N_2}$. Dále, že páka převádí rychlost v poměru $\frac{l_1}{l_2}$ a transformátor převádí proudy v poměru $\frac{N_2}{N_1}$.

Jestliže je tedy paralela mezi napětími U_1 a U_2 a silami F_1 a F_2 , mezi proudy I_1 a I_2 a rychlostmi v_1 a v_2 , tedy v každém případě zůstane analogie $l_1 \approx \frac{1}{N_1}$ nebo $l_1 \sim N_2$ a $l_2 \approx \frac{1}{N_2}$ nebo $l_2 \sim N_1$. Není tedy ani analogie páka—transformátor fyzikálně dokonalá.

3. Vedení — nosník.

Na obr. 12a je vetknutý nosník, jehož nebezpečný průřez je v místě vetknutí A . Celkový ohybový moment všech zatěžovacích sil k tomuto průřezu je $\Sigma Fl = M_0 =$

$$= F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3. \quad \text{Řešení}$$

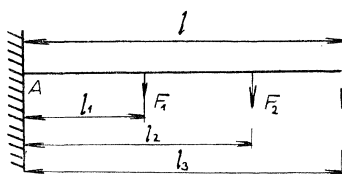
nosníku na pevnost vyžaduje,

$$\text{aby } M_0 = \Sigma Fl = W_0 k_0 = \frac{J}{e} k_0,$$

kde W_0 je modul průřezu a k_0 F_3 je dovolené namáhání, J moment setrvačnosti průřezu a e vzdálenost krajního vlákna.

Tedy

$$\Sigma Fl = \frac{J}{e} k_0. \quad (12)$$



Obr. 12a.

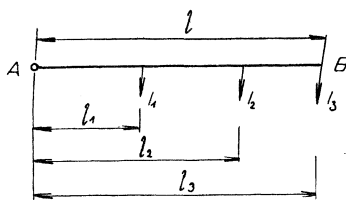
Otevřené vedení, napájené v bodě A , řešíme podle úbytku napětí úplně analogicky. Označíme-li dovolený úbytek napětí ΔU , průřez vedení S , jeho měrný odpor ρ , je

$$\Delta U = \frac{\rho}{s} \Sigma I l \text{ čili } \Sigma I l = \frac{s}{\rho} \Delta U. \quad (12a)$$

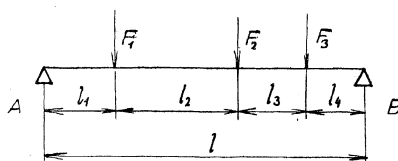
Z podobnosti vzorců 12 a 12a vyplývá, že pojmu moment síly (ohybový moment) v mechanice je analogický proudový moment v elektrotechnice. Dovolnému namáhání k_0 odpovídá dovolený úbytek napětí ΔU , momentu setrvačnosti průřezu nosníku J odpovídá v elektrotechnice průřez vodiče S a vzdálenosti krajního vlákna e od osy průřezu je analogický měrný odpor ρ .

Nosníku, podepřenému na obou koncích podle obr. 13a odpovídá vedení napájené z obou konců podle obr. 13b. Taková jsou i všechna vedení kruhová (obr. 13c), jejichž napájecí bod můžeme rozdělit do dvou bodů A a B a schémata těchto vedení jsou stejná jako obr. 13b.

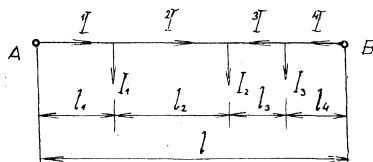
V mechanice určujeme nejdříve velikost reakcí A, B podle podmínek momentové rovnováhy



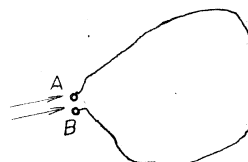
Obr. 12b.



Obr. 13a.



Obr. 13b.



Obr. 13c.

k protějšímu bodu. Stejně postupujeme v elektrotechnice, kde nejprve určujeme velikost napájecích proudů I_A, I_B podle stejných podmínek rovnováhy; zde se však jedná o momenty proudové.

Analogie matematického výpočtu se týká i momentů v nebezpečném průřezu, podle kterých je nosník řešen. V analogickém případě elektrotechnickém odpovídá nebezpečnému průřezu ono místo, které je napájeno z obou stran. Tam je největší úbytek napětí. Matematické řešení je identické pro všechny druhy zatížení, tedy také pro zatížení spojitá nebo kombinovaná. Jako spojitě rovnoměrné zatížení v elektrotechnice se označuje přibližně rovnoměrný drobný odběr.

Také grafická řešení všech těchto případů jsou formálně totožná, takže tato analogie patří k nejdokonalejším i po této stránce.

Možno namítnout, že dynamickému prvku v elektrotechnice, t. j. proudu I odpovídá statický prvek mechanický, tj. síla F . Zde však tato okolnost není rušivá, neboť se jedná o statickou úlohu, kde se mechanice nevyskytuje žádný prvek dynamický.

U grafického řešení nutno však podotknout, že konečnému grafickému obrazci v elektrotechnice, tj. obrazci úbytků napětí, odpovídá jen pomocný momentový obrazec v grafické statice, kdežto konečný obrazec průhybový nutno získat další konstrukcí. [4, 5]

Přes tyto drobné nedostatky je tato analogie po stránce fyzikální snad ze všech elektromechanických analogií nejdokonalejší. Přehled analogických veličin je v tab. III.

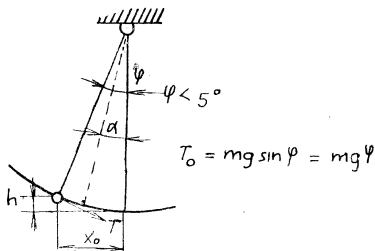
Tabulka III

	Nosníky (mechanika)	Vedení (elektrotechnika)
1	Délky l [m]	Délky l [m]
2	Zatěžovací síly F [kp nebo N]	Odběrové proudy I [A]
3	Momenty sil $M_0 = \Sigma Fl$ [kpm nebo Nm]	Proudové momenty $\Sigma I l$ [metrampér]
4	Dovolené namáhání k_0 [kp/cm ² nebo N/m ²]	Dovolený úbytek napětí AU [V]
5	Průřezový modul W_0 [cm ³ nebo m ³]	Výraz $\frac{S}{\rho} \left[\frac{\text{cm}^3}{\Omega} \text{ nebo } \frac{\text{m}^3}{\Omega} \right]$
6	Moment setrvačnosti průřezu J (cm ⁴ nebo m ⁴)	Průřez S (cm ² nebo m ²)
7	Vzdálenost kraj. vláknů průřezu e [cm nebo m]	Měrný odpor ρ [Ω cm nebo Ω m]
8	Reakce podpor A, B [kp nebo N]	Napájecí proudy I_A, I_B [A]
9	Posuvné síly F [kp nebo N]	Celkové proudy v úsecích I [A]
10	Momentové obrazce grafického řešení při pólové vzdálenosti h (volené)	Obrazce úbytků napětí při pólové vzdálenosti $h = \frac{S}{\rho}$

4. Elektrický kmitavý obvod — kyvadlo.

Jestliže elektrický kmitavý obvod skýtá jedinečnou příležitost, kdy možno jasně pozorovat vzájemnou opakovanou přeměnu elektrické energie potenciální v energii kinetickou, pak kyvadlo nám poskytuje tutéž možnost v mechanice. To bylo a je příčinou, proč je často kladeno kyvadlo jako mechanická obdoba elektrického oscilačního obvodu. Ukážeme však, že průběh přeměny je v obou případech jiný a analogie se v podstatě omezuje jen právě na vzorce, které vyjadřují energii.

a) Abychom si průběh pohybu kyvadla alespoň poněkud mohli připodobnit průběhu elektrických oscilací — což je vyžadováno nejčastěji z důvodů metodických, uvažujeme kyvadlo s rozkyvem pod 5° (obr. 14.) Jestliže uplatňujeme zjednodušující předpoklad, že pohyb je pouze ve směru vodorovném a že je to pohyb harmonický, potom převádíme vlastně pohyb kyvadla na pohyb kmitavý ve vodorovné rovině a nemůžeme v důsledku toho napsat, že potenciální energie v krajních polohách je dána vzorcem $W_m = mgh$. Musíme zde potom uvést stejný vzorec jako při pohybu kni-



Obr. 14.

tavém, tj. že $W_m = \frac{1}{2} mx$. Tím se

ovšem zřikáme výhody, že potenciální energie kyvadla je jasně viditelná a že je dána výchylkou y ve směru svislém a volit toto kyvadlo pro vysvětlení analogického zjevu elektrického by nemělo význam.

Jestliže však připustíme, že kyvadlo se uchyluje také ve směru svislém, potom neplatí analogie mezi průběhem proudu v oscilačním obvodu a průběhem rychlosti kyvadla. Příslušné vzorce jsou sice formálně podobné, avšak nutno si uvědomit, že zatím co ve vzorci $q = Q \sin \omega t$ se ωt mění periodicky od $0-360^\circ$, ve vzorci $x = l \sin \alpha$ se α mění periodicky od -5° do $+5^\circ$.

Nehledě ani k tomu, že hodnota q se mění sinusově, avšak v závislosti na čase, kdežto hodnota x se mění sinusově v závislosti na úhlu, tedy na poloze. Tato okolnost bude vyšetřena blíže u kyvadla s rozkyvem neomezeným.

Analogické veličiny a vzorce si můžeme sice sestavit opět pro přehlednost do tabulky IV, avšak na analogické vzorce nutno pohlížet s uvedenými výhradami.

Kromě toho lze z tabulky IV vyčíst, že u kyvadla se nepodařilo najít analogickou veličinu mechanickou pro kapacitu C . Tím ovšem scházejí i analogické vzorce pro kyvadla, ve kterých by se měla analogická veličina pro C vyskytnout — např.

Tabulka IV

Poř. čís.	Kmitavý obvod elektrický	Kyvadlo s rozkyvem pod 5°
1	náboj Q	max. výchylka $x_0 = l \sin \varphi$
2	náboj $q = Q \sin \omega t$	výchylka $x = l \sin \alpha$
3	proud $i = \frac{dq}{dt} = \omega Q \cos \omega t$	rychlost $v = \frac{dx}{dt} = l \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}$
4	změna proudu $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt} = \omega^2 Q \sin \omega t$	zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2} = l \sin \alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2}$
5	napětí $U = U_0 \sin \omega t$	síla $F = mg \sin \alpha = mg \alpha$ ($\alpha < \varphi$)
6	dílčí napětí $u = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$	složka síly $F = ma$
7	dílčí napětí $u = Ri = R \frac{dq}{dt}$	složka síly $F = Rmv$
8	napětí $\frac{Q}{C}$	—
9	kapacita C	—
10	indukčnost L	hmota m
11	odpor R	mech. odpor Rm
12	energie magnet. pole $\frac{1}{2} LI^2$	energie pohybová $\frac{1}{2} mv_0^2$
13	energie elektr. pole $\frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CU^2$	energie potenciální $mgh \left(\frac{1}{2} mx \right)$
14	doba kmitu $T = 2\pi\sqrt{LC}$	doba kmitu $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
15	log. dekr. útlumu $\frac{RT}{2L}$	log. dekr. útlumu $\frac{R_m T}{2L}$

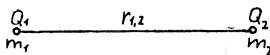
pro napětí $\frac{Q}{C}$, dobu kmitu atp. Proto také neplatí pro kyvadlo polybová diferenciální rovnice 2a, neboť člen, ve kterém se vyskytuje C_m , zde odpadá.

Při tom je zajímavé, že vzorce tabulky IV poř. č. 2—5 jsou sice formálně podobné, avšak ve skutečnosti vyjadřují odlišné hodnoty, kdežto vzorec poř. č. 13 pro potenciální energii je formálně odlišný, avšak ve skutečnosti fyzikálně analogický, jak dokážeme následující úvahou:

Abychom našli elektrickou obdobu pro potenciální energii mgh v zemském gravitačním poli, museli bychom zavést novou elektromechanickou analogii, a to analogii zemského gravitačního pole a elektrického pole. V našem případě se jedná o elektro-

statické pole kondensátoru, jehož energie $W_e = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2$. (Analogii navrhl RNDr. V. Vyšňm.)

Pro vysvětlení souvislosti mezi vzorci $W_g = mgh$ a $W_e = \frac{1}{2} QU$ budeme uvažovat jako uzavřenou soustavu dva hmotné body m_1 a m_2 ve vzdálenosti $r_{1,2}$. Na těchto bodech jsou zároveň umístěny dva náboje Q_1 a Q_2 . Určíme odděleně energii této soustavy jako energii pole gravitačního a pole elektrického. Hmotný bod m_1 je v gravitačním poli bodu m_2 a tím je dána energie soustavy. V místě, kde se nachází bod m_1 , je potenciál pole vytvořeného bodem m_2 , jehož velikost je ψ_1 . Energie bodu m_2 v gravitačním poli bodu m_1 je $A_g = m_1\psi_1$. Potenciál ψ je Newtonův potenciál gravitačního pole. $\psi = \kappa \frac{m_2}{r_{1,2}}$ a tedy energie bodu m_2 je $A_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}}$.



Obr. 15.

Opačně, energie bodu m_1 v gravitačním poli bodu m_2 je $A_g = m_2\psi_2$. Energie uzavřené soustavy obou hmotných bodů je

$$W_g = \frac{1}{2} (m_1\psi_1 + m_2\psi_2). \quad (13)$$

Zcela obdobně obdržíme energii elektrostatického pole

$$W_e = \frac{1}{2} (Q_1V_1 + Q_2V_2). \quad (13a)$$

Pro kondenzátor je

$$Q_1 = -Q_2 = Q \quad \text{a} \quad W_e = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2} QU, \quad (14)$$

kde V_1 a V_2 jsou potenciály elektrického pole a U je potenciálový rozdíl čili napětí. Rovnice (13) a (13a) jsou formálně totožné. Snadno určíme analogii mezi hmotou a nábojem, jakožto zdroji pole a analogii mezi potenciálem gravitačním a elektrickým.

U kyvadla je zvláštní případ, který záleží v tom, že hmotný bod m je ve skutečnosti v gravitačním poli Země o hmotě M . Jeho energie potom je

$$W_g = \kappa \frac{mM}{r_{1,2}}. \quad (15)$$

Ovšem $\kappa \frac{M}{r_{1,2}^2} = g$, je to gravitační zrychlení ve vzdálenosti $r_{1,2}$ od povrchu Země M .

Proto $\kappa \frac{M}{r_{1,2}} = gr_{1,2}$ a dosazením do rovnice (15) obdržíme

$$W_g = mgr_{1,2} = mgh. \quad (16)$$

To je známý výraz pro potenciální energii kyvadla a znamená v tomto případě rovněž celkovou energii uzavřené soustavy: hmotný bod m – země M .

Rozdílnost mezi výrazy pro potenciální energii kyvadla a potenciální energii elektrostatického pole vznikla tím, že energii elektrického pole kondenzátoru vyjadřujeme jako energii dvou na sobě závislých nábojů, kdežto energii gravitačního pole vyjadřujeme jako energii hmotného bodu v gravitačním poli Země, které pokládáme za pole základní nebo absolutní.

Kdybychom podle stejného principu chtěli vyjádřit také energii nabitého kondenzátoru – tedy prostě jako energii náboje Q_1 v poli náboje Q_2 , napsali bychom, že

$$A_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r_{1,2}^2} \quad (17)$$

Náboj Q_2 vyvolá v bodě I pole o intenzitě $E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q_2}{r_{1,2}^2}$, takže výrazem $\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{1,2}} = E_1 r_{1,2}$.

Dosaďme zpět do (17) a obdržíme

$$W_e = Q_1 E_1 r_{1,2} = Q_1 U. \quad (18)$$

Kdybychom užívali pro vyjádření energie kondenzátoru vzorec (18), byla by analogie mezi gravitačním a elektrostatickým polem dokonalá.

V této nové analogii jsou ovšem přiřazeny k sobě jiné fyzikální veličiny, než v případě analogie kinetických jevů elektrických a mechanických.

Přehled analogických veličin v tomto případě podává tabulka V.

Tabulka V

Elektrické pole		Gravitační pole	
Pojmenování – značka	Jednotka rozměr	Pojmenování – značka	Jednotka rozměr
Náboj Q	coulomb	Hmota m	kg
Intenzita pole $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$	volt/m	Gravitační zrychlení $g = \frac{M}{r^2}$	m/sec ²
Síla $F = E \cdot Q$	newton nebo kp	Tíže $G = mg$	newton nebo kp
Potenciál (napětí) $V = E \cdot r = U$	volt	Potenciál gravitač. pole $\psi = g \cdot h$	kpm nebo Nm
Potenciál. energie $(V_1 - V_2) Q = EQ/(r_1 - r_2) = UQ$	joule	Potenciál. energie $w = G(h_1 - h_2) = mgh$	kpm nebo Nm
Vzdálenost r	m	Výška h	m

Je zřejmé, že pro analogii mezi kyvadlem a elektrickým kmitavým obvodem bylo nutno konstruovat dvě analogické soustavy fyzikálních jednotek, a to jednu pro děje kinetické, druhou pro úkazy statické. V soustavě první odpovídá hmotě m indukčnost L , v soustavě druhé náboj Q .

b) Srovnáme-li dále kyvadlo s rozkyvem nad 5° s oscilačním obvodem, vidíme, že již nemůžeme zjednodušeně napsat, že síla $F = mg \sin \alpha$. Síla tedy již není úměrná lineární výchylce, jako u mechanického obvodu kmitavého, kde síla F stlačovala pružinu. Síle $F = mg \sin \alpha$ odpovídá zrychlení $a = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha$.

Rozdíl proti oscilačnímu obvodu elektrickému i proti kmitavému obvodu mechanickému záleží v tom, že jestliže se u vzorců $\frac{di}{dt} = \omega Q \sin \omega t$ nebo $a = \frac{d^2 y}{dt^2} = \omega^2 y_0 \sin \omega t$ mění veličina sinusově s časem t , mění se zrychlení $s = g \sin \alpha$ sinusově s úhlem α , tedy obecně s polohou, která není přímo úměrná času t . Z toho vyplývá

dále nesrovnalost i v rychlosti v , neboť obecně by mělo být $v = l \int_0^\varphi g \sin \alpha \, d\alpha = lg(1 - \cos \varphi)$.

Ve skutečnosti je ovšem rychlost kyvadla v obecné výchylce $v = \sqrt{2gl(\cos \alpha - \cos \varphi)}$, kde φ je maximální výchylka. Těžiště kyvadla budiž T , pohybová energie je zde $J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$, kde J je moment setrvačnosti kyvadla k ose O .

Pro pohyb kyvadla platí rovnice

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + mgl \sin \alpha = 0. \quad (19)$$

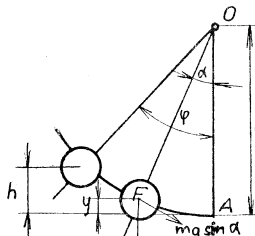
Můžeme dosadit $\frac{mgl}{J} = n^2$ a dospějeme k výchozí rovnici matematického řešení,

k formě $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + n^2 \sin \alpha = 0$.

Po integraci obdržíme vzorec

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - n^2 \cos \alpha = C. \quad (20)$$

Konstantu C určíme z podmínek krajní polohy kyvadla: pro amplitudu je úhel



Obr. 16.

$\alpha = \varphi$ a rychlost $\frac{d\alpha}{dt} = 0$. Proto $C = -n^2 \cos \varphi$. Po dosazení do rov. (20) obdržíme tvar

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - n^2 (\cos \alpha - \cos \varphi) = 0. \quad (21)$$

Tato rovnice odpovídá rozdělení potenciální energie A a kinetické energie W kyvadla, neboť $W + A_0 - A = 0$,

kde $W = \frac{1}{2} J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$

$$\begin{aligned} A_0 &= mgl(1 - \cos \varphi) \\ A &= mgl(1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

Při integraci rov. (21) dospějeme ke tvaru eliptického integrálu

$$t = \frac{1}{2n} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (22)$$

kteří musíme ještě převést na tzv. normální tvar typu

$$F(k, \psi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

Dalším matematickým řešením obdržíme 1/4 doby kmitu ($\alpha = 0$, $\varphi = 90^\circ$), integrujeme-li v rozmezí $[\psi]_0^{90^\circ}$ a obdržíme

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \psi}}. \quad (23)$$

Je to úplný eliptický integrál první třídy, označený *Legendrem* jako K . Pro dobu neomezeného kmitu (s amplitudou φ) fyzického kyvadla vychází tedy doba kmitu

$$T = \frac{4}{n} K \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (24)$$

Srovnáme-li dobu kmitu fyzického kyvadla s rozkyvem nad 5°

$$T = \frac{4K \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)}{n = \sqrt{\frac{mgl}{J}}}$$

s dobou téhož kyvadla s rozkyvem pod 5°

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

zjistíme

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2K}{\pi}$$

Tento poměr zůstává zachován i pro doby kyvu matematických kyvadel, kde v příslušných vzorcích dosazujeme za $J = ml^2$.

Neodpovídá tedy ani průběh rychlosti v , ani doba kyvu T kyvadla s výkyvným úhlem nad 5° rychlosti a době kyvu u pohybu harmonického. Proto jeho analogie s oscilačním obvodem elektrickým je jen v některých bodech, avšak zdaleka není úplná. Převádět pro srovnání veličiny, které se mění sinusově podle úhlu (polohy) na ty, které se mění sinusově s časem je, jak patrně z uvedeného příkladu, matematicky obtížné [6].

Při výkyvu kyvadla nad 5° je velmi názorný přechod mechanické energie potenciální na energii kinetickou, který způsobil, že kyvadla bylo metodicky užíváno jako vzorové mechanické analogie elektrických dějů v oscilačním obvodu. Ve skutečnosti

jsou zde analogické pouze vzorce pro kinetickou energii obou jevů, tj. $W_m = \frac{1}{2}mv^2$

a $W_e = \frac{1}{2}LI^2$. Matematicky ne zcela přesně a podle jiné analogie pole elektrického a pole gravitačního — jsou obdobné i vzorce pro potenciální energii v obou případech, tj. $W_g = mgh$ a $W_{el} = \frac{1}{2}QU$. ($W_e = \frac{1}{2}CU^2$). Ostatní matematická kritéria elektromechanických analogií zde prokazují naopak, že jde o děje kvalitativně se lišící.

U kyvadla s výkyvem pod 5° se matematické kritérium ve značném počtu jevů prokazuje, avšak i zde vzorec pro potenciální energii mgh vyžaduje zvláštní analogii mezi polem gravitačním a polem elektrickým. Není tedy kyvadlo v žádném případě dokonalou analogií pro elektrický oscilační obvod.

Naproti tomu je možné na případě kyvadla ukázat, jak je možno zavést různé elektromechanické analogie pro dílejší jevy, např. pro kinetické jevy zvlášť a pro pole opět zvlášť.

Závěr

Na stručném rozboru několika příkladů byla prokázána zásada všeobecně platná, že elektromechanické analogie jsou v podstatě formální povahy a že netvoří ucelenou soustavu. Spočívají jen v totožném matematickém nebo grafickém řešení určitých dějů v mechanice a v nauce o elektřině a magnetismu, avšak dějů, které často nemají skutečnou fyzikální podobnost. To ostatně není ani možné, neboť kdybychom mohli

kromě identity matematické dokázat i rozsáhlou, neroztrfštěnou podobnost dějů fyzikálních, došlo by vlastně ke ztotožnění obou důležitých odvětví fyzikálních. To pochopitelně zdaleka nelze prokázat, i když analogické jevy mezi oběma obory se vyskytují nejčastěji v celém rozsahu fyziky. Jsou konstatovány stále další analogie a jejich studium zasluhuje větší pozornosti našich fyziků, než jim dosud byla věnována.

Mechanické kmity převádíme často na kmity elektrické, které se dají snadněji měřit nebo pozorovat na obrazovce osciloskopu. V elektrárenských soustavách se projevují přechodné jevy, způsobené náhlou změnou zatížení současně a souběžně mechanicky i elektricky. Zde vyplývají příslušné analogie zcela přirozeně. [7]

I při své roztrfštěnosti mají elektromechanické analogie stále četnější praktická upotřebení. Téměř ve všech učebnicích fyziky se jich využívá metodicky. V technice se jich využívá hlavně při konstrukci vibračních přístrojů, elektroakustických zařízení, různých technicky dokonalých modelů atp. Naproti tomu analogové počítačové stroje nespočívají na využití elektromechanických analogií.

Nejčastěji představuje analogový stroj realizaci nějaké matematické funkce nebo operace pomocí složitých elektronických obvodů. Používáme ho k matematickým výpočtům — např. k řešení soustavy lineárních algebraických rovnic, k řešení algebraických rovnic vyšších stupňů, diferenciální analyzátoři řeší soustavy obyčejných diferenciálních rovnic a harmonické analyzátoři jsou stroje na realizaci harmonické analýzy. Matematická operace je uskutečněna elektronickým zařízením ve stroji, jenž se nazývá analogovým proto, že fyzikální děj ve stroji — tj. v elektronických obvodech je matematicky analogicky vyjádřen jako daná funkce, nebo operace, která se má vyřešit. Nesouvisí to však s elektromechanickými analogiemi. [7]

LITERATURA

- [1] *Heinrich Hecht*: Schaltschemata und Differenzialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde. J. A. Barth, Leipzig 1950
- [2] *Jaroslav Kožesník*: Fyzikální podobnost a teorie modelů. SNTL Praha 1955 (skripta)
- [3] *Josef Merhaut*: Teorie elektroakustických přístrojů. Nakl. ČSAV Praha 1955
- [4] *Karel Novák*: Výpočet sítí elektrovodných ČMT Praha 1922
- [5] *Ladislav Franc*: Výroba a rozvod elektrické energie SPN Praha 1959
- [6] *Max Schuler*: Mechanische Schwingungslehre Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1958
- [7] *Valentin A. Věnikov*: Elektromechanické přechodné děje v elektrických soustavách SNTL Praha 1961 (překlad)
- [8] *Slaboproudý obzor* 1956 č. 6: Stroje na zpracování informací (sborníky)

Резюме

ФИЗИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ

ЛАДИСЛАВ ФРАНЦ

Путем анализа нескольких весьма важных примеров электромеханических аналогий автор указывает на их формальный характер с точки зрения математической, а также и на раздробленность аналогических систем величин, которые не имеют часто достаточное физикальное основание. Было проведено изучение механических явлений у колебательных контуров, маятника, рычага и балок и их аналогии в области электричества. Анализируются также аналогии между гравитационным и электростатическим полями.

В заключении подчеркивается важность работы физиков в этой области и применение аналогий на практике, которое случается все чаще, а именно и при формальном характере и раздробленности, являющимся их недостатком.

Zusammenfassung

PHYSIKALISCHE ANALYSE DER WICHTIGSTEN
ELEKTROMECHANISCHEN ANALOGIEN

LADISLAV FRANZ

Der Autor zeigt an Hand von einer Analyse der wichtigsten Beispiele von elektromechanischen Analogien ihren formalen Charakter seitens der mathematischen Behandlung auf, sowie auf Uneinheitlichkeit der Grössensysteme, die oft nicht genügende physikalische Grundlage haben. Mechanische Erscheinungen von Schwingungskreisen, Pendel, Hebel und Tragbalken und ihre elektrische Analogien wurden studiert. Auch die Analogie zwischen dem Gravitations und dem elektrostatischen Feld wurde erwähnt.

Am Schluss wird die Wichtigkeit der weiteren Forschung auf diesem Gebiete unterstrichen, sowie die Tatsache ihres Vordringens in die Praxis, was immer häufiger geschieht, trotz dem formalen Charakter und der Uneinheitlichkeiten, die ihre Unzulänglichkeiten sind.