Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Miroslav Laitoch
Lineární posloupnosti

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 9 (1968), No. 1, 51--67

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119894

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

1968 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 27

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Mř. prof. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

LINEÁRNÍ POSLOUPNOSTI

MIROSLAV LAITOCH

(Došlo dne 25. ledna 1967)

Věnováno p. prof. dr. O. Borůvkovi k 70. narozeninám

Lineárními posloupnostmi budeme v tomto článku nazývat prvky jisté podmnožiny množiny všech posloupností reálných čísel, a to posloupnosti, které jsou určeny rekurentně předpisem (p) v definici 2.1. Ukazuje se, že tyto posloupnosti tvoří lineární prostor nad tělesem reálných čísel. Uvažuje se zvláště podmnožina tzv. speciálních lineárních posloupností a jisté lineární zobrazení těchto posloupností do sebe. Charakteristická rovnice lineárního zobrazení umožňuje pak ukázat na význam vlastních prvků lineárního prostoru v tom zobrazení, jimiž jsou jisté geometrické posloupnosti, které tvoří bázi lineárního prostoru.

Množina všech speciálních lineárních posloupností je množina všech řešení jisté lineární homogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty, definovaných na množině všech přirozených čísel.

1. ÚVODNÍ POZNÁMKY

a) Nechť P značí množinu všech přirozených čísel a R množinu všech reálných čísel.

Reálnou funkci $x(t)$ definovanou na množině P nazýváme nekonečnou posloupností, stručně posloupností s n-tým členem $x(n)$, $n \in P$. Místo $x(n)$ píšeme stručně x_n. Číslo n nazýváme indexem. Pro posloupnost s n-tým členem x_n používáme následujících symbolů a zápisů: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{x_n\}_1^{\infty}$ nebo jen $\{x_n\}$, je-li zřejmé, že n je index. Také píšeme: $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \ldots$ nebo $\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

b) Zvláštní případy posloupností. Je-li $x(t) \equiv c$, potom posloupnost s n-tým členem $x_n = c$ pro každé $n \in P$ se nazývá stacionární. Zapisujeme $\{c\}_{n=1}^{\infty}$. Je-li $x(t) \equiv 0$, potom posloupnost má každý člen roven nule a nazývá se stacionární nulová. Zapisujeme $\{0\}_{n=1}^{\infty}$.

c) Rovnost posloupností. Řekneme, že dvě posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ se sobě rovnají, jestliže pro každé $n \in P$ je $x_n = y_n$. Rovnost dvou posloupností zapisujeme symbolicky $\{x_n\} = \{y_n\}$.

d) Zápis $\{x_n\}_{n=1}^{p}$ znamená uspořádanou p-tici reálných čísel $(x_1, \ldots, x_p)$. Rovnost $\{x_n\}_1^p = \{y_n\}_1^p$ znamená, že je $x_n = y_n$ pro $n = 1, 2, \ldots, p$.

2. OBECNÉ LINEÁRNÍ POSLOUPNOSTI

a) Předmětem našich úvah budou posloupnosti reálných čísel definované rekurentně následujícím předpisem.

Definice. *Buď dána posloupnost uspořádaných p-tic reálných čísel* $(\alpha_{1\nu}, \ldots, \alpha_{p\nu})_{\nu=1}^{\infty}$, *přičemž předpokládáme* $\alpha_{p\nu} \neq 0$ *pro každé* ν, $p \geqq 1$. *Ke každé uspořádané p-tici reálných čísel* $\{a_n\}_1^p$ *přiřadíme posloupnost* $\{x_n\}_1^{\infty}$ *definovanou rekurentně předpisem*

$$\text{(p)} \qquad x_1 = a_1, \ldots, x_p = a_p, \qquad x_{p+\nu} = \alpha_{1\nu} x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_{p\nu} x_\nu$$

pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Posloupnost $\{x_n\}$ *nazýváme obecnou lineární posloupností, která je určena uspořádanou p-ticí reálných čísel* $(a_1, \ldots, a_p)$ *a předpisem (p).*

b) Označíme M množinu všech obecných lineárních posloupností určených všemi možnými uspořádanými p-ticemi reálných čísel a předpisem (p).

c) Příklad. Do množiny M patří např. stacionární nulová posloupnost $\{0\}$, která je určena uspořádanou p-ticí $\{a_n\}_1^p$, kde $a_1 = \ldots = a_p = 0$ a předpisem (p).

d) Věta. *Buďte* $\{x_n\}_1^{\infty}$ *a* $\{y_n\}_1^{\infty}$ *posloupnosti z* M. *Potom platí* $\{x_n\}_1^{\infty} = \{y_n\}_1^{\infty}$ *právě když* $\{x_n\}_1^p = \{y_n\}_1^p$.

Důkaz. Je-li $\{x_n\}_1^{\infty} = \{y_n\}_1^{\infty}$, potom pro každé přirozené n platí rovnost $x_n = y_n$. Tím spíše platí tato rovnost pro prvních p členů posloupnosti. Tedy $\{x_n\}_1^p = \{y_n\}_1^p$.

Naopak, je-li $\{x_n\}_1^p = \{y_n\}_1^p$, platí rovnost

$$x_n = y_n \tag{2.1}$$

pro $n = 1, 2, \ldots, p$. Ukážeme, že rovnost platí pro každé přirozené číslo. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro prvních p přirozených čísel rovnost (2.1) platí. Předpokládejme, že rovnost platí až po nějaké n ($\geqq p$) včetně. Ukážeme, že rovnost platí i pro $n + 1$.

Vskutku, položíme-li $n + 1 = p + \nu$, můžeme psát $x_{n+1} = x_{p+\nu} = \alpha_{1\nu} x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_{p\nu} x_\nu = \alpha_{1\nu} y_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_{p\nu} y_\nu = y_{p+\nu} = y_{n+1}$. Takže $\{x_n\}_1^{\infty} = \{y_n\}_1^{\infty}$.

3. LINEÁRNÍ PROSTOR OBECNÝCH LINEÁRNÍCH POSLOUPNOSTÍ

V množině M definujeme sčítání posloupností a násobení posloupnosti reálným číslem a to tak, že utvořený součet resp. součin je opět prvkem množiny M.

a) Definice. *Buďte* $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in M$. *Součtem posloupností* $\{x_n\}$ *a* $\{y_n\}$ *rozumíme posloupnost* $\{x_n + y_n\}$. *Pro operaci sčítání posloupností používáme symbol* $+$. *Můžeme tedy psát*

$$\{x_n\}_1^{\infty} + \{y_n\}_1^{\infty} = \{x_n + y_n\}_1^{\infty}.$$

b) Definice. *Buď* $x_n \in M$ *a* $c \in R$. *Násobkem posloupnosti* $\{x_n\}$ *číslem c rozumíme posloupnost* $\{cx_n\}$. *Pro operaci násobení posloupnosti číslem používáme symbol* . . *Můžeme tedy psát*

$$c \,.\, \{x_n\}_1^{\infty} = \{cx_n\}_1^{\infty}.$$

c) Věta. *Jsou-li* $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in M$ *a* $c \in R$, *potom také* $(\{x_n\} + \{y_n\}) \in M$, $c \cdot \{x_n\} \in M$.

Důkaz. Označíme-li $\{x_n\} + \{y_n\} = \{z_n\}$, potom je $z_n = x_n + y_n$ pro $n = 1, 2, \ldots, p, \ldots$ a pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ je $z_{p+\nu} = x_{p+\nu} + y_{p+\nu} = (\alpha_{1\nu}x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_{p\nu}x_\nu) + (\alpha_{1\nu}y_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_{p\nu}y_\nu) = \alpha_{1\nu}(x_{p+\nu-1} + y_{p+\nu-1}) + \ldots + \alpha_{p\nu}(x_\nu + y_\nu) = \alpha_{1\nu}z_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_{p\nu}z_\nu$.

Posloupnost $\{z_n\}$ je tedy určena uspořádanou p-ticí $\{z_n\}_1^p$ a předpisem (p), tedy $\{z_n\} \in M$.

Podobně, označíme-li $c \cdot \{x_n\} = \{z_n\}$, potom je $z_n = cx_n$ pro $n = 1, 2, \ldots, p, \ldots$ a pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ je $z_{p+\nu} = cx_{p+\nu} = c(\alpha_{1\nu}x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_{p\nu}x_\nu) = \alpha_{1\nu}(cx_{p+\nu-1}) + \ldots + \alpha_{p\nu}(cx_\nu) = \alpha_{1\nu}z_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_{p\nu}z_\nu$.

Posloupnost $\{z_n\}$ je tedy určena uspořádanou p-ticí $\{z_n\}_1^p$ a předpisem (p), tedy $\{z_n\} \in M$.

d) Příklad. Protože zvláště $(-1) \in R$, patří spolu s posloupností $\{x_n\}$ i posloupnost $(-1) \cdot \{x_n\} = \{-x_n\}$ do množiny M.

e) Věta. *Operace sčítání posloupností je komutativní, tj. platí*

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{y_n\} + \{x_n\}$$

a je asociativní, tj. platí

$$(\{x_n\} + \{y_n\}) + \{z_n\} = \{x_n\} + (\{y_n\} + \{z_n\})$$

pro $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \in M$.

Důkaz komutativnosti. Je $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\} = \{y_n + x_n\} = \{y_n\} + \{x_n\}$, neboť sčítání reálných čísel je komutativní.

Podobně se dokáže asociativnost.

f) Věta. *Buď* $\{0\} \in M$ *stacionární nulová posloupnost. Potom platí*

$$\{0\} + \{x_n\} = \{x_n\}$$

pro každou posloupnost $\{x_n\} \in M$.

Důkaz. Je $\{0\} + \{x_n\} = \{0 + x_n\} = \{x_n\}$.

g) Věta. *Ke každé posloupnosti* $\{x_n\} \in M$ *existuje v* M *posloupnost* $\{-x_n\}$ *a pro ně platí*

$$\{-x_n\} + \{x_n\} = \{0\}.$$

Důkaz. Existence posloupnosti $\{-x_n\}$ v množině M je zaručena (viz příklad 3.d.) a dále zřejmě je $\{-x_n\} + \{x_n\} = \{-x_n + x_n\} = \{0\}$.

h) Definice. *Posloupnost* $\{-x_n\}$, *o níž je řeč v předchozí větě* 3.g., *se nazývá opačná či inversní k posloupnosti* $\{x_n\}$.

i) Věta. *Množina* M *všech obecných lineárních posloupností, které jsou určeny všemi uspořádanými p-ticemi reálných čísel* $(a_1, \ldots, a_p)$ *a předpisem* (p), *tvoří vzhledem k operaci sčítání posloupností komutativní grupu. Jednotkovým prvkem je stacionární nulová posloupnost.*

Důkaz. Předně se snadno nahlédne, že M je neprázdná množina. V M je dále definována rovnost a početní operace sčítání, která ke každým dvěma posloupnostem z M přiřazuje opět posloupnost z M jako jejich součet. Operace sčítání je komutativní a asociativní. V M existuje jednotkový prvek $\{0\}$ a ke každému prvku i prvek inversní. M je tedy komutativní grupa.

j) Věta. *Buďte* $\{x_n\}, \{x_n\} \in M$, $a, b, 1 \in R$. *Potom platí*
α) $a \cdot (\{x_n\} + \{y_n\}) = (a \cdot \{x_n\}) + (a \cdot \{y_n\})$,
β) $(a + b) \cdot \{x_n\} = (a \cdot \{x_n\}) + (b \cdot \{x_n\})$,
γ) $a(b \cdot \{x_n\}) = (ab) \cdot \{x_n\}$,
δ) $1 \cdot \{x_n\} = \{x_n\}$.

Důkaz. Tvrzení se dokážou přímým výpočtem. Máme ad α)

$$a \cdot (\{x_n\} + \{y_n\}) = a \cdot \{x_n + y_n\} = \{a(x_n + y_n)\} = \{ax_n + ay_n\} = \\ = \{ax_n\} + \{ay_n\} = (a \cdot \{x_n\}) + (a \cdot \{y_n\}).$$

Podobně postupujeme v případech β)—δ).

k) Věta. *Množina všech obecných lineárních posloupností, které jsou určeny všemi uspořádanými p-ticemi reálných čísel* $(a_1, \ldots, a_p)$ *a předpisem* (p), *tvoří nad tělesem reálných čísel R lineární prostor. Grupovou operací je sčítání posloupností. Vnějším násobením je násobení posloupnosti reálným číslem.*

Důkaz. Množina M je lineárním prostorem, neboť je aditivní komutativní grupou vzhledem k operaci sčítání posloupností, v níž je dále definováno násobení posloupností reálnými čísly, které má vlastnosti α—δ uvedené v předchozí větě 3.j.

4. ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST OBECNÝCH LINEÁRNÍCH POSLOUPNOSTÍ NAD TĚLESEM REÁLNÝCH ČÍSEL R

a) Věta. *Buďte* $k_1, \ldots, k_r \in R$ *a* $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{x_{rn}\}_{n=1}^{\infty} \in M$. *Potom také posloupnost* $\{y_n\} \in M$, *kde* $y_n = k_1x_{1n} + \ldots + k_rx_{rn}$ *pro* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Důkaz. Tvrzení věty je důsledkem vět 3.c. a 3.e. Snadno se nahlédne, že posloupnost $\{y_n\}$ je určena uspořádanou p-ticí $\{k_1x_{1n} + \ldots + k_rx_{rn}\}_{n=1}^{p}$ a předpisem (p), tedy $\{y_n\} \in M$.

b) Definice. *Posloupnost* $\{y_n\}$, *o níž je řeč v předchozí větě* 4.a., *nazýváme lineární kombinací s konstantními koeficienty* $k_1, \ldots, k_r$ *posloupností* $\{x_{1n}\}, \ldots, \{x_{rn}\}$.

c) Definice. *Buďte* $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{x_{rn}\}_{n=1}^{\infty} \in M$. *Řekneme, že tyto posloupnosti jsou lineárně závislé (nezávislé) nad tělesem reálných čísel R, existuje-li (neexistuje-li žádná) taková r-tice čísel* $c_1, \ldots, c_r \in R$, $c_1^2 + \ldots + c_r^2 > 0$, *že platí*

$$c_1 \cdot \{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty} + \ldots + c_r \cdot \{x_{rn}\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}.$$

V případě lineární nezávislosti to znamená, že předchozí rovnost je splněna jen v případě $c_1 = \ldots = c_r = 0$.

d) Věta. *Nechť* $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{x_{pn}\}_{n=1}^{\infty}$ *je p posloupností z M a nechť* $c_1, \ldots, c_p$ *jsou reálná čísla. Potom platí*

$$c_1 \cdot \{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty} + \ldots + c_p \cdot \{x_{pn}\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty} \tag{4.1}$$

právě když

$$c_1 \cdot \{x_{1n}\}_{n=1}^{p} + \ldots + c_p \cdot \{x_{pn}\}_{n=1}^{p} = \{0\}_{n=1}^{p}.$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne z věty 2.d., neboť levá strana rovnosti (4.1) je posloupnost

$$\{c_1x_{1n} + \ldots + c_px_{pn}\}_{n=1}^{\infty} \in M.$$

e) Věta. *Posloupnosti* $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{x_{pn}\}_{n=1}^{\infty} \in M$ *jsou lineárně nezávislé nad tělesem reálných čísel R právě když determinant* $|x_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, p$, *je různý od nuly. Přitom je*

$$|x_{ik}| = \begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \ldots & x_{pp} \end{vmatrix}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, p.$$

Důkaz. Nechť $\{x_{1n}\}, \ldots, \{x_{pn}\}$ jsou lineárně nezávislé posloupnosti z množiny M nad R. Potom platí vzhledem k 4.c. a 4.d. rovnost $c_1 \cdot \{x_{1n}\}_{n=1}^{p} + \ldots + c_p \cdot \{x_{pn}\}_{n=1}^{p} = \{0\}_{n=1}^{p}$ právě když $c_1 = \ldots = c_p = 0$. Má tedy mít soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} c_1x_{11} + \ldots + c_px_{p1} &= 0, \\ \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ c_1x_{1p} + \ldots + c_px_{pp} &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

jen triviální řešení. To nastane, když determinant soustavy $D_s \neq 0$. Ale v našem případě je $D_s = |x_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, p$.

Naopak, je-li $|x_{ik}| \neq 0$, $i, k = 1, 2, \ldots, p$, potom soustava (4.2) má jen triviální řešení $c_1 = \ldots = c_p = 0$ a posloupnosti $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{x_{pn}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou lineárně nezávislé nad tělesem reálných čísel R.

f) Příklad. Buď dána posloupnost uspořádaných p-tic reálných čísel $\{(\alpha_{1\nu}, \ldots, \alpha_{p\nu})\}_{\nu=1}^{\infty}$, kde $\alpha_{1\nu} = \ldots = \alpha_{p-1\nu} = 0$, $\alpha_{p\nu} = 1$ pro každé ν, $p \geqq 1$. Potom p uspořádanými p-ticemi reálných čísel $\{x_{in}\}_{n=1}^{p}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, kde $x_{in} = \delta_{in}$ ($\delta_{in} = 0$ pro $i \neq n$ a $\delta_{in} = 1$ pro $i = n$), a předpisem (p) jsou určeny tyto posloupnosti

$$\{x_{1n}\} = 1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots$$

kde $x_{11} = 1$, $x_{12} = \ldots = x_{1p} = 0$ a $x_{1p+\nu} = x_{1\nu}$ pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\{x_{2n}\} = 0, 1, 0, \ldots, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots$$

kde $x_{22} = 1$, $x_{21} = x_{23} = \ldots = x_{2p} = 0$ a $x_{2p+\nu} = x_{2\nu}$ pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ atd. až

$$\{x_{pn}\} = 0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots$$

kde $x_{p1} = \ldots = x_{pp-1} = 0$, $x_{pp} = 1$ a $x_{pp+\nu} = x_{p\nu}$ pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.
Tyto posloupnosti jsou lineárně nezávislé nad tělesem reálných čísel R, neboť p-řadý determinant

$$|x_{ik}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

g) Věta. *Jsou-li posloupnosti* $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{x_{pn}\}_{n=1}^{\infty} \in M$ lineárně nezávislé nad tělesem reálných čísel R, potom pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ je p-řadý determinant

$$\begin{vmatrix} x_{1n} & x_{1n+1} & \ldots & x_{1n+p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{pn} & x_{pn+1} & \ldots & x_{pn+p-1} \end{vmatrix}$$

různý od nuly a naopak. Přitom platí

$$\begin{vmatrix} x_{1n} & x_{1n+1} & \dots & x_{1n+p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{pn} & x_{pn+1} & \dots & x_{pn+p-1} \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)(p-1)} \prod_{j=0}^{n-1} \alpha_{pj} \mid x_{ik} \mid, \tag{4.3}$$

kde determinant $| x_{ik} |$, $i, k = 1, 2, \dots, p$, je definován ve větě 4.e. a $\alpha_{p0} = 1$.

Důkaz. Správnost vzorce (4.3) dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je vzorec správný podle předchozí věty 4.e., neboť determinant $| x_{ik} |$, $i, k = 1, 2, \dots, p$, je různý od nuly. Předpokládejme tedy, že vzorec (4.3) platí pro nějaké n ($\geqq 1$). Ukážeme, že je správný i pro $n + 1$. Máme

$$\begin{vmatrix} x_{1n+1} & x_{1n+2} & \dots & x_{1n+p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{pn+1} & x_{pn+2} & \dots & x_{pn+p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{1n+1} & x_{1n+2} & \dots & \alpha_{1n} x_{1n+p-1} + \dots + \alpha_{pn} x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{pn+1} & x_{pn+2} & \dots & \alpha_{1n} x_{pn+p-1} + \dots + \alpha_{pn} x_{pn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{p-1} \alpha_{pn} \begin{vmatrix} x_{1n} & \dots & x_{1n+p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{pn} & \dots & x_{pn+p-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n(p-1)} \prod_{j=0}^{n} \alpha_{pj} \mid x_{ik} \mid .$$

Naopak, je-li determinant na levé straně vzorce (4.3) pro každé $n = 1, 2, 3, \dots$ různý od nuly, potom též determinant $| x_{ik} |$, $i, k = 1, 2, \dots, p$, je různý od nuly, neboť $\alpha_{pn} \neq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \dots$ a $\alpha_{p0} = 1$.

h) Věta. *Jsou-li* $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}, \dots, \{x_{pn}\}_{n=1}^{\infty} \in M$ *lineárně nezávislé posloupnosti v počtu* p, *potom každá posloupnost* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ *se dá vyjádřit jako jejich lineární kombinace s konstantními koeficienty z* R.

Důkaz. Hledejme konstanty $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in R$ tak, aby platilo $\lambda_1 \cdot \{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty} + \dots + \lambda_p \cdot \{x_{pn}\}_{n=1}^{\infty} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. K určení $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, podle věty 2.d., použijeme p rovnic

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_{11} + \dots + \lambda_p x_{p1} &= y_1, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \\ \lambda_1 x_{1p} + \dots + \lambda_p x_{pp} &= y_p. \end{aligned}$$

Determinant soustavy je roven determinantu $| x_{ik} |$, $i, k = 1, 2, \dots, p$, takže pro koeficienty λ_i, $i = 1, 2, \dots, p$, dostáváme vyjádření

$$\lambda_i = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{i-11} & y_1 & x_{i+11} & \dots & x_{p1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1p} & \dots & x_{i-1p} & y_p & x_{i+1p} & \dots & x_{pp} \end{vmatrix}}{| x_{ik} |} .$$

i) Věta. *Lineární prostor* M *všech obecných lineárních posloupností, které jsou určeny všemi uspořádanými p-ticemi reálných čísel* $(a_1, \dots, a_p)$ *a předpisem* (p), *je dimense* p.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z předchozí věty 4.h.

5. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ MNOŽINY M

a) Věta. *Je-li* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$, *potom také* $\{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} \in M$.

Důkaz. Zřejmé, neboť $\{x_{n+1}\}$ je určena uspořádanou p-ticí $(x_2, \ldots, x_{p+1})$, kde $x_{p+1} = \alpha_{11}x_p + \ldots + \alpha_{p1}x_1$, a předpisem (p).

b) Definice. *Nechť* M *je množina všech obecných lineárních posloupností určených všemi uspořádanými p-ticemi reálných čísel a předpisem* (p). *V množině* M *definujeme zobrazení* $\mathscr{A}$, *které každé posloupnosti z* M *přiřazuje opět posloupnost z* M *takto*:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\mathscr{A} = \{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}.$$

c) Věta. *Buďte* $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in M$ *a* $c \in R$. *Potom platí*:

α) $(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty})\,\mathscr{A} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\mathscr{A} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}$,

β) $(c\,.\,\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\,\mathscr{A} = c\,.\,(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\mathscr{A})$.

Důkaz. Máme ad α):

$$\begin{aligned}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty})\,\mathscr{A} &= \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}\mathscr{A} = \\ = \{x_{n+1} + y_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} &= \{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} + \{y_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \\ &= \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\mathscr{A} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}.\end{aligned}$$

Podobně postupujeme ad β).

d) Věta. *Zobrazení* $\mathscr{A}$ *je lineární zobrazení lineárního prostoru* M *do sebe.*

Důkaz. Tvrzení plyne z předchozích vět 5.a., 5.c.

6. SPECIÁLNÍ LINEÁRNÍ POSLOUPNOSTI

Budeme se zabývat dále lineárními posloupnostmi, které jsou definovány rekurentně zvláštním případem předpisu (p).

a) Definice. *Buď dána uspořádaná p-tice reálných čísel* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, *přičemž předpokládáme* $\alpha_p \neq 0$, $p \geqq 1$. *Ke každé uspořádané p-tici reálných čísel* $(a_1, \ldots, a_p)$ *přiřadíme posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definovanou rekurentně předpisem*

$$x_1 = a_1, \ldots, x_p = a_p, \qquad x_{p+\nu} = \alpha_1 x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p x_\nu \tag{p*}$$

pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Posloupnost $\{x_n\}$ *nazýváme speciální lineární posloupností, která je určena uspořádanou p-ticí reálných čísel* $(a_1, \ldots, a_p)$ *a předpisem* (p*).

b) Označíme M^* množinu všech speciálních lineárních posloupností, které jsou určeny všemi uspořádanými p-ticemi reálných čísel a přepisem (p*).

Je zřejmé, že všechny úvahy provedené pro obecné lineární posloupnosti lze provést i pro speciální lineární posloupnosti, takže všechna tvrzení o obecných lineárních posloupnostech platí i pro speciální lineární posloupnosti.

c) Věta. *Buď* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost komplexních čísel, která je určena uspořádanou p-ticí komplexních čísel* $\{z_n\}_{n=1}^{p}$ *a předpisem* (p*). *Nechť* $z_n = x_n + iy_n$ *pro každé* $n \in P$. *Posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou reálné posloupnosti z* M^* *a jsou určeny uspořádanými p-ticemi reálných čísel* $\{x_n\}_{n=1}^{p}$ *resp.* $\{y_n\}_{n=1}^{p}$ *a předpisem* (p*).

Důkaz. Je

$$z_{p+\nu} = \alpha_1 z_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p z_\nu$$

neboli

$$x_{p+\nu} + iy_{p+\nu} = \alpha_1(x_{p+\nu-1} + iy_{p+\nu-1}) + \ldots + \alpha_p(x_\nu + iy_\nu) =$$
$$= (\alpha_1 x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p x_\nu) + i(\alpha_1 y_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p x_\nu).$$

Z rovnosti komplexních čísel usuzujeme, že platí

$$x_{p+\nu} = \alpha_1 x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p x_\nu$$

a

$$y_{p+\nu} = \alpha_1 y_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p y_\nu \qquad \text{pro} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

takže $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in M^*$ a jsou určeny uspořádanými p-ticemi $\{x_n\}_{n=1}^p$ resp. $\{y_n\}_{n=1}^p$ a předpisem (p*).

d) Definice. *Buď $\{x_n\} \in M^*$, $\{x_n\} \neq \{0\}$ a nechť platí $\{x_n\}_{n=1}^\infty \mathscr{A} = s \,.\, \{x_n\}_{n=1}^\infty$, kde $s \in R$. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ nazýváme vlastní posloupností v zobrazení $\mathscr{A}$.*

e) Věta. *Je-li $\{x_n\} \in M^*$ vlastní posloupnost v zobrazení $\mathscr{A}$, potom je s kořenem tzv. charakteristické rovnice*

$$s^p - \alpha_1 s^{p-1} - \ldots - \alpha_p = 0. \tag{r}$$

Důkaz. Je-li $\{x_n\} \in M^*$ vlastní posloupnost v zobrazení $\mathscr{A}$, potom je $\{x_n\}_{n=1}^\infty \mathscr{A} = s \,.\, \{x_n\}_{n=1}^\infty$ neboli $\{x_{n+1}\}_{n=1}^\infty = s \,.\, \{x_n\}_{n=1}^\infty$. Tato rovnost nastane, vzhledem k větám 2.d. a 3.c., platí-li rovnosti $x_{i+1} = sx_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, p$, kde $x_{p+1} = \alpha_1 x_p + \ldots + a_p x_1$. Odtud postupně dostáváme: $x_2 = sx_1$, $x_3 = s^2 x_1$, $\ldots$, $x_p = s^{p-1} x_1$ a konečně $\alpha_1 s^p x_1 + \ldots + \alpha_p x_1 = s^p x_1$.
Anulujeme-li poslední rovnost, vidíme, že s hoví rovnici $x_1(s^p - \alpha_1 s^{p-1} - \ldots - \alpha_p) = 0$. Protože $x_1 \neq 0$, hoví s charakteristické rovnici (r).

f) Věta. *Buď $s_0 (\neq 0)$ jednoduchý reálný kořen chrakteristické rovnice*

$$s^p - \alpha_1 s^{p-1} - \ldots - \alpha_p = 0, \qquad \alpha_p \neq 0, \tag{r}$$

potom geometrická posloupnost $\{s_0^{n-1}\}_{n=1}^\infty$ je vlastní posloupnost v M^* v zobrazení $\mathscr{A}$.

Důkaz. Ukážeme napřed, že posloupnost $\{s_0^{n-1}\}$ je z M^*. Znásobíme-li rovnici (r) činitelem $s^{\nu-1}$ ($\neq 0$), dostaneme po úpravě rovnici

$$s^{p+\nu-1} = \alpha_1 s^{p+\nu-2} + \ldots + \alpha_p s^{\nu-1}. \tag{6.1}$$

Dosadíme-li do rovnice (6.1) za s kořen s_0, přejde rovnice v rovnost. Označíme-li $s_0^{n-1} = x_n$, potom pro $n = 1, 2, \ldots, p$ je $x_n = s_0^{n-1}$ a pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ je $x_{p+\nu} = s_0^{p+\nu-1} = \alpha_1 s_0^{p+\nu-2} + \ldots + \alpha_p s_0^{\nu-1} = \alpha_1 x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p x_\nu$. Posloupnost $\{s_0^{n-1}\}$ je tedy určena uspořádanou p-ticí $\{s_0^{n-1}\}_{n=1}^p$ a předpisem (p*), tedy $\{s_0^{n-1}\} \in M^*$.
Dále snadno nahlédneme, že $\{s_0^{n-1}\}_{n=1}^\infty \mathscr{A} = \{s_0^n\}_{n=1}^\infty = s_0 \,.\, \{s_0^{n-1}\}_{n=1}^\infty$, takže posloupnost $\{s_0^{n-1}\}$ je v zobrazení $\mathscr{A}$ vlastní.

g) Věta. *Buď s_0 ($\neq 0$) jednoduchý komplexní kořen charakteristické rovnice*

$$s^p - \alpha_1 s^{p-1} - \ldots - \alpha_p = 0, \qquad \alpha_p \neq 0, \tag{r}$$

potom reálné posloupnosti $\{|s_0|^{n-1} \cos (\overline{n-1} \arg s_0)\}_{n=1}^\infty$, $\{|s_0|^{n-1} \sin (\overline{n-1} \arg s_0)\}_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti z M^*.

Důkaz. Znásobíme-li rovnici (r) činitelem $s^{\nu-1}$ $(\neq 0)$, dostaneme po úpravě rovnici

$$s^{p+\nu-1} = \alpha_1 s^{p+\nu-2} + \ldots + \alpha_p s^{\nu-1}. \tag{6.2}$$

Dosadíme-li do rovnice (6.2) za s kořen s_0, přejde rovnice v rovnost, kterou můžeme napsat v této úpravě

$$\begin{aligned} &|s_0|^{p+\nu-1}(\cos \overline{p+\nu-1} \arg s_0 + i \sin \overline{p+\nu-1} \arg s_0) = \\ &= \alpha_1 |s_0|^{p+\nu-2} (\cos \overline{p+\nu-2} \arg s_0 + i \sin \overline{p+\nu-2} \arg s_0) + \\ &+ \ldots + \alpha_p |s_0|^{\nu-1}(\cos \overline{\nu-1} \arg s_0 + i \sin \overline{\nu-1} \arg s_0). \end{aligned}$$

Tato rovnost je splněna, právě když jsou splněny následující dvě rovnosti

$$\begin{aligned} &|s_0|^{p+\nu-1} \cos \overline{p+\nu-1} \arg s_0 = \\ &= \alpha_1 |s_0|^{p+\nu-2} \cos \overline{p+\nu-2} \arg s_0 + \ldots + \alpha_p |s_0|^{\nu-1} \cos \overline{\nu-1} \arg s_0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} &|s_0|^{p+\nu-1} \sin \overline{p+\nu-1} \arg s_0 = \\ &= \alpha_1 |s_0|^{p+\nu-2} \sin \overline{p+\nu-2} \arg s_0 + \ldots + \alpha_p |s_0|^{\nu-1} \sin \overline{\nu-1} \arg s_0. \end{aligned}$$

Označíme-li $|s_0|^{n-1} \cos \overline{n-1} \arg s_0 = x_{1n}$, potom je pro $n = 1, 2, \ldots, p$

$$x_{1n} = |s_0|^{n-1} \cos \overline{n-1} \arg s_0$$

a pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ je

$$\begin{aligned} x_{1p+\nu} &= |s_0|^{p+\nu-1} \cos \overline{p+\nu-1} \arg s_0 = \\ &= \alpha_1 |s_0|^{p+\nu-2} \cos \overline{p+\nu-2} \arg s_0 + \ldots + \alpha_p |s_0|^{\nu-1} \cos \overline{\nu-1} \arg s_0 = \\ &= \alpha_1 x_{1p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p x_1. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{|s_0|^{n-1} \cos \overline{n-1} \arg s_0\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy určena uspořádanou p-ticí $\{|s_0|^{n-1} \cos \overline{n-1} \arg s_0\}_{n=1}^{p}$ a předpisem (p*), tedy je z M^*.

Podobně postupujeme i ve druhém případě.

h) Věta. *Buď s_0 k-násobný kořen charakteristické rovnice*

$$s^p - \alpha_1 s^{p-1} - \ldots - \alpha_p = 0, \quad \alpha_p \neq 0, \tag{r}$$

potom posloupnosti $\{s_0^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\overline{n-1} s_0^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\ldots$, $\{\overline{n-1}^{k-1} s_0^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti z M^*.

Důkaz. Použijeme známého vzorce z diferenčního počtu:

$$f(t+n) = (1+\Delta)^n f(t).$$

Buď $0 \leqq j = k - 1$. Platí tyto rovnosti

$$\begin{aligned} (p+\nu-1)^j &= (\nu - 1 + p)^j = \\ &= (\nu-1)^j + \tbinom{p}{1} \Delta(\nu-1)^j + \tbinom{p}{2} \Delta^2(\nu-1)^j + \ldots + \tbinom{p}{p} \Delta^p(\nu-1)^j, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(p + \nu - 2)^j &= (\nu - 1 + p - 1)^j = \\
&= (\nu - 1)^j + \tbinom{p-1}{1} \Delta(\nu - 1)^j + \tbinom{p-1}{2} \Delta^2(\nu - 1)^j + \ldots + \\
&+ \tbinom{p-1}{p-1} \Delta^{p-1}(\nu - 1)^j, \\
&\vdots \\
\nu^j &= (\nu - 1 + 1)^j = \\
&= (\nu - 1)^j + \tbinom{1}{1} \Delta(\nu - 1)^j, \\
(\nu - 1)^j &= (\nu - 1)^j .
\end{aligned}
$$

Znásobíme-li první rovnost $s_0^{p+\nu-1}$, druhou $-\alpha_1 s_0^{p+\nu-2}$, ..., předposlední $-\alpha_{p-1} s_0^{\nu}$ a poslední $-\alpha_p s_0^{\nu-1}$ a sečteme-li je, dostaneme rovnost

$$
\begin{aligned}
(p + \nu - 1)^j s_0^{p+\nu-1} - \alpha_1(p + \nu - 2)^j s^{p+\nu-2} - \ldots - \\
-\alpha_{p-1} \nu^j s_0^{\nu} - \alpha_p(\nu - 1)^j s_0^{\nu-1} = 0,
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

neboť činitel u $\Delta^i(\nu - 1)^j$ pro $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ na pravé straně je roven nule; vskutku, je

$$
\begin{aligned}
& s_0^{\nu-1}[\tbinom{p}{i} s_0^p - \alpha_1\tbinom{p-1}{i} s_0^{p-1} - \ldots - \alpha_{p-i}\tbinom{i}{i} s_0^i] = \\
&= s_0^{\nu-1+i}[\tbinom{p}{i} s_0^{p-i} - \alpha_1\tbinom{p-1}{i} s_0^{p-i-1} - \ldots - \alpha_{p-i}] = \frac{s_0^{\nu-1+i}}{i!} P^{(i)}(s_0),
\end{aligned}
$$

kde P je levá strana charakteristické rovnice a $P^{(i)}$ značí její i-tou derivaci, která je pro $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ v bodě s_0 rovna nule.

Ze (6.3) plyne

$$
\begin{aligned}
(p + \nu - 1)^j s_0^{p-\nu-1} = \alpha_1(p + \nu - 2)^j s_0^{p+\nu-2} + \ldots + \\
+ \alpha_{p-1} \nu^j s_0^{\nu} + \alpha_p(\nu - 1)^j s_0^{\nu-1}
\end{aligned}
$$

pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, takže $\{\overline{n - 1}^j s_0^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} \in M^*$, když jsme položili $p + \nu = n$.

i) Poznámka. Poněvadž charakteristická rovnice (r) má reálné koeficienty, tak vždy spolu s k-násobným komplexním kořenem $s_0 = s_1 + is_2$ má i k-násobný konjugovaný komplexní kořen $\bar{s}_0 = s_1 - is_2$.

Na základě věty 6.c. usuzujeme, že platí následující věta.

j) Věta. *Každé dvojici konjugovaných komplexních kořenů charakteristické rovnice* (r) *násobnosti k odpovídá k dvojic reálných posloupností z množiny M^*.*

Je-li tedy s_0 k-násobný komplexní kořen charakteristické rovnice (r), *potom reálné posloupnosti*

$$
\{|s_0|^{n-1} \cos \overline{n - 1} \arg s_0\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \{|s_0|^{n-1} \sin \overline{n - 1} \arg s_0\}_{n=1}^{\infty},
$$

$$
\{\overline{n - 1}\, |s_0|^{n-1} \cos \overline{n - 1} \arg s_0\}_{n=1}^{\infty},
$$

$$
\{\overline{n - 1}\, |s_0|^{n-1} \sin \overline{n - 1} \arg s_0\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{\overline{n - 1}^{k-1} |s_0|^{n-1} \cos \overline{n - 1} \arg s_0\}_{n=1}^{\infty};
$$

$$
\{\overline{n - 1}^{k-1} |s_0|^{n-1} \sin \overline{n - 1} \arg s_0\}_{n=1}^{\infty}
$$

jsou posloupnosti z M^*.

7. DALŠÍ VĚTY O SPECIÁLNÍCH LINEÁRNÍCH POSLOUPNOSTECH

a) Věta. *Nechť charakteristická rovnice*

$$s^p - \alpha_1 s^{p-1} - \ldots - \alpha_p = 0, \qquad \alpha_p \neq 0, \tag{r}$$

má m_1-násobný kořen s_1, m_2-násobný kořen $s_2, \ldots,$ m_k-násobný kořen s_k, přičemž $m_1 + \ldots + m_k = p$, kde s_i $(i = 1, \ldots, k)$ jsou navzájem různé reálné kořeny. Potom posloupnosti

$$\{s_1^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{\overline{n-1}s_1^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{\overline{n-1}^{m_1-1}s_1^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots,$$
$$\{s_k^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \{\overline{n-1}s_8^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{\overline{n-1}^{m_k-1}s_k^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$$

patří do M^* a jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. První tvrzení je zřejmé a plyne přímo z věty 6.h. Důkaz o nezávislosti řešení provedeme sporem. Předpokládejme naopak, že uvedené posloupnosti jsou závislé, tedy, že existují čísla $c_1, \ldots, c_p$ ne všechna rovna nule, že platí

$$c_1 \,.\, \{s_1^{n-1}\}_{n=1}^{p} + c_2 \,.\, \{\overline{n-1}s_1^{n-1}\}_{n=1}^{p} + \ldots + c_{m_1} \,.\, \{\overline{n-1}^{m_1-1}s_1^{n-1}\}_{n=1}^{p} +$$
$$+ c_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1} \,.\, \{s_k^{n-1}\}_{n=1}^{p} + c_{m_1+\ldots+m_{k-1}+2} \,.\, \{\overline{n-1}s_k^{n-1}\}_{n=1}^{p} + \ldots +$$
$$+ c_p \,.\, \{\overline{n-1}^{m_k-1}s_k^{n-1}\}_{n=1}^{p} = \{0\}_{n=1}^{p}.$$

Položíme-li $n - 1 = m$, $m = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$, máme po úpravě

$$\{s_1^m(c_1 + c_2 m + \ldots + c_{m_1} m^{m_1-1}) + \ldots + s_k^m(c_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1} +$$
$$+ c_{m_1+\ldots+m_{k-1}+2} m + \ldots + c_p m^{m_k-1}\}_{m=0}^{p-1} = \{0\}_{m=0}^{p-1}.$$

Položíme-li dále

$$P_1 = c_1 + c_2 m + \ldots + c_{m_1} m^{m_1-1}, \ \ldots, P_k = c_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1} + c_{m_1+\ldots+m_{k-1}+2} m +$$
$$+ \ldots + c_p m^{m_k-1}, \quad \text{máme} \quad \{s_1^m P_1(m) + \ldots + s_k^m P_k(m)\}_{m=0}^{p-1} = \{0\}_{m=0}^{p-1}.$$

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že mnohočlen $P_k(m)$ má aspoň jeden koeficient různý od nuly; jeho stupeň je nejvýše $p - 1$. Pro každé $m = 0, \ldots, p - 1$ máme

$$s_1^m P_1(m) + \ldots + s_k^m P_k(m) = 0.$$

Dělíme-li obě strany předchozí rovnosti s_1^m $(\neq 0)$, dostaneme

$$P_1(m) + \sum_{i=2}^{k} \left(\frac{s_i}{s_1}\right)^m P_i(m) = 0.$$

Utvořme nyní při kroku 1 diferenci řádu m_1 levé i pravé strany této rovnosti. Předně dostáváme, že $\Delta^{m_1} P_1(m) = 0$ a diference dalších členů na levé straně nám po úpravě dají

$$\sum_{i=2}^{k} \left(\frac{s_i}{s_1}\right)^m Q_i(m),$$

kde činitelé Q_i exponenciálních funkcí v m jsou nové mnohočleny týchž stupňů jako dosavadní mnohočleny P_i (viz poznámku na konci důkazu). Dostáváme tak novou rovnost

$$\sum_{i=2}^{k} \left(\frac{s_i}{s_1}\right)^m Q_i(m) = 0.$$

Zřejmě mnohočlen $Q_k(m)$ má aspoň jeden koeficient různý od nuly.

Pokračujeme-li v tomto procesu tvoření diferencí, přijdeme nakonec k rovnosti

$$\left(\frac{s_p}{s_{p-1}}\right)^m R_k(m) = 0.$$

Protože $\frac{s_p}{s_{p-1}} \neq 0$, nemůže být předchozí rovnost splněna, neboť mnohočlen $R_l(m)$, který je stupně jako $P_l(m)$, má aspoň jeden koeficient různý od nuly a nemůže být tedy nula pro každé $m = 0, 1, \ldots, p - 1$; a to je spor.

Poznámka. Pro $i = 2, \ldots, k$ je

$$\Delta \left(\frac{s_i}{s_1}\right)^m P_i(m) = \left(\frac{s_i}{s_1}\right)^{m+1} P_i(m+1) - \left(\frac{s_i}{s_1}\right)^m P_i(m) =$$
$$= \left(\frac{s_i}{s_1}\right)^m \left[\frac{s_i}{s_1} P_i(m+1) - P_i(m)\right] = \left(\frac{s_i}{s_1}\right)^m Q_i(m),$$

kde $Q_i(m)$ je téhož stupně jako $P_i(m)$, což se snadno vidí, neboť $\frac{s_i}{s_1} \neq 1$.

b) Věta. *Má-li charakteristická rovnice $s^p - \alpha_1 s^{p-1} - \ldots - \alpha_p = 0$, $\alpha_p \neq 0$, reálné různé kořeny $s_1, s_2, \ldots, s_p$, potom geometrické posloupnosti*

$$\{s_1^{n-1}\}_{n=1}^\infty, \quad \{s_2^{n-1}\}_{n=1}^\infty, \ldots, \{s_p^{n-1}\}_{n=1}^\infty$$

jsou vlastní posloupnosti z M^* v zobrazení $\mathscr{A}$ a jsou lineárně nezávislé nad tělesem reálných čísel R.

Důkaz. Věta je speciálním případem věty 7.a. Tvrzení, že posloupnosti jsou vlastní v zobrazení $\mathscr{A}$, plyne z věty 6.f.

c) Položme si nyní otázku, jak vypadají všechny od $\{0\}_{n=1}^\infty$ různé posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in M^*$, které jsou vlastní v zobrazení $\mathscr{A}$ v případě, že charakteristická rovnice tohoto zobrazení má reálné různé kořeny?

Aby tomu tak bylo, má platit

$$\{x_n\}_{n=1}^\infty \mathscr{A} = s \, . \, \{x_n\}_{n=1}^\infty, \qquad s \neq 0. \tag{7.1}$$

Podle věty 6.e. víme, že s je v tomto případě kořenem charakteristické rovnice lineárního zobrazení $\mathscr{A}$. V našem případě má charakteristická rovnice reálné různé kořeny, označme je s_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, a pro ně tedy platí $x_{n+1} = s_i x_n$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$. Odtud soudíme, že vlastní posloupnosti musí být reálné geometrické posloupnosti s kvocienty $s_1, s_2, \ldots, s_p$.

Přihlédneme-li k předchozí větě 7.b. a k větě 3.c., můžeme říci, že *právě jen geometrické posloupnosti*

$$\{x_{11} s_1^{n-1}\}_{n=1}^\infty, \ldots, \{x_{p1} s_p^{n-1}\}_{n=1}^\infty,$$

kde $x_{11}, \ldots, x_{p1} \in R$, jsou vlastní posloupnosti v M^* v zobrazení $\mathscr{A}$.

8. O SOUČTECH ČLENŮ SPECIÁLNÍCH LINEÁRNÍCH POSLOUPNOSTÍ

a) Buď dána uspořádaná p-tice reálných čísel $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$, $\alpha_p \neq 0$, $p \geqq 1$ takových, že rovnice $s^p - \alpha_1 s^{p-1} - \ldots - \alpha_p = 0$ má reálné různé kořeny $s_1, \ldots, s_p$. Buď dále dána p-tice reálných čísel $\{a_i\}_{i=1}^p$.

Uvažujme nyní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, která je definována uspořádanou p-ticí $\{a_i\}_{i=1}^p$ a předpisem

$$x_1 = a_1, \ldots, x_p = a_p, \quad x_{p+\nu} = \alpha_1 x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p x_\nu \tag{p*}$$

pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Je-li $p = 1$, potom posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je geometrická posloupnost a n-tý člen posloupnosti je dán předpisem

$$x_n = a_1 \alpha_1^{n-1},$$

neboť kořenem charakteristické rovnice $s - \alpha_1 = 0$ je číslo α_1. Číslo α_1 je tedy kvocientem geometrické posloupnosti s prvním členem a_1.

Je-li $p > 1$, potom posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, jak víme, se dá vyjádřit jako lineární kombinace geometrických posloupností $\{s_1^{n-1}\}_{n=1}^\infty$, $\{s_2^{n-1}\}_{n=1}^\infty$, $\ldots$, $\{s_p^{n-1}\}_{n=1}^\infty$ ve tvaru

$$\{x_n\}_{n=1}^\infty = \lambda_1 \cdot \{s_1^{n-1}\}_{n=1}^\infty + \ldots + \lambda_p \cdot \{s_p^{n-1}\}_{n=1}^\infty,$$

kde podle vzorce v důkazu věty 4.h. dostáváme pro λ_i vyjádření ve tvaru

$$\lambda_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & a_1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1^{p-1} & \ldots & s_{i-1}^{p-1} & a_p & s_{i+1}^{p-1} & \ldots & s_p^{p-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ s_1^{p-1} & \ldots & s_p^{p-1} \end{vmatrix}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{8.1}$$

b) Věta. *Součet σ_n prvních n členů geometrické posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty = \{a_1 \alpha_1^{n-1}\}_{n=1}^\infty$ (případ $p = 1$) je dán vzorcem*

$$\sigma_n = a_1 \frac{1 - \alpha_1^n}{1 - \alpha_1} \tag{8.2}$$

za předpokladu, že $\alpha_1 \neq 1$,
a součet σ_n prvních n členů speciální lineární posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ (případ $p > 1$) je dán vzorcem

$$\sigma_n = \lambda_1 \frac{1 - s_1^n}{1 - s_1} + \ldots + \lambda_p \frac{1 - s_p^n}{1 - s_p} \tag{8.3}$$

za předpokladu, že $s_i \neq 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, p$. Koeficienty λ_i, $i = 1, \ldots, p$, jsou dány vzorci (8.1).

Důkaz. Vzorec (8.2) je dobře známý. Vzorec (8.3) dostaneme, použijeme-li p-krát vzorec (8.2), neboť v tomto případě máme

$$\sigma_n = x_1 + \ldots + x_n = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p) + (\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_p s_p) + $$
$$+ \ldots + (\lambda_1 s_1^{n-1} + \ldots + \lambda_p s_p^{n-1}) = \lambda_1 (1 + s_1 + \ldots + s_1^{n-1}) +$$
$$+ \ldots + \lambda_p (1 + s_p + \ldots + s_p^{n-1}) = \lambda_1 \frac{1 - s_1^n}{1 - s_1} + \ldots + \lambda_p \frac{1 - s_p^n}{1 - s_p}.$$

c) Poznámka. **Jestliže v předchozí větě 8.b. je některý kořen charakteristické rovnice roven 1, potom příslušná geometrická posloupnost přejde ve stacionární posloupnost, a součet σ_n prvních n členů té posloupnosti je roven n-násobku prvního členu té posloupnosti.**

d) Věta. *Jestliže kvocient α_1 geometrické posloupnosti $\{a_1\alpha_1^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje nerovnost $|\alpha_1| < 1$, potom příslušná posloupnost částečných součtů $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\sigma_n = a_1 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_1\alpha_1^{n-1}$, konverguje. Položíme-li $\sigma = \lim \sigma_n$, je*

$$\sigma = a_1 \frac{1}{1 - \alpha_1}. \tag{8.4}$$

Jestliže reálné různé kořeny $s_1, \ldots, s_p$ charakteristické rovnice $s_p - \alpha_1 s_p^{-1} - \ldots - \alpha_p = 0$, $\alpha_p \neq 0$, splňují nerovnosti $|s_1| < 1, \ldots, |s_p| < 1$, potom k speciální lineární posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, která je určena uspořádanou p-ticí $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a předpisem (p*) *příslušná posloupnost částečných součtů $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde*

$$\sigma_n = x_1 + \ldots + x_n = \lambda_1 \frac{1 - s_1^n}{1 - s_1} + \ldots + \lambda_p \frac{1 - s_p^n}{1 - s_p},$$

konverguje. Položíme-li $\sigma = \lim \sigma_n$, je

$$\sigma = \lambda_1 \frac{1}{1 - s_1} + \ldots + \lambda_p \frac{1}{1 - s_p}. \tag{8.5}$$

Přitom koeficienty λ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, jsou dány vzorci (8.1).

Důkaz. Tvrzení jsou zřejmá; vzorec (8.4) plyne ze vzorce (8.2) a vzorec (8.5) ze vzorce (8.3) limitováním.

e) Příklad. Buď (α_1, α_2) uspořádaná dvojice reálných čísel a nechť $\alpha_2 \neq 0$, $\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 + \alpha_2 > 0$. Ka každé uspořádané dvojici reálných čísel (a, b) přiřaďme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou následujícím předpisem takto:

(p*) $\quad x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{2+\nu} = \alpha_1 x_{1+\nu} + \alpha_2 x_\nu \quad$ pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Vidíme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ patří do množiny speciálních lineárních posloupností, které tvoří lineární prostor dimense 2. Bází tohoto prostoru jsou dvě geometrické posloupnosti, neboť charakteristická rovnice

$$s^2 - \alpha_1 s - \alpha_2 = 0$$

má za uvedených předpokladů dva reálné různé kořeny

$$s_1 = \frac{\alpha_1}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 + \alpha_2\right]}, \qquad s_2 = \frac{\alpha_1}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 + \alpha_2\right]}.$$

Geometrické posloupnosti lze zapsat ve tvaru

$$\{s_1^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \{s_2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem (p*), můžeme tedy vyjádřit jako lineární kombinaci geometrických posloupností ve tvaru

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \lambda_1 \cdot \{s_1^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} + \lambda_2 \cdot \{s_2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty},$$

přičemž koeficienty λ_1, λ_2 určené z rovnic

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{a}$$
$$s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 = \mathrm{b}$$

lze vyjádřit postupně takto:

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & s_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}} = \frac{as_2 - b}{s_2 - s_1} = \frac{a}{2} - \frac{a\alpha_1 - 2b}{2\sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}},$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ s_1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}} = \frac{b - as_1}{s_2 - s_1} = \frac{a\alpha_1 - 2b}{2\sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}} - \frac{a}{2}.$$

Vyšetřeme ještě otázku konvergence příslušné posloupnosti částečných součtů $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\sigma_n = x_1 + \ldots + x_n$. Podle věty 8.d. bude konvergence zaručena, když pro kořeny s_1, s_2 charakteristické rovnice budou platit nerovnosti $|s_1| < 1$, $|s_2| < 1$. To nastane, budou-li splněny nerovnosti

$$\left|\frac{\alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1^2 + 4\alpha_2)}}{2}\right| < 1, \qquad \left|\frac{\alpha_1 - \sqrt{(\alpha_1^2 + 4\alpha_2)}}{2}\right| < 1,$$

přičemž $\alpha_1^2 + 4\alpha_2 > 0$.

9. MOCNINNÁ ŘADA, JEJÍŽ KOEFICIENTY TVOŘÍ SPECIÁLNÍ LINEÁRNÍ POSLOUPNOST

a) Uvažujme mocninnou řadu

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \tag{9.1}$$

a předpokládejme, že posloupnost koeficientů $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{\infty} \in M^*$, tj., že je definována takto: koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ jsou dány a pro $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ jsou koeficienty $a_{p+\nu}$ definovány předpisem

$$a_{p+\nu} = \alpha_1 a_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p a_\nu. \tag{p$_0$}$$

Nechť M_0 je množina všech mocninných řad, jejichž koeficienty tvoří posloupnosti z M^*. Jestliže charakteristická rovnice

$$s^p - \alpha_1 s^{p-1} - \ldots - \alpha_p = 0, \qquad \alpha_p \neq 0. \tag{r}$$

má reálné různé kořeny $s_1, \ldots, s_p$, potom, jak víme, existují geometrické posloupnosti

$$\{s_1^\nu\}_{\nu=0}^{\infty}, \ldots, \{s_p^\nu\}_{\nu=0}^{\infty}, \tag{9.2}$$

které patří do M^* a mocninné řady

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} s_1^\nu x^\nu, \ \ldots, \ \sum_{\nu=0}^{\infty} s_p^\nu x^\nu,$$

které zřejmě patří do M_0.

Poloměr konvergence každé mocninné řady $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_i^\nu x^\nu$ je $r_i = \frac{1}{|s_i|}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, p$, neboť $\lim\sup \sqrt[\nu]{|s_i^\nu|} = |s_i|$.

Poněvadž posloupnost koeficientů mocninné řady (9.1) se dá vyjádřit jako lineární kombinace geometrických posloupností (9.2) s koeficienty λ_i ($i = 1, 2, \ldots, p$), určenými vzorci (8.1), máme

$$a_\nu = \lambda_1 s_1^\nu + \ldots + \lambda_p s_p^\nu$$

pro každé $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Mocninnou řadu (9.1) lze tedy postupně upravit takto:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda_1 s_1^\nu + \ldots + \lambda_p s_p^\nu)\, x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda_1 s_1^\nu x^\nu + \ldots + \lambda_p s_p^\nu x^\nu) =$$

$$= \lambda_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} s_1^\nu x^\nu + \ldots + \lambda_p \sum_{\nu=0}^{\infty} s_p^\nu x^\nu.$$

Odtud usuzujeme, že konvergence mocninné řady (9.1) je zaručena aspoň v intervalu $(-r, r)$, kde $r = \min\left(\frac{1}{|s_1|}, \ldots, \frac{1}{|s_p|}\right)$. Jestliže je $\lambda_i \neq 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, p$, potom mocninná řada (9.1) konverguje právě v intervalu $(-r, r)$, což je zřejmé.

10. LINEÁRNÍ DIFERENČNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

a) Věta. *Buď dána lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty (bez pravé strany)*

$$f(x + p) - \alpha_1 f(x + p - 1) - \ldots - \alpha_p f(x) = 0, \quad \alpha_p \neq 0. \tag{d}$$

Všechna řešení této rovnice definovaná na množině přirozených čísel P jsou právě jen posloupnosti z M^*.

Důkaz. Buď $f(x)$ řešení diferenční rovnice (d) na množině přirozených čísel P. Položíme-li $x_n = f(n)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, máme pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$x_{p+\nu} = f(p + \nu) = \alpha_1 f(p + \nu - 1) + \ldots + \alpha_p f(\nu) =$$

$$= \alpha_1 x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p x_\nu,$$

přičemž $x_1 = f(1), \ldots, x_p = f(p)$.

Vidíme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je určena uspořádanou p-ticí $\{x_n\}_{n=1}^{p}$, kde $x_n = f(n)$ a předpisem (p*), tedy $\{x_n\} \in M^*$.

Buď naopak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M^*$, tj. posloupnost, která je určena uspořádanou p-ticí $\{x_n\}_{n=1}^{p}$ a předpisem (p*). Potom platí pro každé $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ rovnost

$$x_{p+\nu}^* = \alpha_1 x_{p+\nu-1} + \ldots + \alpha_p x_\nu .$$

Položíme-li $f(n) = x_n$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, máme pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$f(\nu + p) - \alpha_1 f(\nu + p - 1) - \ldots - \alpha_p f(\nu) = 0.$$

Odtud soudíme, že f je řešení diferenční rovnice (d) na množině přirozených čísel P.

LITERATURA

A. O. Gelfond: Differenzenrechnung, DVW Berlin, 1958

А. И. Мальцев: Основы линейной алгебры, ОГИЗ Москва, 1948

Zusammenfassung

LINEARE FOLGEN

Miroslav Laitoch

In diesem Artikel verstehen wir unter linearen Folgen die Elemente einer gewissen Untermenge der Menge aller Folgen der reellen Zahlen und zwar solche Folgen, die in der Definition 2.a. rekurrent durch die Vorschrift (p) bestimmt sind. Es wird gezeigt, dass diese Folgen einen linearen Raum über dem Körper der reellen Zahlen bilden. Insbesondere wird die Untermenge der sogenannten speziellen linearen Folgen untersucht und es wird auch eine gewisse lineare Abbildung dieser Folgen in sich behandelt. Die charakteristische Gleichung der linearen Abbildung ermöglicht dann die Bedeutung der Eigenelemente des linearen Raums zu zeigen. Als Eigenelemente kommen hier gewisse geometrische Folgen vor, die auch die Basis des linearen Raums bilden.

Die Menge aller speziellen linearen Folgen ist gerade die Menge aller Lösungen einer gewissen linearen homogenen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten, die auf der Menge aller natürlichen Zahlen definiert sind.