

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jiří Kepřt

Die beste Korrektion der sphärischen Aberration vom Standpunkt der Abbildung des Punktes

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 11 (1971), No. 1, 289--308

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119945>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1971

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Laborator optiky přírodovědecké fakulty
Vedoucí: prof. RNDr. Bedřich Havelka, doktor věd*

DIE BESTE KORREKTION DER SPHÄRISCHEN ABERRATION VOM STANDPUNKT DER ABBILDUNG DES PUNKTES

JIŘÍ KEPRT

(Eingelangt am 3. Juni 1969)

Die sphärische Aberration der fünften Ordnung, resp. die für eine Einfallshöhe korrigierte sphärische Aberration des optischen Systems, approximieren wir durch eine Parabel vierten Grades (Bild 1). In diesem Bild bezeichnet h die Einfallshöhe, resp. h_c die Einfallshöhe für den Randstrahl der Kreispupille und $\Delta x'$ die Größe der sphärischen Aberration, resp. Δx_m die maximale Entfernung der Aberration von der Paraxialebene.

Wenn wir den Korrektionszustand des optischen Systems kennen, d. h. die Korrektionshöhe h_0 und die maximale Aberration Δx_m , sind wir imstande, die Aberration für eine beliebige Einfallshöhe h , resp. für eine beliebige Zone $q = \left(\frac{h}{h_c}\right)^2$, aus der Beziehung

$$\Delta x' = 4q(q_0 - q) \frac{\Delta x_m'}{q_0^2}, \quad (1)$$

festzustellen [s. 9], wobei $q_0 = \left(\frac{h_0}{h_c}\right)^2$ die Korrektionszone für die paraxiale Bildebene ist.

Die Lage der Bildebene bestimmen wir durch die Größe x_0 , d. h. durch die Entfernung der Bildebene von der Paraxialebene (Bild 2). Dabei führen wir das Verhältnis

$$\eta = \frac{x_0}{\Delta x_m'}, \quad (2)$$

ein. Wenn also $\eta = 0$ ist, d. h., daß $x_0 = 0$ ist, liegt die Bildebene in der Paraxiallage. Wenn z. B. $\eta = 0,5$ ist, dann wird die Bildebene in der Mitte der Aberration $\Delta x_m'$ festgelegt.

Die Größe der sphärischen Aberration wird vom Standpunkt der Wellenoptik durch die Wellenaberration, resp. durch die Entfernung zwischen der wirklichen Wellenfläche und der zur paraxialen Bildebene angeschlossenen Referenzfläche gemessen. Die Wellenaberration $W(q)$ kann man [s. 1, 9] aus der sphärischen Aber-

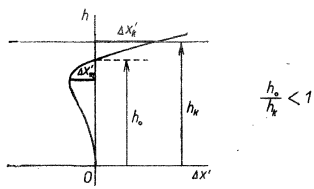
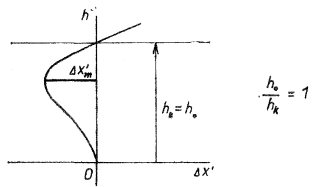
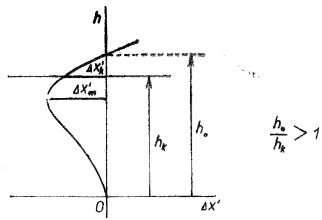


Bild 1

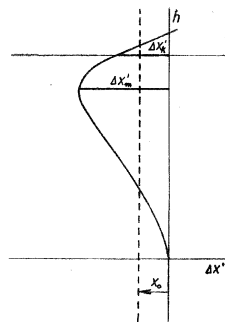


Bild 2

ration $\Delta x'$ und aus der Lage der Bildebene x_0 durch Anwendung der Beziehung

$$\frac{W(q)}{\lambda} = \frac{1}{8\lambda c^2} \int_0^q (\Delta x' - x_0) dq \quad (3)$$

bestimmen, wo c die Blendenzahl des Systems und λ die Wellenlänge des verwendeten Lichtes sind.

Durch die Integration in (3) erhalten wir [s. 4, 6]

$$W(q) = W_{20}q + W_{40}q^2 + W_{60}q^3, \quad (4)$$

wo die Koeffizienten

$$W_{20} = -\frac{x_0}{8c^2}, \quad W_{40} = \frac{\Delta x'_m}{4q_0 c^2}, \quad W_{60} = -\frac{\Delta x'_m}{6q_0^2 c^2} \quad (5)$$

sind.

Wenn weiter $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl ist, kann man das Produkt der Größen k und $W(q)$ als

$$kW(q) = \pi \frac{\Delta x'_m}{\lambda c^2} (A_1 q + A_3 q^2 + A_5 q^3) \quad (6)$$

bezeichnen, wo die Aberrationskoeffizienten

$$A_1 = -\frac{1}{4}\eta, \quad A_3 = \frac{1}{2q_0}, \quad A_5 = -\frac{1}{3q_0^2} \quad (7)$$

sind.

Wenn wir jetzt das Maximum der Intensität I auf der optischen Achse suchen und wenn wir weiter das Strehlsche-Kriterium

$$I \geq 0,8I_0, \quad (8)$$

anwenden, wo I_0 die Intensität des physikalisch vollkommenen Systems in der Mitte der Beugungsfigur ist, können wir für die kleinen Werte Δx_m die Lage der günstigsten Bildebene [s. 8, 9] aus der Beziehung

$$A_1 = -\frac{1}{10}(10A_3 + 9A_5) \quad (9)$$

bestimmen, wobei wir voraussetzen, daß die sphärische Aberration $\Delta x'_m$ nicht die Toleranzgrenze

$$\Delta x'_m = \frac{12\lambda c^2}{\sqrt{35A_3^2 + 81A_5^2 + 105A_3A_5}} \quad (10)$$

überschreitet.

Untersuchen wir nun vom Standpunkt der Toleranzbeziehung (10) den Korrektionszustand des optischen Systems. Da die Koeffizienten A_3, A_5 die Funktionen des

Parameters q_0 sind, kann man

$$F(A_3, A_5) = 35A_3^2 + 81A_5^2 + 105A_3A_5, \quad (11)$$

resp.

$$\frac{dF}{dq_0} = \frac{\partial F}{\partial A_3} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial A_5} \cdot \frac{\partial A_5}{\partial q_0} \quad (12)$$

schreiben. Die maximale Toleranz (10) tritt für diejenige Korrekturen q_0 ein, für welche die Funktion (11) die minimalen Werte erreicht. Also für den besten Korrek-

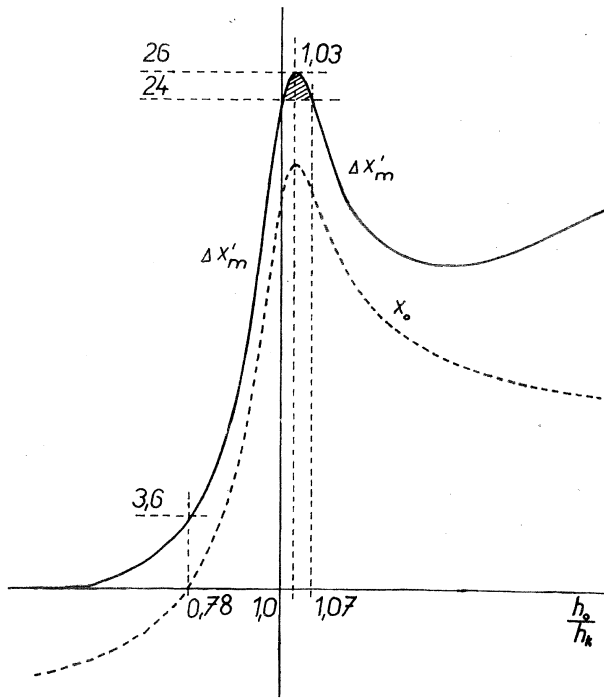


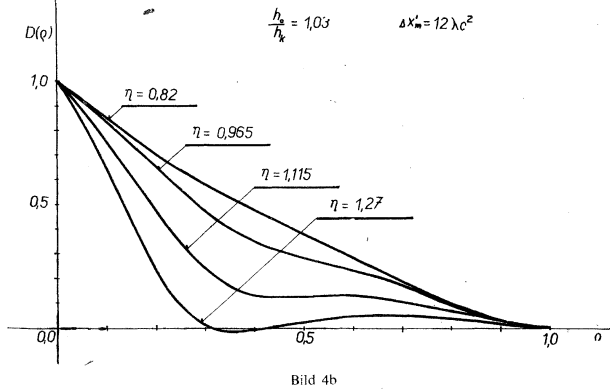
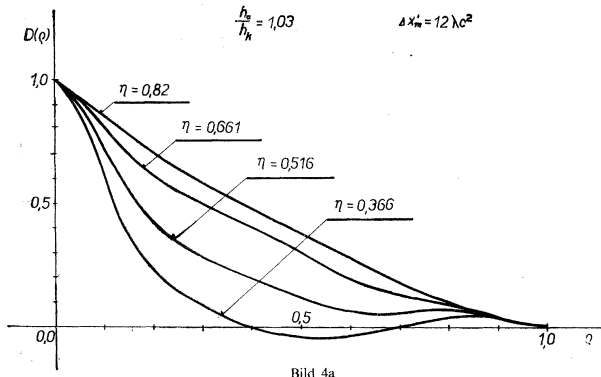
Bild 3

tionszustand gilt

$$\frac{dF}{dq_0} = 0, \quad (13)$$

resp.

$$35q_0^2 - 105q_0 + 72 = 0. \quad (14)$$



Diese Bedingung erfüllt die beste Korrektion

$$q_0 = 1,06, \quad \text{resp. } h_0 = 1,03h_k, \quad (15)$$

wobei die maximale Toleranz

$$\Delta x'_m = 26\lambda c^2, \quad (16)$$

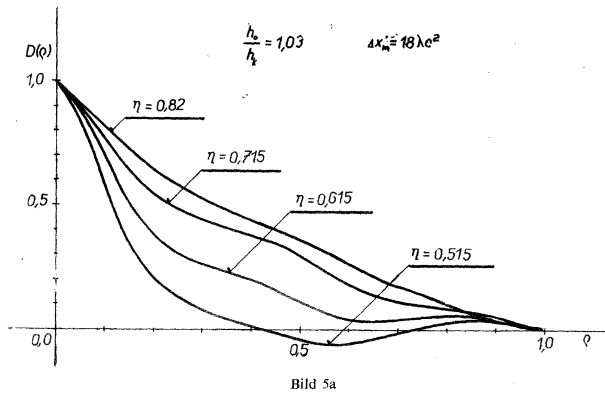


Bild 5a

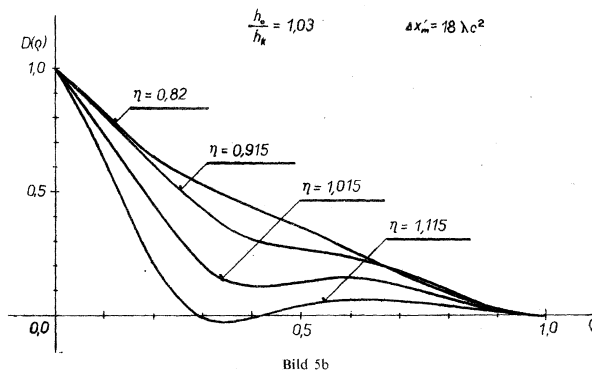


Bild 5b

ist und die günstigste Bildebene in der Entfernung

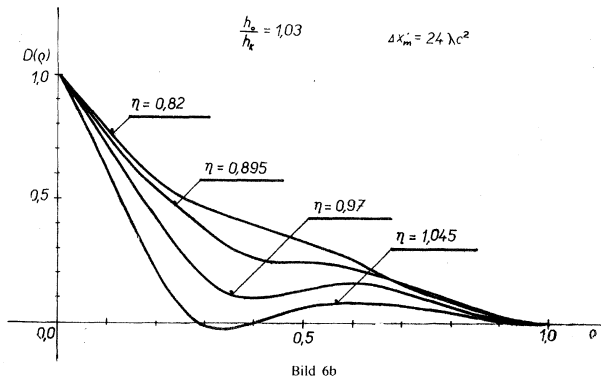
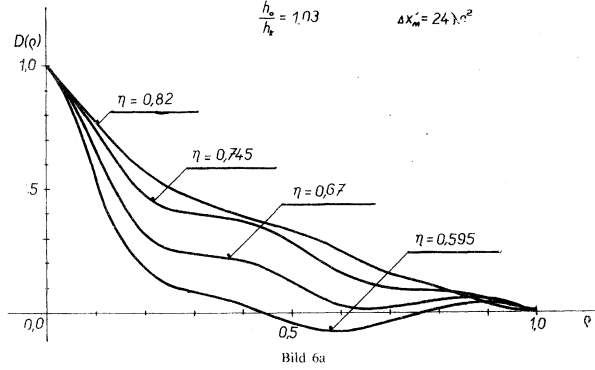
$$x_0 = 0,82 \Delta x'_m, \quad (17)$$

von der Paraxialebene liegt.

Es ist ersichtlich, daß dieser Korrektionszustand gewissermaßen von demjenigen unterschieden wird, der für den besten gehalten wird, d. h. [s. 2]

$$h_0 = 1, \quad \Delta x'_m = 24 \lambda c^2, \quad x_0 = 0,8 \Delta x'_m, \quad (18)$$

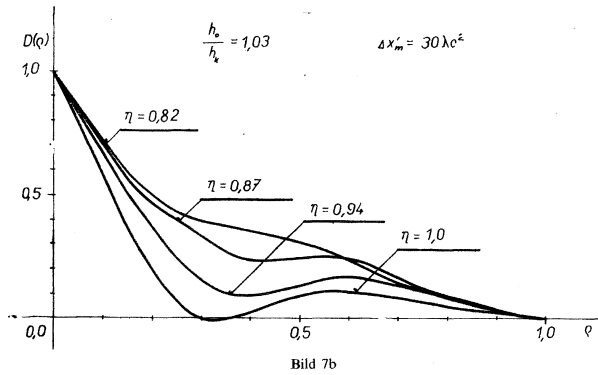
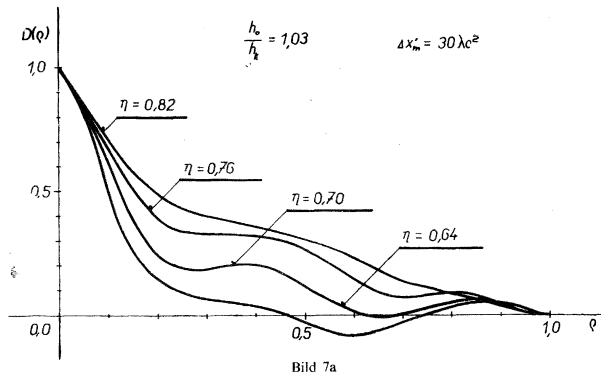
$$\frac{h_2}{h_1} = 1,03 \quad \Delta x'_m = 24 \lambda c^2$$



resp. [s. 6]

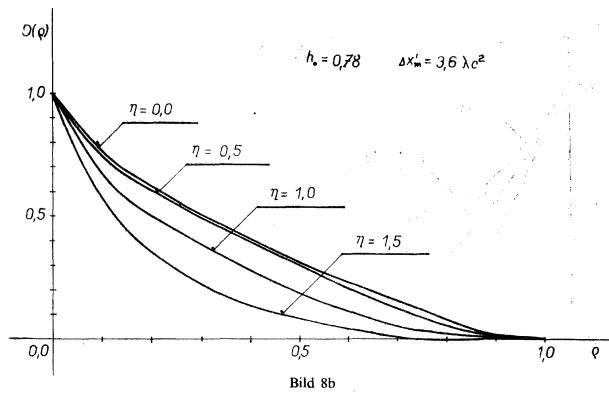
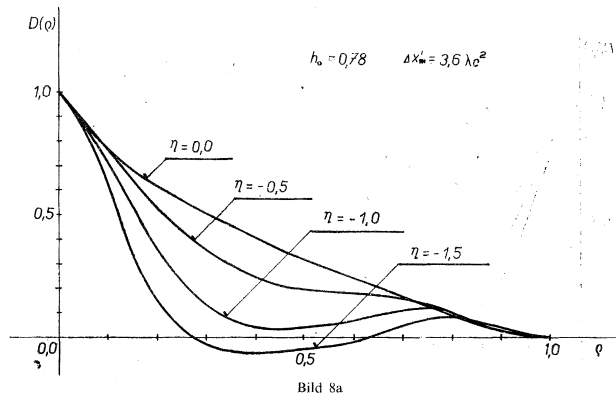
$$W_{40} = -\frac{3}{2} W_{60}, \quad W_{60} = 4, \quad W_{20} = \frac{3}{5} W_{60}. \quad (19)$$

Die der Toleranzgrenze (10) entsprechende Abhängigkeit zwischen der sphärischen Aberration $\Delta x'_m$ und der Korrektionshöhe h_0 wird mit der vollgezogenen Kurve im Bild 3 veranschaulicht. Die schraffierte Kurve gibt die Lage der günstigsten Bildebene an. Sowohl $\Delta x'_m$ als auch x_0 sind im Vielfachen λc^2 gegeben.



Aus den Bildern 4, 5, 6, 7 können wir die Übertragung der Raumfrequenzen q [s. 9] im Falle unserer besten Korrektur (15) bewerten. Die Übertragungsfunktion (9) wurde in der günstigsten Bildebene und ihrer Umgebung für verschiedene Werte der Aberration Δx_m bestimmt.

Aus dem Bild 3 kann man weiter ersehen, daß sich für die Korrektur $h_0 = 0,78$



die beste Bildebene in der Lage der Paraxialebene befindet. Im Bild 8 wird die Übertragungsfunktion für diesen Korrektionszustand in der Paraxialebene und ihrer Umgebung veranschaulicht.

Die bekannte Toleranzgrenze $\Delta x'_m = 24\lambda c^2$ erreicht man, nach dem Bild 3, im Intervall der Korrektionshöhen

$$1 \cong \frac{h_0}{h_k} \leq 1.07. \quad (20)$$

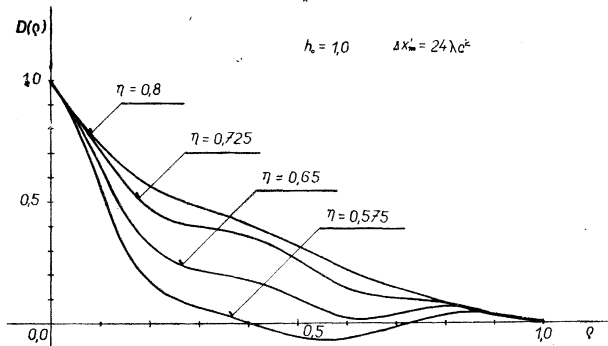


Bild 9a

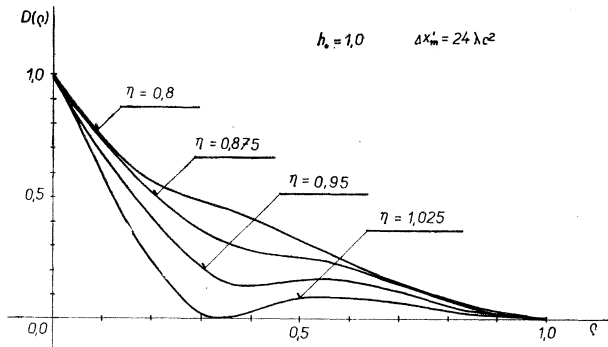
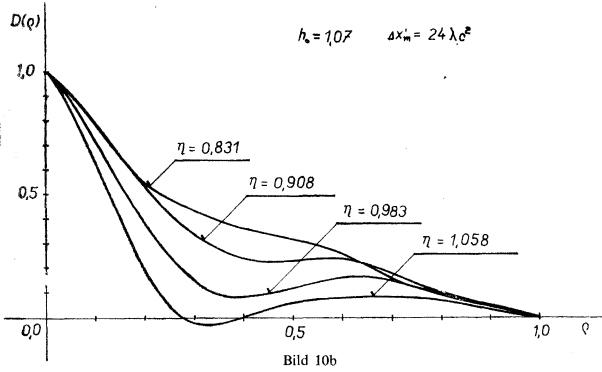
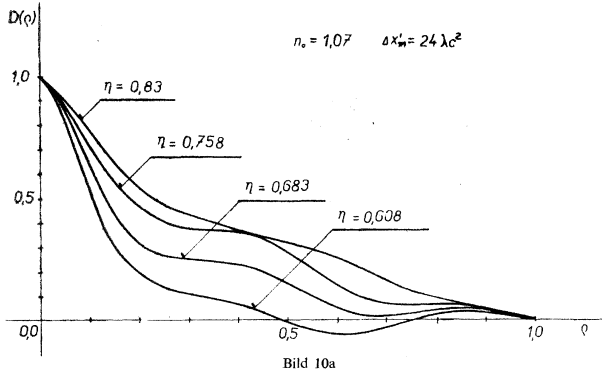


Bild 9b

Die Übertragung für diese Korrekturen, d. h. für $h_0 = 1$ und für $h_0 = 1,07$, wird im Bild 9 und 10 dargestellt.

Vergleichen wir jetzt die Übertragung in der günstigsten Bildebene für die drei Korrekturen $\frac{h_0}{h_k} = 1$, $\frac{h_0}{h_k} = 1,03$ und $\frac{h_0}{h_k} = 1,07$ im Fall der gleichen Aberration $\Delta x'_m = 24 \lambda c^2$. Aus dem Bild 11 kann man ersehen, daß die Korrektur $\frac{h_0}{h_k} = 1,07$ (die punktierte Kurve) günstiger für die Abbildung der niedrigen und höheren



Frequenzen ist, im Gegenteil für die mittleren Raumfrequenzen erweist sich besser die Randkorrektur $\frac{h_0}{h_k} = 1$ (die schraffierte Kurve). Man kann sagen, daß unsere Korrektur $h_0 = 1,03h_k$ sowie für niedrige und höhere, als auch für mittlere Raumfrequenzen fast gleich günstig ist (die vollgezogene Kurve).

Diese Tatsache hat einen bestimmten praktischen Bereich. D. h. nämlich, daß bei kleinerer Veränderung der Korrektionshöhen im obengenannten Gebiet (20) die Qualität der Abbildung in der günstigsten Bildebene fast gleichwertig bleibt. Wenn man die Korrektionshöhe $h_0 = 1,03h_k$ in der Richtung zur Randhöhe h_k bewegt, wird dabei die Abbildung der mittleren Frequenzen verbessert und die Lage der günstigsten Bildebene wird zur Paraxialebene verschoben. Im Gegenteil bei der Veränderung der Korrektionshöhe zum Wert $1,07h_k$ werden die niedrigen und höheren Frequenzen besser abgebildet und die Lage der günstigsten Bildebene wird in der Richtung von der Paraxialebene verschoben.

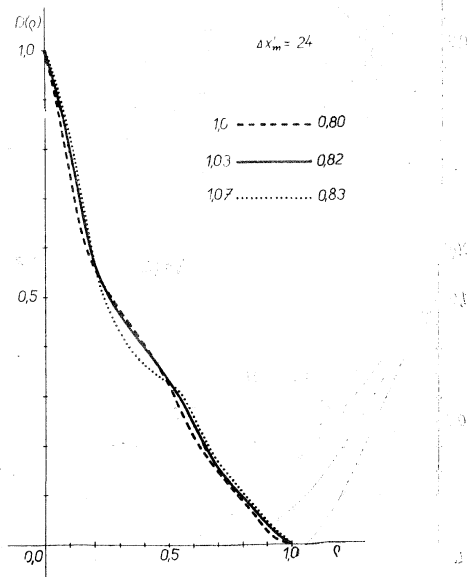


Bild 11

Bei den Systemen mit der sphärischen Aberration der siebenten Ordnung haben wir im allgemeinen zwei Korrektionshöhen h_0 und h'_0 (Bild 12). Die Größe der sphärischen Aberration charakterisieren wir meistens durch den Wert der Aberration für den Rand der Pupille $\Delta x'_k$. In diesem Fall führen wir die Hilfsgrößen

$$P_0 = q_0 + q'_0, \quad Q_0 = q_0 \cdot q'_0, \quad (21)$$

ein, wobei

$$q_0 = \left(\frac{h_0}{h_k}\right)^2 \quad \text{und} \quad q'_0 = \left(\frac{h'_0}{h_k}\right)^2, \quad (22)$$

die Korrektionszonen für die paraxiale Bildebene (Bild 12) bestimmen. Im Gegenteil, wenn wir die Korrektionskoeffizienten P_0 und Q_0 und die Größe der Aberration $\Delta x'_k$

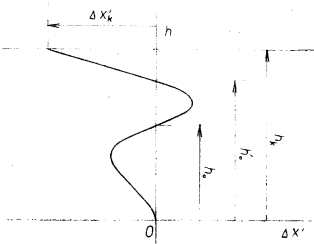


Bild 12

kennen, sind wir imstande, den Verlauf der sphärischen Aberration nach der Beziehung [s. 2]

$$\Delta x' = q(q^2 - P_0 q + Q_0) \frac{\Delta x_k}{M} \quad (23)$$

festzustellen, wo

$$M = 1 - P_0 + Q_0, \quad (24)$$

ist.

Die Wellenaberration kann man dann in der Form

$$W(q) = W_{20}q + W_{40}q^2 + W_{60}q^3 + W_{80}q^4, \quad (25)$$

schreiben, oder auch

$$kW(q) = \pi \frac{\Delta x'_k}{\lambda c^2} (A_1 q + A_3 q^2 + A_5 q^3 + A_7 q^4), \quad (26)$$

wobei

$$A_1 = -\frac{1}{4} \eta, \quad A_3 = \frac{Q_0}{8M}, \quad A_5 = -\frac{P_0}{12M}, \quad A_7 = \frac{1}{16M} \quad (27)$$

gilt [s. 9].

Vom Standpunkt des Strehlschen-Kriteriums bekommt man im Fall dieser Korrektur die Toleranzgrenze

$$\Delta x'_k = \frac{12\lambda c^2}{\sqrt{35A_3^2 + 81A_5^2 + 112A_7^2 + 105A_3A_5 + 120A_3A_7 + 189A_5A_7}}, \quad (28)$$

wobei die Lage der günstigsten Bildebene aus der Beziehung

$$A_1 = -\frac{1}{10}(10A_3 + 9A_5 + 8A_7) \quad (29)$$

bestimmt ist. [s. 8]. Die Toleranzwerte der Aberration $\Delta x'_k$ (28) in der Abhängigkeit von den Korrektionskoeffizienten P_0, Q_0 werden im Bild 13 dargestellt. Z. B. längs der Kurve 60 ist der Wert der höchstzulässigen Randaberration $\Delta x'_k = 60\lambda c^2$, ähnlich längs der Kurve 24 ist $\Delta x'_k = 24\lambda c^2$.

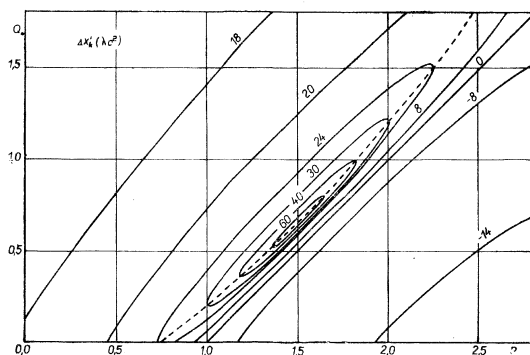


Bild 13

Wenn wir jetzt vom Standpunkt der Toleranzbeziehung (28) den günstigsten Korrektionsumstand des optischen Systems untersuchen [s. 9], bekommen wir die Gleichungen der günstigsten Korrektion P_0, Q_0

$$Q_0 = \frac{9P_0 - 7}{13 - 2P_0} \quad (30)$$

und

$$Q_0 = \frac{1}{5}(P_0^2 + 2P_0 - 2). \quad (31)$$

Als der Verlauf der Funktionen (30) und (31) fast identisch ist, werden wir weiter nur die günstigsten Korrekturen beachten, die durch die Gleichung (31) bestimmt sind. Folglich die im Bild 13 schraffierte Kurve ergibt die Werte der günstigsten Korrektur P_0, Q_0 (31). Längs dieser Kurve ändert sich die Qualität des Systems nur allmählich, während die Größe $\Delta x'_k$ in der senkrechten Richtung zu dieser Kurve sehr heftig sinkt. Der Verlauf der Toleranzwerte von der Aberration $\Delta x'_k$ längs der schraffierten Kurve wird im Bild 14 veranschaulicht. Für beliebige P_0 bestimmt man den zustän-

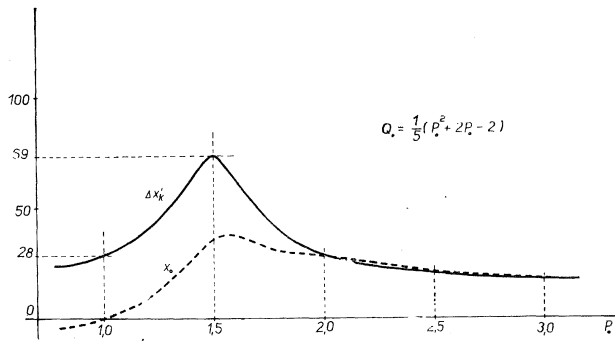


Bild 14

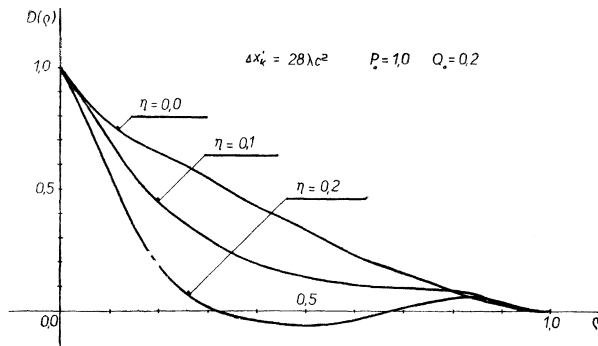


Bild 15a

digen Wert Q_0 aus der Beziehung (31). Die beste Korrektion überhaupt tritt für $P_0 = 1,5$ und $Q_0 = 0,65$ ein, wobei der maximale Wert der Aberration $\Delta x'_k = 69\lambda c^2$ ist.

Die schraffierte Kurve im Bild 14 bezeichnet die Lage der günstigsten Bildebene. Aus demselben Bild kann man also herauslesen, daß die günstigste Korrektion überhaupt, bei der sich als die beste Bildebene die Paraxialebene erweist, die Korrektion $P_0 = 1,0$ und $Q_0 = 0,2$ ist. Die Übertragung in der Paraxialebene und ihrer

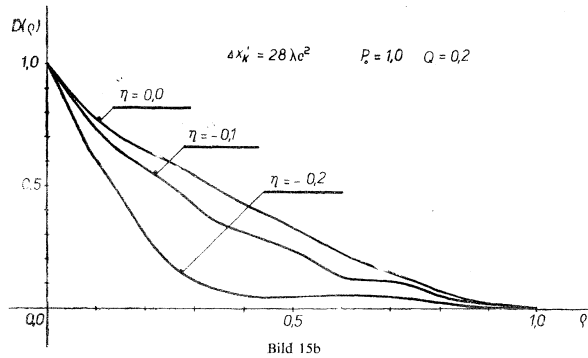


Bild 15b

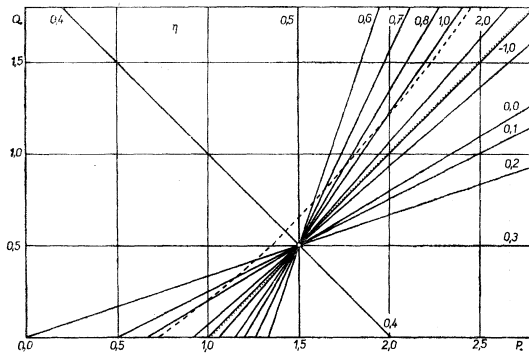


Bild 16

Umgebung für diesen Fall der Korrektur bestätigt unsere Schlussfolgerungen (Bild 15).

Die Lage der günstigsten Bildebene für den Fall, daß die Randaberration $\Delta x'_k$ die Toleranzgrenze aus dem Bild 14 nicht überschreitet, kann man mit Hilfe der Beziehung (29) bestimmen, oder aus dem Liniendiagramm im Bild 16 ablesen. Z. B. längs der Linie 0,0 liegen alle Korrekturen P_0, Q_0 für welche die Paraxialebene die günstigste

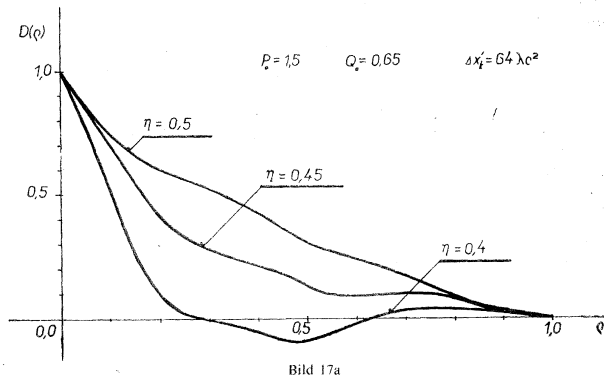


Bild 17a

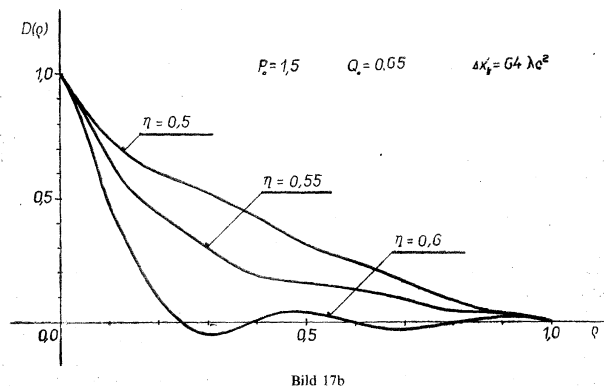


Bild 17b

Bildebene ist. Im Gegenteil für die Korrektur $P_0 = 1,5$ und beliebige Q_0 ist immer $x_0 = 0,5 \Delta x'_k$ usw.

Wie wir sehen können, liegt an dieser Linie auch der Schnittpunkt mit der Kurve der besten Korrektur (die schraffierte Kurve), dem die beste Korrektur überhaupt ($P_0 = 1,5$ und $Q_0 = 0,65$) entspricht. Im Bild 17 werden die Übertragungsfunktionen für das optische System mit der optimalen Korrektur der sphärischen Aberration dargestellt, wobei der Wert der sphärischen Aberration $\Delta x'_k = 64\lambda c^2$ nicht das Toleranzkriterium (28) überschreitet.

LITERATUR

- [1] *Havelka B.*: Geometrická optika I, ČSAV Praha 1955.
- [2] *Havelka B.*: Tři práce o kvalitě optického obrazu. Rozpravy ČSAV, Praha 1956.
- [3] *Maréchal et Francon*, Diffraction structure des images, Paris 1960.
- [4] *Hopkins H. H.*: Proc. Roy. Soc. B 70 (1957) 449.
- [5] *Linfort E. H.*: Optica Acta 1 (1963) 77.
- [6] *Barakat R.*: J. Opt. Soc. Amer. 54 (1964) 38.
- [7] *Rosenhauer, Rosenbruch and Sinder-Plasmann.*: Appl. Optics 5. (1966) 415.
- [8] *Keprt J.*: Optik 25 (1967) 502.
- [9] *Keprt J.*: Optik 27 (1968) 213.

Shrnutí

NEJPŘÍZNIVĚJŠÍ KOREKCE OTVOROVÉ VADY Z HLEDISKA ZOBRAZENÍ BODU

JIRÍ KEPRT

Průběh otvorové vady $\Delta x'$ s jednoduchou korekcí, resp. jednou korekční výškou h_0 , aproximujeme parabolou čtvrtého stupně (obr. 1). Velikost pak charakterizujeme maximální vzdáleností $\Delta x'_m$ od Gaussovy roviny, přičemž polohu obrazové roviny určuje veličina η , resp. $x_0 = \eta \Delta x'_m$, což je vzdálenost obrazové roviny od paraxiální obrazové roviny (obr. 2).

Podmínku dokonalého zobrazení bodu

$$I \geq 0,8I_0,$$

kde I je intenzita ve středu ohybového obrazce bodu zobrazeného soustavou, která je zatížena otvorovou vadou a I_0 je intenzita ve středu difrakčního obrazce bodu, zobrazeného soustavou fyzikálně dokonalou, splňuje jen taková soustava, která vyhovuje korekcím, resp. tolerancím, jež jsou naznačeny na obr. 3. To zn. pro danou korekční výšku h_0 nesmí překročit velikost maximální otvorové vady $\Delta x'_m$ hodnotu naznačenou plnou čarou. Polohu nejpříznivější obrazové roviny je pak možno sta-

novit ze vztahu (9), resp. odečíst z obr. 3 (čárkovaná křivka). Podle obr. 3 se jeví jako nejpříznivější korekce $h_0 = 1,03h_k$, neboť odpovídá maximu toleranční hodnoty $\Delta x'_m$. Přenos prostorových frekvencí pro tento případ korekce otvorové vady je znázorněn na obr. 4, 5, 6, 7.

U soustav s dvojnásobnou korekcí otvorové vady máme obecně dvě korekční výšky h_0 a h'_0 . Velikost otvorové vady nejčastěji charakterisujeme velikostí vady pro okraj pupily $\Delta x'_k$. Zavádíme přitom pomocné veličiny P_0, Q_0 definované vztahy (21), (22). Známe-li naopak korekční koeficienty P_0, Q_0 a velikost vady $\Delta x'_k$, můžeme ze vztahu (23) určit velikost otvorové vady pro libovolnou dopadovou výšku.

Toleranční hodnoty otvorové vady $\Delta x'_k$ jsou pro koeficienty P_0, Q_0 uvedeny na obr. 13. Nepřekročí-li velikost vady $\Delta x'_k$ hodnoty uvedené v tomto diagramu, je možno zobrazení bodu považovat za dokonalé. Polohu nejpříznivější obrazové roviny pak čteme z přímkového diagramu na obr. 16. Kombinací obou diagramů stanovíme nejpříznivější oblast korekcí P_0, Q_0 a polohu nejpříznivější obrazové roviny.

Резюме

САМЫЕ БЛАГОПРИЯТНЫЕ КОРРЕКЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ АБЕРРАЦИИ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ТОЧКИ

ЙИРЖИ КЕПРТ

Ход сферической аберрации $\Delta x'$ с простой коррекцией или с одной коррекционной высотой h_0 аппроксимируется параболой четвертой степени (карт. 1). Величина потом характеризуется максимальным расстоянием $\Delta x'_m$ от плоскости Гауса, причем положение плоскости изображения определяет величина η , или $x_0 = \eta \Delta x'_m$, значит, это расстояние плоскости изображения от паракиальной плоскости (карт. 2).

Условие совершенного изображения точки

$$I \geq 0,8I_0,$$

где I является интенсивностью в центре изгибаемой фигуры точки, изображенной системой, которая обремененная сферической аберрацией, и I_0 является интенсивностью в центре дифракционной фигуры точки, изображенной физически совершенной системой, исполняет только такая система, которая удовлетворяет коррекциям или толерантностям, которые приведены на картине 3. Это значит, что для данной коррекционной высоты h_0 не может величина максимальной сферической аберрации $\Delta x'_m$ переступить значение, обозначенное полной линией. Положение самой благоприятной плоскости изображения можно потом установить из отношения (9), или определить по картине 3

(штриховая кривая). По картине 3 самой благоприятной оказывается коррекция $h_0 = 1,03h_k$, потому что она соответствует максимуму толерантного значения. Процесс переноса пространственных частот для этого случая коррекции сферической aberrации на картинах 4, 5, 6, 7.

У систем с двойной коррекцией сферической aberrации встречаются вообще две коррекционные высоты h_0 и h'_0 . Величина сферической aberrации чаще всего характеризуется величиной aberrации для кромки зрачка. Притом вводятся вспомогательные величины P_0, Q_0 , определенные отношениями (21), (22). Наоборот, если мы знаем коэффициенты коррекции P_0, Q_0 и величину aberrации $\Delta x'_k$, мы можем из отношения (23) определить величину сферической aberrации для любой высоты падения.

Толерантные значения сферической aberrации $\Delta x'_k$ для коэффициентов P_0, Q_0 приведены на картине 3. Если величина aberrации $\Delta x'_k$ не переступит величину, приведенную в этой диаграмме, то изображение точки можно считать совершенным. Положение самой благоприятной плоскости изображения потом определяется по соответствующей диаграмме на картине 16. При помощи комбинаций обеих диаграмм можно потом установить самую благоприятную область коррекций P_0, Q_0 и положения самой благоприятной плоскости изображения.