Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Svatoslav Staněk

Bemerkung zum Tschaplyginschen Satz über Differentialungleichungen

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 12 (1972), No. 1, 41--44

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120014`

1972 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 37

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

BEMERKUNG ZUM TSCHAPLYGINSCHEN SATZ ÜBER DIFFERENTIALUNGLEICHUNGEN

SVATOSLAV STANĚK

(Eingelangt am 11. 1. 1971)

Gewidmet Herrn Prof. Dr. Laitoch zum 50. Geburstag

Es gibt eine beträchtliche Menge von Algorithmen die Aufstellung von Funktionenfolgen ermöglichen, welche die Lösung der Cauchyschen Aufgabe

$$y' = f(x, y), y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

im Intervalle $j = \langle t_0, t_0 + a\rangle$ $(a > 0)$ monoton von oben bzw. von unten approximieren (Staněk (1969)). Die Eigenschaft einer Funktion eine obere bzw. untere Approximation zu sein wird mittels Tschaplyginschen Satzes über Differentialungleichungen bewiesen (Lakshmikantham - Leela (1969), Staněk (1969), Szarski (1967)). Wenn $u = u(t)$ in j stetig differenzierbare Funktion mit $u(t_0) = y_0$ ist und die Aufgabe (1) eine einziege Lösung besitzt, kann man laut diesen Satz mittels der Funktion $M(t) = u'(t) - f(t,u(t))$ entscheiden, ob in j $u(t) \geq y(t)$ bzw. $u(t) \leq y(t)$ gilt. Für $M(t) \geq 0$ $(M(t) \leq 0)$ gilt nämlich $u(t) \geq y(t)$ $(u(t) \leq y(t))$. In dieser Arbeit wollen wir zeigen inwiweit es möglich ist Voraussetzungen $M(t) \geq 0$ bzw. $M(t) \leq 0$ zu vermindern, wenn gleichzeitig in j die Ungleichheiten $u(t) \geq y(t)$ bzw. $u(t) \leq y(t)$ erhalten werden sollen.

Wir beweisen zuerst ein Lemma.

Lemma 1. *Die Funktionen $S(t)$ (≥ 0), $\mu(t)$ (≥ 0), $w(t)$ seien in j stetig. Wenn für jedes $t \in j$ die Ungleichheit*

$$w(t) \geq \mu(t) \int_{t_0}^{t} S(s)w(s)ds \tag{2}$$

gilt, so ist in j auch $w(t) \leq 0$ richtig.

Beweis. Die Funktion $y \equiv 0$ ist die einzige Lösung der Integralgleichung

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \mu(t)S(s)y(s)ds\,.$$

Die Behauptung des Lemmas folgt also unmittelbar aus dem Satze 5.3.2. in Lakshmikantham - Leela (1969).

Korollar. Wenn alle Voraussetzungen des Lemmas 1 erfüllt sind, nur anstatt (2) in j die Ungleichheit

$$w(t) \leq \mu(t) \int_{t_0}^{t} S(s)w(s)ds$$

gilt, ist in j die Ungleichheit $w(t) \geq 0$ richtig.

Satz 1. *$f(t, y)$ sei definiert und stetig samt der Ableitung $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ im Bereiche $\mathscr{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathscr{D}$. Es sei $y = y(t)$ die Lösung der Aufgabe (1) in j. Es sei weiter $u = u(t)$ eine in j stetig differenzierbare Funktion, für welche $(t, u(t)) \in \mathscr{D}$ für alle $t \in j$, $u(t_0) = y_0$ ist. Wir setzen $M(t) = u'(t) - f(t, u(t))$ und definieren die Funktion $Q(t)$ durch*

$$(3) \qquad Q(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t, u(t)) - f(t, y(t))}{u(t) - y(t)} & \text{für } u(t) \neq y(t) \\ \dfrac{\partial f(t, u(t))}{\partial y} & \text{für } u(t) = y(t)\,. \end{cases}$$

Die Ungleichheit $u(t) \geqq y(t)$ gilt dann in j gerade in dem Falle, wenn eine in j stetige Funktion $P(t)$ existiert, $P(t) \leqq Q(t)$ in j so dass die Relation

$$(4) \qquad \int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds \geqq 0$$

in j erfüllt ist.

Beweis. Die durch die Vorschrift (3) definierte Funktion $Q(t)$ ist stetig in j. $w(t) = u(t) - y(t)$ ist die Lösung der Cauchyschen Aufgabe

$$(5) \qquad w'(t) = Q(t)w(t) + M(t), \quad w(t_0) = 0.$$

Es sei nun $w(t) \geqq 0$ in j. Durch Auflösung der Aufgabe (5) erhalten wir für $w(t)$ den Ausdruck

$w(t) = \int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} Q(x)dx\right\} ds$, wir haben also $\int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} Q(x)dx\right\} ds \geqq 0$;

wenn wir $P(t) = Q(t)$ in j setzen, kommt daraus die Ungleichheit (4) hervor.

Umgekehrt, wenn eine auf j stetige Funktion $P(t) \leqq Q(t)$ existiert, die in j auch der Relation (4) genügt, bekommen wir mit Hilfe von (5)

$$(6) \qquad \int_{t_0}^{t} w'(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds - \int_{t_0}^{t} Q(s)w(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds = \\ = \int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds\,.$$

Durch partielle Integration im ersten Glied von (6) kommen wir zur Relation

$$\int_{t_0}^{t} w'(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds = w(t) + \int_{t_0}^{t} P(s)w(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds\,.$$

Daraus und aus (6) folgt

$$w(t) - \int_{t_0}^{t} (Q(s) - P(s))w(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds = \int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds\,.$$

Setzen wir nun $S(t) = (Q(t) - P(t)) \exp\left\{\int_{t}^{t_0} P(x)dx\right\}$, so dass $S(t) \geqq 0$ in j bleibt. Des weiteren gilt

$$(7) \qquad w(t) \geqq \exp\left\{\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right\} \int_{t_0}^{t} S(s)w(s)ds\,.$$

Aus der letzten Ungleichheit und aus Lemma 1 folgt $w(t) \geqq 0$, was zu beweisen war.

Bemerkungen zum Satz 1.

1. Ist $M(t) \geqq 0$ in j, so gilt $\int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds \geqq 0$ für jede stetige Funktion $P(t)$ und also auch $u(t) \geqq y(t)$ in j.

2. Den Ausdruck auf der linken Seite von (4) kann man auch in der Form $\exp\left\{\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right\} \int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t_0} P(x)dx\right\} ds$ schreiben; daraus folgt unmittelbar, dass die Ungleichheit (4) im Satz 1 durch die Ungleichheit

$$\int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t_0} P(x)dx\right\} ds \geqq 0$$

ersetzt werden kann.

3. Die Verifizierung der Ungleichheit $P(t) \leqq Q(t)$ kann manchmal umständlich sein. Diese Ungleichheit folgt aber z. B. aus der Relation $P(t) \leqq \inf_{(t,y)\in\mathscr{D}} \frac{\partial f}{\partial y}$. Wenn auf $\mathscr{D}$ $\frac{\partial f}{\partial y} \geqq m$ mit Konstanten m gilt, genügt für $u(t) \geqq y(t)$ in j die Gültigkeit von $\int_{t_0}^{t} M(s)e^{m(t-s)} ds \geqq 0$; für $m = 0$ geht die letzte Ungleichheit in die einfache Form $\int_{t_0}^{t} M(s)ds \geqq 0$ über.

Satz 2. *Die Voraussetzungen von Satz 1 seien erfüllt. Auch $M(t)$, $Q(t)$ mögen ihre Bedeutung aus diesem Satz behalten. Die Ungleichheit $u(t) \leqq y(t)$ gilt in j genau dann, wenn eine in j stetige Funktion $P(t)$, $P(t) \leqq Q(t)$ existiert, so dass in j die Ungleichheit*

$$\int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds \leqq 0 \tag{8}$$

gilt.

Beweis. Wenn wir $w(t) = u(t) - y(t)$ setzen, kann der Beweis ganz analog wie der des Satzes 1 genführt werden. Aus der jetzt vorausgesetzetn Ungleichheit $\int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds \leqq 0$ erhalten wir in diesem Falle anstatt (7) die Relation

$$w(t) \leqq \exp\left\{\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right\} \int_{t_0}^{t} S(s)w(s)ds.$$

Daraus und aus dem Korollar von Lemma 1 sehen wir leicht, dass $w(t) \leqq 0$ in j ist.

Bemerkungen zum Satz 2.

1. Wenn $M(t) \leqq 0$ in j gilt, ist $\int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds \leqq 0$ für jede stetige Funktion $P(t)$. Daraus folgt auch das Erfülltsein der Ungleichheit $u(t) \leqq y(t)$ in j.

2. Die Relation (8) im Satz 2 kann durch

$$\int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t_0} P(x)dx\right\} ds \leqq 0$$

ersetzt werden.

3. Der Bemerkung 3 zum Satz 1 nach genügt für die Gültigkeit der Ungleichheit $u(t) \leqq y(t)$ in j die Richtigkeit von $\int_{t_0}^{t} M(s)e^{m(t-s)} ds \leqq 0$ in diesem Intervalle, wo $m \leqq \frac{\partial f}{\partial y}$. Für $m = 0$ haben wir wieder die einfache genügende Bedingung $\int_{t_0}^{t} M(s)ds \leqq 0$.

LITERATURVERZEICHNIS

Lakshmikantham V., Leela S. (1969): Differential and Integral Inequalities. Academic Press New York and London 1969, Vol. I.

Staněk S. (1969): O jistém zobecnění Picard-Lindelöfovy metody postupných aproximací řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$. Časopis pro pěstování matematiky, 94, No 1, 1969, 1–14.

Szarski J. (1967): Differential Inequalities. PWN Warszawa 1967.

SHRNUTÍ

POZNÁMKA K ČAPLYGINOVĚ VĚTĚ O DIFERENCIÁLNÍCH NEROVNOSTECH

SVATOSLAV STANĚK

V práci je dokázána věta:

Věta. *Buď $f(x, y)$ funkce definovaná a spojitá společně s parciální derivací $\frac{\partial f}{\partial y}$ v oblasti $\mathscr{D}$. Buď $y = y(t)$ řešení úlohy (1) na $j = \langle t_0, t_0 + a\rangle$, $(t_0, y_0) \in \mathscr{D}$. Buď $u = u(t)$ funkce se spojitou derivací na j, $(t, u(t)) \in \mathscr{D}$ pro každé $t \in j$, $u(t_0) = y_0$. Položme $M(t) = u'(t) - f(t, u(t))$ a funkci $Q(t)$ definujeme na j předpisem*

$$Q(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t, u(t)) - f(t, y(t))}{u(t) - y(t)} & \text{pro } u(t) \neq y(t) \\[2ex] \dfrac{\partial f(t, u(t))}{\partial y} & \text{pro } u(t) = y(t)\,. \end{cases}$$

Pak nerovnost $u(t) \geqq y(t)$ $(u(t) \leqq y(t))$ platí na j právě když existuje na j spojitá funkce $P(t)$, $P(t) \leqq Q(t)$ a na j je splněna nerovnost

$$\int_{t_0}^{t} M(s) \exp\left\{\int_{s}^{t} P(x)dx\right\} ds \geqq 0 \ (\leqq 0)\,.$$

Práce se zabývá i praktickými otázkami využití uvedené věty.