Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica

Ján Andres; Jindřich Palát

Über die Existenz einer begrenzten und periodischen Lösung der nichtlinealisierten Jacobischen Gleichung mit negativ definitivem Träger

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 26 (1987), No. 1, 85--93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120186

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM

1987 Mathematica XXVI Vol. 88

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky
přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Miroslav Laitoch, Prof., RNDr., CSc.

ÜBER DIE EXISTENZ EINER BEGRENZTEN UND PERIODISCHEN LÖSUNG DER NICHTLINEALISIERTEN JACOBISCHEN GLEICHUNG MIT NEGATIV DEFINITIVEM TRÄGER

JAN ANDRES und JINDŘICH PALÁT

(Eingelangt am 28. März 1986)

Professor M.Laitoch zum 65. Geburtstag gewidmet

1. Einführung

Wie bekannt [1] die Jacobische Gleichung

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \tag{1}$$

hat für $q(t) \leq 0$ unendlich viele unbegrenzte Lösungen. Damit dagegen alle Lösungen der verschiedenartig nichtlinealisierten Gleichung (1) begrenzt wären, forderten alle Autoren (siehe z. B. [2] und dort zitierte Hinweise), dass $q(t) \geq 0$ ist. Angesichts dieser Tatsachen stellten wir uns die Frage, welcher Form die genügenden Bedingungen sein sollen, die die Existenz wenigstens einer begrenzten Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} + q(t)x = p(t,x) \tag{2}$$

garantieren, wo $q(t)$, $p(t,x)$ überall stetige und mit Rücksicht auf t begrenzte Funktionen sind und

$$q \leq -q(t) \leq Q \qquad \text{für} \quad t \geq 0 , \tag{3}$$

wo q, Q geeignete positive Konstanten sind. Ausserdem im Falle in dem

$$q(t+\theta) = q(t) \ , \quad p(t+\theta,x) = p(t,x) \ , \tag{4}$$

diese genügenden Bedingungen auch die Existenz der θ-periodischen Lösung implizieren würden (unter der Voraussetzung des Verlängerungsvermögens der ersten Ableitungen aller Lösungen der Gleichung (2)) nach dem klassischen Masserschen Satz [3]. Soweit sich einige Autoren bemühten (z.B. [4]) dieses Problem mit Ausnützung der Kenntnis des Fundamentalsystems von Lösungen der Gleichung (1) zu lösen, gelangten sie zu den Voraussetzungen, die mehr oder weniger impliziten Charakters sind. Ziel unserer Arbeit ist zu zeigen, dass es genügt für die Existenz einer begrenzten Lösung der Gleichung (2) weiter vorauszusetzen, dass

$$\limsup_{|x| \to \infty} \left| \frac{\partial p(t,x)}{\partial x} \right| : = q_1 < q \leq - q(t) \leq Q \tag{5}$$

Bemerkung 1. Es folgt aus den Bedingungen (3) und (5), dass für $A > q_1$ eine solche $R > 0$ existiert, dass für $|x| > R$

$$|p(t,x)| - |p(t,\pm R)| \leq \left| \int_R^x \left| \frac{\partial p(t,x)}{\partial x} \right| dx \right| < A(|x| - R),$$

d.h.

$$|p(t,x)| < |p(t,\pm R)| + A(|x| - R) \ . \tag{6}$$

Setzen wir in (6) $A: = q$, dann erhalten wir mit Rücksicht auf (3) die Ungleichung

$$|p(t,x)| < P + q|x| < P + Q|x|, \tag{7}$$

wo $\quad |p(t,\pm R)| < P \quad$ ist.

Setzen wir in (6) $A: = q - \varepsilon$, wo $0 < \varepsilon < q - q_1$, dann erhalten wir mit Rücksicht auf (3) für $|x| > R$ die Ungleichung

$$|p(t,x)| < P - \varepsilon|x| - q(t)|x|$$

und für $|x| > \max(R, P/\varepsilon)$ ergibt sich

$$|p(t,x)| < - q(t)|x|. \tag{8}$$

Schliesslich ergibt sich aus (5), dass für $|x| > R$ die Funktion $p(t,x)$ der Lipschitzschen Bedingung in bezug auf x genügen wird, d.h.

$$|p(t,x_2) - p(t,x_1)| < q|x_2 - x_1| . \qquad (9)$$

Im weiteren werden wir voraussetzen, dass $R > 0$ derart gross ist, dass für $|x| > R$ die Ungleichungen (7) - (9) simultan gelten werden.

Wir verwenden dazu die in [5] abgeleitete Methode, welche in unserem Spezialfall folgende Form hat:

<u>Lemma 1</u>. Damit die Gleichung (2) eine begrenzte Lösung hat, genügt es vorauszusetzen, dass

$$\limsup_{|x| \to \infty} \left| \frac{\partial p(0,x)}{\partial x} \right| < q \leq |q(0)| , \qquad (10)$$

die gleichmässige a priori Begrenztheit aller Lösungen $x(t)$ und ihrer Ableitungen $\dot{x}(t)$ der Gleichung (2) zu beweisen, die die einparametrige Klasse der Randbedingungen

$$x(0) = x(T) , \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) , \qquad (11)$$

unabhängig von $T \in (0, \infty)$ erfüllen.

<u>Bemerkung 2</u>. Ist $\Theta: = T$ endlich, so wird auch die Existenz von wenigstens einer Θ-periodischen Lösung der Gleichung (2) unter Voraussetzung (3) durch Lemma 1 gesichert und dies ohne Rücksicht auf das vorerwähnte Massersche Resultat [3].

<u>Bemerkung 3</u>. Die Bedingung (10) folgt unmittelbar aus (5). Man kann sich also auf den Beweis der gleichmässigen a priori Begrenztheit aller geforderten Ausdrücke beschränken.

2. Die Existenz der begrenzten Lösung

<u>Lemma 2</u>. Unter Voraussetzung von (5) impliziert die gleichmässige a priori Begrenztheit aller Lösungen $x(t)$ von (2),

(11) eine gleichmässige a priori Begrenztheit aller Ableitungen $\dot{x}(t)$.

B e w e i s. Nach der Hill's Version der Landauschen Ungleichheit [6], welche für die begrenzten $x(t) \in C^2(-\infty, \infty)$ gilt, ergibt sich

$$\|\dot{x}(t)\| \leq 4\, \|x(t)\|\, \|\ddot{x}(t)\| \quad ,$$

wo $\|.\| := \sup_{t \in \langle 0,\infty)} |.|$.

Ist $x(t)$ eine Lösung von (2) und $R > 0$ ist genügend gross, dann unter Berücksichtigung von (7), gilt

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t)\| &\leq 4\|x(t)\|\, \|\ddot{x}(t)\| = 4\|x(t)\|\, \|p(t,x(t)) - q(t)x(t)\| \leq \\ &\leq 4\|x(t)\| \left[\|p(t,x(t))\| + \|q(t)\|\, \|x(t)\| \right] < \\ &< 4\|x(t)\| \left[P + 2Q\|x(t)\| \right] , \end{aligned}$$

was die Behauptung des vorangehenden Lemmas beweist.

Lemma 3. Es gelte (5) und $R > 0$ sei genügend gross. Dann alle Lösungen von (2), (11), welche die Anfangsbedingung $|x(0)| \leq R$ erfüllen, sind im Interval $\langle 0,T \rangle$, $T \in (0,\infty)$ gleichartig begrenzt, d.h.

$$\|x(t)\| \leq R \quad \text{für} \quad t \in \langle 0,T \rangle .$$

B e w e i s. Ist die Lösung von (2) konstant, dann $\|x(t)\| = |x(0)| \leq R$ und es bleibt nichts zu beweisen.

Sei also $x(t)$ eine Lösung von (2), (11), welche für $t \in I \subset \langle 0,T \rangle$ die Ungleichheit $x(t) > R$ erfüllt. Aus der Relation (8) ergibt sich dann

$$\ddot{x}(t) = p(t,x(t)) - q(t)\, x(t) > p(t,x(t)) + |p(t,x(t))| \geq 0 ,$$

d.h.

$$\ddot{x}(t) > 0 \quad \text{für} \quad t \in I . \tag{12}$$

Sei $|x(0)| \leq R$ und der Graph der Lösung $x(t)$ von (2), (11) übergehe im Intervall I in die Halbebene $x > R$. Hier, mit Rücksicht auf (12), handelt sich dann um eine konvexe Kurve, die in den Punkt $(0,x(0)) = (T,x(T))$ nicht mehr zurückkehren kann.

Es handelt sich also um eine Lösung der Gleichung (2), die in die Menge der Lösungen von (2), (11) nicht gehört.

Ist nämlich $x(t)$ eine Lösung von (2), (11), welche die Anfangsbedingung $|x(0)| \leq R$ erfüllt, dann $x(t) \leq R$ für $t \in \langle 0,T \rangle$. Ähnlich könnte man auch $x(t) \geq -R$ für $|x(0)| \leq R$ herleiten, womit der Beweis von Lemma 3 beendet würde.

Satz 1. Es gelte (5). Dann existiert wenigstens eine begrenzte Lösung der Gleichung (2).

B e w e i s. Lemma 3 sagt, dass jede Lösung $x(t)$ von (2), (11), welche die Anfangsbedingung $|x(0)| \leq R$ mit $R > 0$ genügend gross, erfüllt, begrenzt ist.

Setzen wir daher voraus, dass $x(0) > R$ $(x(0) < -R)$. Dann, wie bekannt, folgt mit Rücksicht auf (12) der Graph dieser Lösung aus dem Punkt $(0,x(0))$ als eine konvexe (konkave) Kurve, die entweder in den Punkt $(T,X(T))$ nicht eingeht und dann $x(0) \neq x(T)$, oder sie geht wieder als eine konvexe (konkave) Kurve ein, aber dann $\dot{x}(0) \neq \dot{x}(T)$. In beiden Fällen gehört $x(t)$ nicht in die Menge der Lösungen von (2), (11).

Nach Lemma 1 und Lemma 2 folgt daraus die Satzaussage.

3. Über die Existens der 0-periodischen Lösung

In bezug auf die Bemerkung 2 lässt sich nun unmitellbar der Satz 2 aussprechen. Unter der Voraussetzung von (4) und (5) existiert wenigstens eine Θ-periodische Lösung der Gleichung (2).

In diesem Falle wollen wir zeigen, dass die Bedingung (5) aus Satz 2 für $0 < \Theta < (q+Q)^{-\frac{1}{2}}$ durch eine allgemeinere Voraussetzung

$$\limsup_{|x| \to \infty} \left| \frac{\partial p(t,x)}{\partial x} \right| < q \leq |q(t)| \leq 0 , \quad t \in \langle 0,\Theta \rangle \qquad (13)$$

sich ersetzen lässt.

Satz 3. Unter der Voraussetzung von (4) und (13) existiert wenigstens eine Θ-periodische Lösung der Gleichung (2) für $\Theta < (q+Q)^{-\frac{1}{2}}$.

B e w e i s. Da (10) ein Sonderfall von (13) ist, genügt es in bezug auf die Bemerkung 2 und Lemma 1 die gleichmässige a priori Begrenztheit der Lösung x(t) von (2), (11) und ihrer Ableitungen $\dot{x}(t)$ unabhängig von $T \in (0,\Theta)$ zu beweisen.

Dabei löse x(t) das Problem (2), (11). Nach Einsetzung in die Gleichung (2) und nach Ausführung der Integration von (2) von 0 bis T, erhalten wir

$$\int_0^T p(t,x(t))dt = \int_0^T x(t)q(t)dt \ . \tag{14}$$

Aus der Voraussetzung (13) ersieht man, dass für $|x| > R$ die Ungleichheit (7) wiederum gilt. Wählen wir daher

$$\varepsilon > 0: \ \varepsilon < |q(t)| - q, \quad t \in \langle 0,T \rangle$$

und setzen wir $R_0 := \max (R, P/\varepsilon)$.

Setzen wir voraus, dass die Lösung x(t) von (2), (11) die Ungleichheit

$$|x(t)| \geq R_0 \ , \quad t \in \langle 0,T \rangle \tag{15}$$

erfüllt.

Dann vermittels (7), (14) und (15) erhalten wir

$$\varepsilon T < \int_0^T (|q(t)| - q)dt \leq \int_0^T \frac{|x(t)|}{R_0} (|q(t)| - q)dt =$$

$$= \frac{1}{R_0} \int_0^T \left[|p(t,x(t))| - q|x(t)|\right]dt < \frac{PT}{R_0} \ .$$

Jedoch die Erfüllung der Relation $\varepsilon < P/R_0$ ist in bezug auf $R_0 \geq P/\varepsilon$ nicht möglich. Dieser Widerspruch impliziert die Tatsache, dass die Voraussetzung nicht eintreten kann. Demnach existiert ein Punkt $T_1 \in \langle 0,\Theta \rangle$ in dem

$$\min_{t\in\langle 0,\Theta\rangle} |x(t)| = |x(T_1)| \leq P/\mathcal{E} \quad . \tag{16}$$

Bezeichnen wir noch

$$P_1 := \max_{|x|\leq R_0} |p(t,x)| \quad ,$$

dann wird in bezug auf (7) überall

$$|p(t,x)| \leq \max\ (P,P_1) + q|x| \quad . \tag{17}$$

Da weiter nach Rollescher Satz stets in bezug auf (11) auch ein solcher Punkt $T_2 \in (0,\Theta)$ existiert, dass $\dot{x}(T_2) = 0$, gelten in bezug auf (16) und (17) die folgenden Ungleichheiten

$$\|x(t)\| \leq |x(T_1)| + \left\|\int_{T_1}^{t} |\dot{x}(s)|\, ds\right\| \leq R_0 + \int_0^T \left[|\dot{x}(T_2)| + \left\|\int_{T_2}^{t} |\ddot{x}(s)|\, ds\right\|\right] dt \leq$$

$$\leq R_0 + T\int_0^T \left[\|p(t,x(t))\| + \|q(t)x(t)\|\right] dt \leq R_0 + T\int_0^T \left[\max\ (P,P_1) + \right.$$

$$\left. + (q+Q)\|x(t)\|\right] dt \leq R_0 + T^2\left[\max\ (P,P_1) + (q+Q)\|x(t)\|\right] .$$

Somit ergibt sich für $T \leq \Theta < (q+Q)^{-\frac{1}{2}}$

$$\|x(t)\| \leq \frac{R_0 + \Theta^2 \max(P,P_1)}{1-\Theta^2\ (q+Q)} := D \quad , \tag{18}$$

und folglich auch

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \Theta\left[\max\ (P,P_1) + (q+Q)D\right] .$$

Dadurch ist der Beweis des Satzes durchgeführt.

4. <u>Instabilität der Θ-periodischen Lösung</u>

<u>Satz 4</u>. *Unter der Voraussetzung dass*

$$\left[q(t) - \frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right] \leq 0 \tag{19}$$

gilt für alle t, und $|x| \leq D$ (D = die Konstante aus (18)), ist die Θ-periodische Lösung instabil (im Sinne von Ljapunow).

B e w e i s. Wie bekannt [1], die Θ-periodische Lösung $\tilde{x}(t)$ wird (in)stabil dann und nur dann, wenn dasselbe für die triviale Lösung der betrachteten Gleichung (2) in der ersten Annäherung gilt, d.h.

$$\ddot{x} + \left[q(t) - \frac{\partial p(t,x)}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}(t)} \right] x = 0 \ .$$

Da für diese Hillsche Gleichung das Problem der Ljapunowschen Stabilität zur Ermittlung der Stabilität im Sinne von Lagrange [1] äquivalent ist, wird es zum Beweis der Instabilität der Lösung der oben angeführten linearen Gleichung genügen, die Existenz von wenigstens einer ihrer unbegrenzten Lösung zu beweisen. Dies, wie bereits am Anfang dieses Beitrages bemerkt wurde [1], ergibt sich direkt aus der Voraussetzung (19). Dadurch ist der Beweis durchgeführt.

LITERATUR

[1] C e s a r i, L.: Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[2] Y a m a m o t o, M., S a k a t a, S.: On the boundedness of solutions and the attractivity properties for nonlinear second-order differential equations, Mat.Japonica 27, 2 (1982) 231-251.

[3] M a s s e r a, J.L.: The existence of periodic solutions of systems of differential equations. Duke Math.J. 17 (1950), 83-97.

[4] R á b, M.: Bounds for solutions of the equations $[p(t)x']' + q(t)x = h(t,x,x')$. Arch.Math. 2, 11 (1975), 79-84.

[5] A n d r e s, J.: A useful proposition to nonlinear differential systems with a solution of the prescribed asymptotic properties. Acta UPO 25, 85 (1986), 157-164.

[6] H i l l e, E.: On the Landau-Kallman-Rota inequality. J.Approx.Theory 6 (1972), 117-122.

SOUHRN

O existenci ohraničeného a periodického řešení nelinearizované Jacobiho rovnice s negativně definitním nosičem

J a n A n d r e s, J i n d ř i ch P a l á t

V práci je dokázáno, že za předpokladu (5) existuje alespoň jedno ohraničené řešení rovnice (2), která je v případě (3) Θ-periodické a navíc v případě (19) nestabilní. Ukazuje se, že pro $\Theta < (q+Q)^{-0.5}$ lze podmínku (5) nahradit za účelem existence Θ-periodického řešení obecnějším předpokladem (13).

РЕЗЮМЕ

Об существовании ограниченного и периодического решения нелинейного уравнения Якоби с отрицательно определенным носителем

Я н А н д р е с , И н д р ж и х П а л а т

В настоящей работе доказывается методом найденным первым из авторов, что предположение (4) гарантирует существование ограниченного решения при (очевидном существовании неограниченных решений) уравнения (2) . Если имеет место (3) , то для существования Θ-периодического решения того же уравнения можно для $\Theta < (q+Q)^{-0.5}$ условие (4) заменить более общим условием (7) . Далее показывается когда Θ-периодическое решение является устойчивым.