Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica

František Machala

Über Homomorphismen der Kontexte

*Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, Vol. 33 (1994), No. 1, 95--104

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120302

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS FACULTAS RERUM NATURALIUM
1994 Mathematica XXXIII Vol. 114

# ÜBER HOMOMORPHISMEN DER KONTEXTE

František MACHALA

(Vorgelegt am 20. Juli 1993)

**Abstract**

Different types of homomorphisms of contexts and conections among them are studied.

**Key words:** Context, homomorphism.

**MS Classification:** 06A15, 08A35.

**Definition 1** Ein *Kontext* (eine Inzidenzstruktur) ist ein Tripel $(G, M, I)$, wobei $G, M$ nichtleere Mengen sind und $I \subseteq G \times M$.

**Definition 2** Es sei $\mathcal{J} = (G, M, I)$ ein Kontext. Wir setzen

$$A^{\uparrow} = \{m \in M \mid g\ I\ m \quad \forall g \in A\} \qquad \text{bzw.} \qquad B^{\downarrow} = \{g \in G \mid g\ I\ m \quad \forall m \in M\}$$

für jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq G$ bzw. $B \subseteq M$ und $\emptyset^{\uparrow} = M$ bzw. $\emptyset^{\downarrow} = G$ für die leere Menge $\emptyset$. Sind $g, m$ Elemente von $G, M$, dann schreiben wir kurz $g^{\uparrow} := \{g\}^{\uparrow}$, $m^{\downarrow} := \{m\}^{\downarrow}$.

**Definition 3** Ein Kontext $\mathcal{J} = (G, M, I)$ heißt *bereinigt*, wenn $g^{\uparrow} = h^{\uparrow} \Rightarrow g = h$ für $g, h \in G$ und $m^{\downarrow} = n^{\downarrow} \Rightarrow m = n$ für $m, n \in M$ gilt.

**Definition 4** Es seien $\mathcal{J} = (G, M, I)$ und $\mathcal{J}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ Kontexte. Eine Abbildung $\varphi : G \cup M \to G_1 \cup M_1$ (kurz $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$) heißt ein *Homomorphismus* des Kontextes $\mathcal{J}$ auf den Kontext $\mathcal{J}_1$, wenn $\varphi$ den folgenden Eigenschaften genügt:
1. $\varphi(G) = G_1, \quad \varphi(M) = M_1,$
2. $g\ I\ m \Rightarrow \varphi(g)\ I_1\ \varphi(m), \quad g \in G,\ m \in M.$

**Bemerkung 1** Ferner werden stets Kontexte als $\mathcal{J}=(G, M, I), \mathcal{J}_1=(G_1, M_1, I_1)$, $\mathcal{J}_2 = (G_2, M_2, I_2)$ bezeichnet.

Wir untersuchen zuerst die Homomorphismen $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$ mit den folgenden Eigenschaften (H1)–(H3):

(H1) $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m) \Rightarrow g\ I\ m,$

(H2) $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m) \Rightarrow$ a) $\exists n \in M, \quad \varphi(n) = \varphi(m), \quad g\ I\ n,$
b) $\exists h \in G, \quad \varphi(h) = \varphi(g), \quad h\ I\ m,$

(H3) $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m) \Rightarrow \exists h \in G,\ \exists n \in M,\ \varphi(g) = \varphi(h),\ \varphi(m) = \varphi(n),\ h\ I\ n.$

**Definition 5** Ein Homomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$, der (H1) erfüllt, heißt *invertierbar (kurz I-Homomorphismus)*. Ein I-Homomorphismus $\varphi$ ist ein *Isomorphismus*, wenn $\varphi$ bijektive Abbildungen der Mengen $G, G_1$ und $M, M_1$ induziert. In diesem Falle schreibt man kurz $\mathcal{J} \simeq \mathcal{J}_1$.

**Definition 6** Es seien $\mathcal{W}_1 = \{\bar{w} \mid w \in W\}$, $\mathcal{W}_2 = \{\tilde{w} \mid w \in W\}$ Zerlegungen einer Menge $W$. Die Zerlegung $\mathcal{W}_1$ heißt eine *Überdeckung* von $\mathcal{W}_2$ (kurz $\mathcal{W}_2 \leq \mathcal{W}_1$), wenn $\tilde{w} \subseteq \bar{w}$ für alle $w \in W$ gilt.

**Bezeichnungen 1** Es seien $\mathcal{J} = (G, M, I)$ ein Kontext und $\mathcal{G} = \{\bar{g} \mid g \in G\}$, $\mathcal{M} = \{\bar{m} \mid m \in M\}$ Zerlegungen der Mengen $G, M$. Wir setzen $\mathcal{R} = (\mathcal{G}, \mathcal{M})$ und bedenken einen neuen Kontext $\mathcal{J}_{\mathcal{R}} = (\mathcal{G}, \mathcal{M}, I_{\mathcal{R}})$ mit

$$\bar{g}\ I_{\mathcal{R}}\ \bar{m} \iff \exists h \in \bar{g},\ n \in \bar{m},\ h\ I\ n.$$

Ferner definieren wir eine Abbildung $\varphi_{\mathcal{R}} : G \cup M \to \mathcal{G} \cup \mathcal{M}$ durch die Vorschriften $\varphi_{\mathcal{R}}(g) = \bar{g}\ \ \forall g \in G, \quad \varphi_{\mathcal{R}}(m) = \bar{m}\ \ \forall m \in M.$

**Bezeichnungen 2** Für einen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$ setzen wir $\bar{g} = \{h \in G \mid \varphi(h) = \varphi(g)\}$, $\mathcal{G}_\varphi = \{\bar{g} \mid g \in G\}$, $\bar{m} = \{n \in M \mid \varphi(n) = \varphi(m)\}$, $\mathcal{M}_\varphi = \{\bar{m} \mid m \in M\}$ und $\mathcal{R}_\varphi = (\mathcal{G}_\varphi, \mathcal{M}_\varphi)$.

**Satz 1** *Es seien $\mathcal{J}$ ein Kontext und $\mathcal{R} = (\mathcal{G}, \mathcal{M})$ die Zerlegung nach Bezeichnungen 1. Die Abbildung $\varphi_{\mathcal{R}}$ ist ein Homomorphismus von $\mathcal{J}$ auf $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$, der* (H3) *erfüllt. Benutzen wir dabei die Bezeichnungen 2, dann gilt $\mathcal{R}_{\varphi_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$.*

**Beweis** Die Gültigkeit der Bedingung (H3) und der Implikation $g\ I\ m \Rightarrow \varphi_{\mathcal{R}}(g)\ I_{\mathcal{R}}\ \varphi_{\mathcal{R}}(m)$ folgt unmittelbar aus der Definition von $I_{\mathcal{R}}$. Ist $\mathcal{R}_{\varphi_{\mathcal{R}}} = (\mathcal{G}_{\varphi_{\mathcal{R}}}, \mathcal{M}_{\varphi_{\mathcal{R}}})$ die zum Homomorphismus $\varphi_{\mathcal{R}} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_{\mathcal{R}}$ angehörige Zerlegung, dann gilt $\tilde{g} = \{h \in G \mid \varphi_{\mathcal{R}}(h) = \varphi_{\mathcal{R}}(g)\}$ für $\tilde{g} \in \mathcal{G}_{\varphi_{\mathcal{R}}}$ und wir erhalten $h \in \tilde{g} \iff \varphi_{\mathcal{R}}(h) = \varphi_{\mathcal{R}}(g) \iff \bar{h} = \bar{g} \iff h \in \bar{g}$. Daraus folgt $\tilde{g} = \bar{g}\ \forall g \in G$. Ganz ähnlich läßt sich $\tilde{m} = \bar{m}\ \ \forall m \in M$ zeigen.

**Satz 2** $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$ *sei ein Homomorphismus. Eine Abbildung $\xi : \mathcal{J}_{\mathcal{R}_\varphi} \to \mathcal{J}_1$, die durch die Vorschriften $\xi(\bar{g}) = \varphi(g)\ \forall g \in G$, $\xi(\bar{m}) = \varphi(m)\ \forall m \in M$ erklärt ist, bildet einen Homomorphismus des Kontextes $\mathcal{J}_{\mathcal{R}_\varphi}$ auf $\mathcal{J}_1$ mit $\varphi = \xi\varphi_{\mathcal{R}} \cdot \xi$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $\varphi$ die Bedingung* (H3) *erfüllt.*

**Beweis** Es sei $\bar{g}\ I_{\mathcal{R}_\varphi}\ \bar{m}$. Nach Definition von $I_{\mathcal{R}_\varphi}$ gibt es Elemente $h \in \bar{g}$, $n \in \bar{m}$ mit $h\ I\ n$, was $\varphi(h) = \varphi(g)$, $\varphi(m) = \varphi(n)$ bedeutet. Offensichtlich gilt $h\ I\ n \Rightarrow \varphi(h)\ I_1\ \varphi(n) \Rightarrow \varphi(g)\ I_1\ \varphi(m) \Rightarrow \xi(\bar{g})\ I_1\ \xi(\bar{m})$ und $\xi$ ist ein Homomorphismus.

Es sei $\xi$ ein Isomorphismus und nehmen wir dabei $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m)$ für $g \in G$, $m \in M$ an. Dies bedeutet $\xi(\bar{g})\ I_1\ \xi(\bar{m})$ und folglich $\bar{g}\ I_{\mathcal{R}_\varphi}\ \bar{m}$. Nach Definition von $I_{\mathcal{R}_\varphi}$ gibt es $h \in G$, $m \in M$ mit $\varphi(h) = \varphi(g)$, $\varphi(m) = \varphi(n)$, $h\ I\ n$ und $\varphi$ erfüllt daher (H3).

Wir setzen umgekehrt voraus, daß $\varphi$ die Bedingung (H3) erfüllt. Es sei $\xi(\bar{g})\ I_1\ \xi(\bar{m})$, also $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m)$. Nach (H3) gibt es $h \in G$, $n \in M$ mit $\varphi(g) = \varphi(h)$, $\varphi(m) = \varphi(n)$ und $h\ I\ n$. Daraus ergibt sich $\bar{g} = \bar{h}$, $\bar{m} = \bar{n}$ und $h\ I\ n \Rightarrow \bar{g}\ I_{\mathcal{R}_\varphi}\ \bar{m}$. Dies bedeutet, daß $\xi$ ein I-Homomorphismus ist. Wegen $\varphi(g) = \varphi(h) \iff \bar{g} = \bar{h}$ bzw. $\varphi(m) = \varphi(n) \iff \bar{m} = \bar{n}$ induziert $\xi$ eine bijektive Abbildung der Mengen $\mathcal{G}_\varphi$, $G_1$ bzw. $\mathcal{M}_\varphi$, $M_1$ und $\xi$ ist ein Isomorphismus. Die Gleichheit $\varphi = \xi\,\varphi_{\mathcal{R}}$ ist offensichtlich stets erfüllt.

**Satz 3** *Sind $\varphi_1 : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$, $\varphi_2 : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_2$ Homomorphismen, so gelten die folgenden Behauptungen:*

*(1) Gibt es einen Homomorphismus $\psi : \mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}_2$ mit $\varphi_2 = \psi\varphi_1$, dann $\mathcal{R}_{\varphi_1} \leq \mathcal{R}_{\varphi_2}$.*

*(2) Erfüllt $\varphi_1$ die Forderung* (H3) *und gilt zugleich $\mathcal{R}_{\varphi_1} \leq \mathcal{R}_{\varphi_2}$, dann gibt es einen Homomorphismus $\psi : \mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}_2$ mit $\varphi_2 = \psi\,\varphi_1$.*

**Beweis** Wir setzen $\mathcal{R}_{\varphi_1} = (\mathcal{G}_{\varphi_1}, \mathcal{M}_{\varphi_1})$, $\mathcal{R}_{\varphi_2} = (\mathcal{G}_{\varphi_2}, \mathcal{M}_{\varphi_2})$ und $\bar{g} \in \mathcal{G}_{\varphi_1}$, $\bar{m} \in \mathcal{M}_{\varphi_1}$, $\tilde{g} \in \mathcal{G}_{\varphi_2}$, $\tilde{m} \in \mathcal{M}_{\varphi_2}$ für $g \in G$, $m \in M$.

Ad (1). Aus $\varphi_2 = \psi\,\varphi_1$ ergibt sich folgende Implikationen: $h \in \bar{g} \Rightarrow \varphi_1(g) = \varphi_1(h) \Rightarrow \psi\varphi_1(g) = \psi\varphi_1(h) \Rightarrow \varphi_2(g) = \varphi_2(h) \Rightarrow h \in \tilde{g}$. Daraus folgt $\bar{g} \subseteq \tilde{g}$ $\forall g \in G$ und $\mathcal{G}_{\varphi_1} \leq \mathcal{G}_{\varphi_2}$. Ähnlicherweise läßt sich $\mathcal{M}_{\varphi_1} \leq \mathcal{M}_{\varphi_2}$ zeigen.

Ad (2). Wir bedenken die Kontexte $\mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}$ und die Homomorphismen $\varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_1}} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}$, $\varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_2}} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}$ mit $\varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}(g) = \bar{g}$, $\varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}(m) = \bar{m}$, bzw. $\varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}(g) = \tilde{g}$, $\varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}(m) = \tilde{m}$, für $g \in G$, $m \in M$. Nach Satz 2 gibt es einen Homomorphismus $\xi_2 : \mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\varphi_2}} \to \mathcal{J}_2$ und einen Isomorphismus $\xi_1 : \mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\varphi_1}} \to \mathcal{J}_1$ mit $\varphi_2 = \xi_2 \varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}$, $\varphi_1 = \xi_1 \varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}$. Wegen $\mathcal{R}_{\varphi_1} \leq \mathcal{R}_{\varphi_2}$ gilt $\bar{g} \subseteq \tilde{g}$ $\forall g \in G$, $\bar{m} \subseteq \tilde{m}$ $\forall m \in M$ und $\bar{\psi} : \bar{g} \to \tilde{g}$ $\forall g \in G$, $\bar{m} \to \tilde{m}$ $\forall m \in M$ ist eine Abbildung der Menge $\mathcal{G}_{\varphi_1} \cup \mathcal{M}_{\varphi_1}$ auf die Menge $\mathcal{G}_{\varphi_2} \cup \mathcal{M}_{\varphi_2}$. Gemäß $\bar{g}\ I_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}\ \bar{m} \Rightarrow \exists h \in \bar{g}, n \in \bar{m}$, $h\ I\ n \Rightarrow \exists h \in \tilde{g}, n \in \tilde{m}$, $h\ I\ n \Rightarrow \tilde{g}\ I_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}\ \tilde{m} \Rightarrow \bar{\psi}(\bar{g})\ I_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}\ \bar{\psi}(\bar{m})$ bildet $\bar{\psi}$ einen Homomorphismus von $\mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}$auf $\mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}$. Wir erhalten $\bar{\psi}\varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}(g) = \bar{\psi}(\bar{g}) = \tilde{g} = \varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}(g)$ $\forall g \in G$ und $\bar{\psi}\varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}(m) = \varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_2}}(m)$ $\forall m \in M$, woraus $\varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_2}} = \bar{\psi}\, \varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_1}}$ und $\varphi_2 = \xi_2 \varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_2}} = \xi_2 \bar{\psi}\, \varphi_{\mathcal{R}_{\varphi_1}} = \xi_2 \bar{\psi} \xi_1^{-1} \varphi_1$ folgt. Setzen wir $\psi = \xi_2 \bar{\psi} \xi_1^{-1}$, dann ist $\psi : \mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}_2$ ein Homomorphismus mit $\varphi_2 = \psi\, \varphi_1$.

**Bezeichnungen 3** Für jeden Kontext $\mathcal{J}$ schreiben wir $\vec{g} = \{h \in G \,|\, h^{\uparrow} = g^{\uparrow}\}$ $\forall g \in G$, $\vec{m} = \{n \in M \,|\, n^{\downarrow} = m^{\downarrow}\}$ $\forall m \in M$, $\mathcal{G}_{\mathcal{J}} = \{\vec{g} \,|\, g \in G\}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{J}} = \{\vec{m} \,|\, m \in M\}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{J}} = (\mathcal{G}_{\mathcal{J}}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}})$ und $\mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}} = (\mathcal{G}_{\mathcal{J}}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}}, I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}})$. Ferner setzen wir $F(\mathcal{J}) := \mathcal{J}_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}$.

**Satz 4** *Für jeden Kontext $\mathcal{J}$ ist $F(\mathcal{J})$ ein bereinigter Kontext und $\varphi_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}$ ein I-Homomorphismus.*

**Beweis** Sind $\vec{g} \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}}$, $\vec{m} \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ mit $\vec{g}\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}\ \vec{m}$ gegeben, dann gibt es $h \in \vec{g}$, $n \in \vec{m}$ mit $h\ I\ n$, woraus folgt $h^{\uparrow} = g^{\uparrow}$, $n^{\downarrow} = m^{\downarrow}$ und $h\ I\ n \Rightarrow h \in n^{\downarrow} \Rightarrow h \in m^{\downarrow} \Rightarrow h\ I\ m \Rightarrow m \in h^{\uparrow} \Rightarrow m \in g^{\uparrow} \Rightarrow g\ I\ m$. Dies bedeutet, daß $\varphi_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}$ ein I-Homomorphismus ist. Gilt $(\vec{g})^{\uparrow} = (\vec{h})^{\uparrow}$, dann $m \in g^{\uparrow} \iff g\ I\ m \iff \vec{g}\ I_{\mathcal{J}_{\mathcal{R}}}\ \vec{m} \iff \vec{h}\ I_{\mathcal{J}_{\mathcal{R}}}\ \vec{m} \iff h\ I\ m \iff m \in h^{\uparrow}$, also $g^{\uparrow} = h^{\uparrow}$ und $\vec{g} = \vec{h}$. Ganz ähnlich erhalten wir $(\vec{m})^{\downarrow} = (\vec{n})^{\downarrow} \Rightarrow \vec{m} = \vec{n}$.

Wir bedenken weitere Eigenschaften eines Homomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$:

(H4) Gilt $g\ I\ m$, dann a) $\varphi(g) = \varphi(h) \Rightarrow h\ I\ m$,
b) $\varphi(m) = \varphi(n) \Rightarrow g\ I\ n$.

(H5) a) $\varphi(g) = \varphi(h) \Rightarrow g^{\uparrow} = h^{\uparrow}$, $\quad g, h \in G$,
b) $\varphi(m) = \varphi(n) \Rightarrow m^{\downarrow} = n^{\downarrow}$, $\quad m, n \in M$.

(H6) a) $g^{\uparrow} = h^{\uparrow} \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(h)$, $\quad g, h \in G$,
b) $m^{\downarrow} = n^{\downarrow} \Rightarrow \varphi(m) = \varphi(n)$, $\quad m, n \in M$.

**Satz 5** *Ein Homomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$ ist ein I-Homomorphismus genau dann, wenn $\varphi$ den Forderungen* (H3) *und* (H4) *genügt.*

**Beweis** Es sei $\varphi$ ein I-Homomorphismus. Offensichtlich gilt (H3). Sind $g, h \in G$, $m, n \in M$ Elemente mit $g\ I\ m$, so aus $\varphi(g) = \varphi(h)$ folgt $\varphi(h)\ I_1\ \varphi(m)$ und $h\ I\ m$. Gleichzeitig gilt $\varphi(m) = \varphi(n) \Rightarrow g\ I\ n$ und die Forderung (H4) ist daher erfüllt.

Wir nehmen an, daß (H3) und (H4) gelten. Es sei $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m)$. Nach (H3) gibt es $h \in g$, $m \in M$ mit $\varphi(h) = \varphi(g)$, $\varphi(m) = \varphi(n)$ und $h\ I\ n$. Aus (H4) a) folgt $g\ I\ n$ und nach (H4) b) ist $g\ I\ m$.

**Satz 6** *Es sei $\varphi : \mathfrak{I} \to \mathfrak{I}_1$ ein Homomorphismus. Dann gilt*

$$\text{(H4) a)} \iff \text{(H5) a)}, \qquad \text{(H4) b)} \iff \text{(H5) b)}.$$

**Beweis** Nehmen wir an, daß (H4) a) gilt. Dann aus $\varphi(g) = \varphi(h)$, $g, h \in G$ folgt $m \in g^{\uparrow} \iff g\ I\ m \iff h\ I\ m \iff m \in h^{\uparrow}$, was $g^{\uparrow} = h^{\uparrow}$ bedeutet. Gilt (H5) a), dann erhält man aus $\varphi(g) = \varphi(h)$ wegen $g^{\uparrow} = h^{\uparrow}$ die Implikationen $g\ I\ m \Rightarrow m \in g^{\uparrow} \Rightarrow m \in h^{\uparrow} \Rightarrow h\ I\ m$. Die zweite Äquivalenz läßt sich ähnlich beweisen.

**Satz 7** *Jeder Homomorphismus eines bereinigten Kontextes $\mathfrak{I}$ auf einen Kontext $\mathfrak{I}_1$ erfüllt* (H6). *Jeder I-Homomorphismus ist in diesem Falle schon ein Isomorphismus.*

**Beweis** Ist $\mathfrak{I}$ bereignit, dann $g^{\uparrow} = h^{\uparrow} \Rightarrow g = h \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(h)$ und $m^{\downarrow} = n^{\downarrow} \Rightarrow \varphi(m) = \varphi(n)$ für jeden Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{I} \to \mathfrak{I}_1$. Es sei $\varphi$ ein I-Homomorphismus. Nach Sätzen 5, 6 gilt (H5) und daher erhalten wir $\varphi(g) = \varphi(h) \Rightarrow g^{\uparrow} = h^{\uparrow} \Rightarrow g = h$, $\varphi(m) = \varphi(n) \Rightarrow m^{\downarrow} = n^{\downarrow} \Rightarrow m = n$. Die Abbildung $\varphi$ induziert bijektive Abbildungen der Mengen $G, G_1$ bzw. $M, M_1$ und $\varphi$ ist daher ein Isomorphismus der Kontexte $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}_1$.

**Satz 8** *Ist $\varphi$ ein I-Homomorphismus eines Kontextes $\mathfrak{I}$ auf einen bereinigten Kontext $\mathfrak{I}_1$, dann $F(\mathfrak{I}) \simeq \mathfrak{I}_1$.*

**Beweis** 1. Da $\mathfrak{I}_1$ bereinigt ist, gilt $\varphi(g) = \varphi(h) \iff (\varphi(g))^{\uparrow} = (\varphi(h))^{\uparrow}$ für $g, h \in G$ und $\varphi(m) = \varphi(n) \iff (\varphi(m))^{\downarrow} = (\varphi(n))^{\downarrow}$ für $m, n \in M$.

2. Es sei $g^{\uparrow} = h^{\uparrow}$ für $g, h \in G$. Dann gilt $g\ I\ m \iff h\ I\ m$ für $m \in M$. Da $\varphi$ ein I-Homomorphismus ist, folgt daraus $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m) \iff g\ I\ m \iff h\ I\ m \iff \varphi(h)\ I_1\ \varphi(m)$, was $(\varphi(g))^{\uparrow} = (\varphi(h))^{\uparrow}$ bedeutet. Wir nehmen an, daß umgekehrt $(\varphi(g))^{\uparrow} = (\varphi(h))^{\uparrow}$ gilt. Dann ist $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m) \iff \varphi(h)\ I_1\ \varphi(m)$ und $g\ I\ m \iff \varphi(g)\ I_1\ \varphi(m) \iff \varphi(h)\ I_1\ \varphi(m) \iff h\ I\ m$, also $g^{\uparrow} = h^{\uparrow}$. Ähnlicherweise ergibt sich $m^{\downarrow} = n^{\downarrow} \iff (\varphi(m))^{\downarrow} = (\varphi(n))^{\downarrow}$ für $m, n \in M$.

3. Zum Homomorphismus $\varphi$ erklären wir die Zerlegung $\mathcal{R}_{\varphi} = (\mathcal{G}_{\varphi}, \mathcal{M}_{\varphi})$ und den Kontext $\mathfrak{I}_{\mathcal{R}_{\varphi}}$. Für $g, h \in G$ erhalten wir dann $\bar{g} = \bar{h} \iff \varphi(g) = \varphi(h) \iff (\varphi(g))^{\uparrow} = (\varphi(h))^{\uparrow} \iff g^{\uparrow} = h^{\uparrow} \iff \vec{g} = \vec{h}$ und folglich $\mathcal{G}_{\varphi} = \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}$. Gleichzeitig gilt auch $\mathcal{M}_{\varphi} = \mathcal{M}_{\mathfrak{I}}$, $I_{\mathcal{R}_{\varphi}} = I_{\mathcal{R}_{\mathfrak{I}}}$ und daher $\mathfrak{I}_{\mathcal{R}_{\varphi}} = F(\mathfrak{I})$. Nach Satz 2 erhalten wir $\mathfrak{I}_{\mathcal{R}_{\varphi}} \simeq \mathfrak{I}_1$, also $F(\mathfrak{I}) \simeq \mathfrak{I}_1$.

**Satz 9** *Es sei $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}_1$ ein Homomorphismus. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

*(1)* *$\varphi$ ist ein I-Homomorphismus.*

*(2)* *Es gilt $\mathcal{R}_\varphi \leq \mathcal{R}_\mathcal{I}$ und $\varphi$ erfüllt* (H3).

*(3)* *Es gibt einen Homomorphismus $\psi : \mathcal{I}_1 \longrightarrow F(\mathcal{I})$ mit $\varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}} = \psi\varphi$.*

**Beweis** (1) $\Rightarrow$ (2). Mit Anwendung der Sätze 5, 6 ergibt sich $\bar{g} = \bar{h} \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(h) \Rightarrow g^\uparrow = h^\uparrow \Rightarrow \vec{g} = \vec{h}$ für $g, h \in G$ und daraus $\mathcal{G}_\varphi \leq \mathcal{G}_\mathcal{I}$. Ähnlich gilt $\mathcal{M}_\varphi \leq \mathcal{M}_\mathcal{I}$ und daher $\mathcal{R}_\varphi \leq \mathcal{R}_\mathcal{I}$. $\varphi$ erfüllt (H3) nach Satz 5.

(2) $\Rightarrow$ (3). Nach Satz 4 ist $\varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow F(\mathcal{I})$ ein I-Homomorphismus und nach Satz 1 gilt $\mathcal{R}_{\varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}} = \mathcal{R}_\mathcal{I}$. Unsere Behauptung (3) folgt dann aus dem Satz 3.

(3) $\Rightarrow$ (1). Weil $\varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}$ ein I-Homomorphismus ist, gilt $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m) \Rightarrow \psi(\varphi(g))\ I_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}\ \psi(\varphi(m)) \Rightarrow \varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}(g)\ I_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}\ \varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}(m) \Rightarrow g\ I\ m$ und auch $\varphi$ ist ein I-Homomorphismus.

**Satz 10** *Es sei $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}_1$ ein Homomorphismus. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

*(1)* *Es gilt* (H6).

*(2)* *Es gilt $\mathcal{R}_\mathcal{I} \leq \mathcal{R}_\varphi$.*

*(3)* *Es gibt einen Homomorphismus $\psi : F(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{I}_1$ mit $\varphi = \psi\varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}$.*

**Beweis** (1) $\Rightarrow$ (2). Wegen $h \in \vec{g} \Rightarrow \vec{h} = \vec{g} \Rightarrow h^\uparrow = g^\uparrow \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(h) \Rightarrow \bar{g} = \bar{h} \Rightarrow h \in \bar{g}$ gilt $\vec{g} \subseteq \bar{g}$ für alle $g \in G$. Ähnlicherweise ergibt sich $\vec{m} \subseteq \bar{m}\ \forall m \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Die Behauptung (3) folgt aus dem Satz 3, weil $\varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}$ ein I-Homomorphismus ist und damit (H3) erfüllt.

(3) $\Rightarrow$ (1). Nehmen wir $g^\uparrow = h^\uparrow$ für $g, h \in G$ an, dann gilt $\vec{g} = \vec{h}$ und $\varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}(g) = \varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}(h)$, $\psi\varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}(g) = \psi\varphi_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}(h)$, woher $\varphi(g) = \varphi(h)$ folgt. Ähnlich läßt sich $m^\downarrow = n^\downarrow \Rightarrow \varphi(m) = \varphi(n)$ zeigen.

**Satz 11** *Für jeden Homomorphismus $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}_1$ gilt*

*(1)* $\varphi(A^\uparrow) \subseteq (\varphi(A))^\uparrow \quad \forall A \subseteq G,$

*(2)* $\varphi(B^\downarrow) \subseteq (\varphi(B))^\downarrow \quad \forall B \subseteq M.$

**Beweis** Wir beweisen die Behauptung (1), die Behauptung (2) läßt sich dann ähnlich nachweisen. Nach Definition 2 ist $\varphi(A^\uparrow) = \varphi\{m \in M \mid g\ I\ m \quad \forall g \in A\}$, $(\varphi(A))^\uparrow = \{m_1 \in M_1 \mid g_1\ I_1\ m_1 \quad \forall g_1 \in \varphi(A)\}$ für $A \neq \emptyset$. Es sei $m_1 \in \varphi(A^\uparrow)$ gegeben. Dann gibt es $m \in A^\uparrow$ mit $\varphi(m) = m_1$ und $g\ I\ m\ \forall g \in A$. Ist $g_1$ ein Element von $\varphi(A)$, so gibt es ein $h \in A$ mit $\varphi(h) = g_1$ und nach unserer Voraussetzung gilt $h\ I\ m$. Daraus folgt $\varphi(h)\ I_1\ \varphi(m)$ und $g_1\ I_1\ m_1$, also $m_1 \in (\varphi(A))^\uparrow$. Dies aber bedeutet $\varphi(A^\uparrow) \subseteq (\varphi(A))^\uparrow$. Im Falle $A = \emptyset$ ergibt sich $\varphi(\emptyset^\uparrow) = \varphi(M) = M_1 = \emptyset^\uparrow = (\varphi(\emptyset))^\uparrow$.

Endlich untersuchen wir Homomorphismen $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}_1$ mit den folgenden Eigenschaften (H7)–(H10):

(H7) a) $\varphi(g) = \varphi(h) \Rightarrow \varphi(g^{\uparrow}) = \varphi(h^{\uparrow}), \quad g, h \in G,$

b) $\varphi(m) = \varphi(n) \Rightarrow \varphi(m^{\downarrow}) = \varphi(n^{\downarrow}), \quad m, n \in M.$

(H8) a) $\varphi(g^{\uparrow}) = \varphi(h^{\uparrow}) \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(h), \quad g, h \in G,$

b) $\varphi(m^{\downarrow}) = \varphi(n^{\downarrow}) \Rightarrow \varphi(m) = \varphi(n), \quad m, n \in M.$

(H9) a) $\varphi(g^{\uparrow}) = (\varphi(g))^{\uparrow} \quad \forall g \in G,$

b) $\varphi(m^{\downarrow}) = (\varphi(m))^{\downarrow} \quad \forall m \in M.$

(H10) a) $\varphi(g^{\uparrow}) = \varphi(h^{\uparrow}) \Rightarrow g^{\uparrow} = h^{\uparrow}, \quad g, h \in G,$

b) $\varphi(m^{\downarrow}) = \varphi(n^{\downarrow}) \Rightarrow m^{\downarrow} = n^{\downarrow}, \quad m, n \in M.$

**Satz 12** *Die folgenden Eigenschaften eines Homomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}_1$ sind äquivalent:*

*(1)* (H9) a),

*(2)* (H2) a),

*(3)* (H7) a), (H3).

**Beweis** (1) $\Rightarrow$ (2). Es sei $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m)$. Dann $\varphi(m) \in (\varphi(g))^{\uparrow}$ und nach (1) gilt $\varphi(m) \in \varphi(g^{\uparrow})$. Es gibt daher ein $n \in M$ mit $\varphi(m) = \varphi(n)$ und $g\ I\ n$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Es sei $\varphi(g) = \varphi(h)$ und nehmen wir $m_1 \in \varphi(g^{\uparrow})$ an. Dann gibt es ein $m \in M$ mit $\varphi(m) = m_1$ und $g\ I\ m$. Aus $g\ I\ m$ folgt $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m)$ und $\varphi(h)\ I_1\ \varphi(m)$. Nach (H2) a) gibt es ein $n \in M$ mit $\varphi(m) = \varphi(n)$, $h\ I\ n$, woher $n \in h^{\uparrow}$ und $\varphi(n) \in \varphi(h^{\uparrow})$ folgt, was aber $m_1 \in \varphi(h^{\uparrow})$ bedeutet. Daraus erhalten wir $\varphi(g^{\uparrow}) \subseteq \varphi(h^{\uparrow})$. Dargleichen beweisen wir, daß auch $\varphi(h^{\uparrow}) \subseteq \varphi(g^{\uparrow})$ gilt. Aus (H2) a) folgt offensichtlich (H3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Gilt $m_1 \in (\varphi(g))^{\uparrow}$, dann $\varphi(g)\ I_1\ m_1$ und nach (H3) gibt es $h \in G$, $n \in M$ mit $\varphi(h) = \varphi(g)$, $\varphi(n) = m_1$, $h\ I\ n$. Aus $h\ I\ n$ folgt $n \in h^{\uparrow}$ und $\varphi(n) \in \varphi(h^{\uparrow})$. Nach (H7) ist $\varphi(g^{\uparrow}) = \varphi(h^{\uparrow})$, was $\varphi(n) \in \varphi(g^{\uparrow})$ und $m_1 \in \varphi(g^{\uparrow})$ bedeutet. Nach Vorhergehendem gilt $(\varphi(g))^{\uparrow} \subseteq \varphi(g^{\uparrow})$ und nach Satz 11 ergibt sich die Gleichheit (H2) a).

**Satz 13** *Die folgenden Eigenschaften eines Homomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}_1$ sind äquivalent:*

*(1)* (H9) b),

*(2)* (H2) b),

*(3)* (H7) b), (H3).

**Beweis** Der Beweis führt man ganz ähnlich zum Beweis des Satzes 12 durch.

Aus den Sätzen 12, 13 erhalten wir:

**Satz 14** *Die folgenden Eigenschaften eines Homomorphismus* $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}_1$ *sind äquivalent:*

*(1)* (H9),

*(2)* (H2),

*(3)* (H7), (H3).

**Satz 15** *Die folgenden Eigenschaften eines Homomorphismus* $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}_1$ *sind äquivalent:*

*(1)* $\varphi$ *ist ein I-Homomorphismus.*

*(2)* *Es gelten* (H10), *und* (H2).

**Beweis** (1) $\Rightarrow$ (2). Die Gültigkeit von (H2) folgt unmittelbar aus (H1). Wir nehmen $\varphi(g^\uparrow) = \varphi(h^\uparrow)$ an. Gilt $m \in g^\uparrow$, dann $g\ I\ m$ und $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m)$, was $\varphi(m) \in (\varphi(g))^\uparrow$ bedeutet. Nach Satz 14 ist (H9) erfüllt, woher wir $\varphi(m) \in \varphi(g^\uparrow)$ und folglich $\varphi(m) \in \varphi(h^\uparrow)$, $\varphi(m) \in (\varphi(h))^\uparrow$ erhalten. Die Beziehung $\varphi(m) \in (\varphi(h))^\uparrow$ ist zu $\varphi(h)\ I_1\ \varphi(m)$ äquivalent. Aus (H1) ergibt sich daraus $h\ I\ m$ und $m \in h^\uparrow$. Dies hat zur Folge $g^\uparrow \subseteq h^\uparrow$. Nach gleicher Weise zeigt man auch $h^\uparrow \subseteq g^\uparrow$, woher dann $h^\uparrow = g^\uparrow$ folgt. Ähnlich läßt sich $\varphi(m^\downarrow) = \varphi(n^\downarrow) \Rightarrow m^\downarrow = n^\downarrow$ beweisen.

(2) $\Rightarrow$ (1). Nach Satz 14 und wegen (10) gilt $\varphi(g) = \varphi(h) \Rightarrow (\varphi(g))^\uparrow = (\varphi(h))^\uparrow \Rightarrow \varphi(g^\uparrow) = \varphi(h^\uparrow) \Rightarrow g^\uparrow = h^\uparrow$ und $\varphi(m) = \varphi(n) \Rightarrow (\varphi(m))^\downarrow = (\varphi(n))^\downarrow \Rightarrow \varphi(m^\downarrow) = \varphi(n^\downarrow) \Rightarrow m^\downarrow = n^\downarrow$. Dies bedeutet, daß $\varphi$ die Bedingung (H5) erfüllt. Nach Satz 14 gilt auch (H3) und nach Sätzen 6, 5 ist $\varphi$ ein I-Homomorphismus.

**Satz 16** *Es sei* $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}_1$ *ein Homomorphismus, der* (H2) *erfüllt. Sind* $F(\mathcal{I}) = (\mathcal{G}_\mathcal{I}, \mathcal{M}_\mathcal{I}, I_{\mathcal{R}_\mathcal{I}})$, $F(\mathcal{I}_1) = (\mathcal{G}_{\mathcal{I}_1}, \mathcal{M}_{\mathcal{I}_1}, I_{\mathcal{R}_{\mathcal{I}_1}})$ *die zu* $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_1$ *gehörigen Kontexte, dann ist die durch die Vorschriften* $\psi(\vec{g}) = \overrightarrow{\varphi(g)}$, $\psi(\vec{m}) = \overrightarrow{\varphi(m)}$ $\forall \vec{g} \in \mathcal{G}_\mathcal{I}$ $\forall \vec{m} \in \mathcal{M}_\mathcal{I}$ *bestimmte Relation* $\psi$ *von* $\mathcal{G}_\mathcal{I} \cup \mathcal{M}_\mathcal{I}$ *auf* $\mathcal{G}_{\mathcal{I}_1} \cup \mathcal{M}_{\mathcal{I}_1}$ *ein Homomorphismus des Kontextes* $F(\mathcal{I})$ *auf* $F(\mathcal{I}_1)$. $\varphi$ *ist ein Isomorphismus genau dann, wenn* $\varphi$ *ein I-Homomorphismus ist.*

**Beweis** Die Relation $\psi$ ist eine Abbildung: Es sei $\vec{g} = \vec{h}$ für $g, h \in g$. Dann gilt $g^\uparrow = h^\uparrow$ und $\varphi(g^\uparrow) = \varphi(h^\uparrow)$. Nach Satz 14 ist $(\varphi(g))^\uparrow = (\varphi(h))^\uparrow$, also $\overrightarrow{\varphi(g)} = \overrightarrow{\varphi(h)}$ und $\psi(\vec{g}) = \psi(\vec{h})$. Ähnlicherweise ergibt sich $\vec{m} = \vec{n} \Rightarrow \psi(\vec{m}) = \psi(\vec{n})$. $\psi$ ist ein Homomorphismus: Es sei $\vec{g}\ I_{\mathcal{R}_\mathcal{I}}\ \vec{m}$. Es gibt $h \in \vec{g}$, $n \in \vec{m}$, d.h. $h^\uparrow = g^\uparrow$, $n^\downarrow = m^\downarrow$ mit $h\ I\ n$. Wegen $h^\uparrow = g^\uparrow$, $n^\downarrow = m^\downarrow$ ist $\varphi(h^\uparrow) = \varphi(g^\uparrow)$, $\varphi(n^\downarrow) = \varphi(m^\downarrow)$ und nach Satz 14 ergibt sich daraus $(\varphi(h))^\uparrow = (\varphi(g))^\uparrow$, $(\varphi(n))^\downarrow = (\varphi(m))^\downarrow$ und $\overrightarrow{\varphi(h)} = \overrightarrow{\varphi(g)}$, $\overrightarrow{\varphi(n)} = \overrightarrow{\varphi(m)}$. Durch Anwendung der Homomorphismen $\varphi_1$, $\varphi_{\mathcal{R}_{\mathcal{I}_1}}$

erhält man dann $h\ I\ n \Rightarrow \varphi(h)\ I_1\ \varphi(n) \Rightarrow \overrightarrow{\varphi(h)}\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}_1}}\ \overrightarrow{\varphi(n)} \Rightarrow \overrightarrow{\varphi(g)}\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}_1}}\ \overrightarrow{\varphi(m)} \Rightarrow \psi(\vec{g})\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}\ \psi(\vec{m})$.

Wir nehmen an, daß $\varphi$ ein I-Homomorphismus ist. Gilt $\psi(\vec{g})\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}_1}}\ \psi(\vec{m})$, also $\overrightarrow{\varphi(g)}\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}_1}}\ \overrightarrow{\varphi(m)}$, dann gibt es $g_1 \in G_1$, $m_1 \in M_1$ mit $\overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{\varphi(g)}$, $\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{\varphi(m)}$, also $g_1^{\uparrow} = (\varphi(g))^{\uparrow}$, $m_1^{\downarrow} = (\varphi(m))^{\downarrow}$ mit $g_1\ I_1\ m_1$. Offensichtlich gibt es auch $h \in G$, $n \in M$ mit $\varphi(h) = g_1$, $\varphi(n) = m_1$, woher $\varphi(h)\ I_1\ \varphi(n)$. Da $\varphi$ ein I-Homomorphismus ist, folgt daraus $h\ I\ n$ und durch Anwendung des Homomorphismus $\varphi_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}$ ergibt sich $\vec{h}\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}\ \vec{m}$. Wegen $(\varphi(g))^{\uparrow} = g_1^{\uparrow} = (\varphi(h))^{\uparrow}$, $(\varphi(m))^{\downarrow} = m_1^{\downarrow} = (\varphi(n))^{\downarrow}$ gilt nach Satz 14 $\varphi(g^{\uparrow}) = \varphi(h^{\uparrow})$, $\varphi(m^{\downarrow}) = \varphi(n^{\downarrow})$ und nach Satz 15 erhält man daraus $g^{\uparrow} = h^{\uparrow}$, $n^{\downarrow} = m^{\downarrow}$, also $\vec{g} = \vec{h}$, $\vec{m} = \vec{n}$. Somit gilt $\vec{g}\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}\ \vec{m}$ und $\psi$ ist ein I-Homomorphismus. Nach Satz 4 ist $F(\mathcal{J})$ ein bereinigter Kontext und nach Satz 7 bildet $\varphi$ einen Isomorphismus.

Nehmen wir an, daß $\psi$ ein Isomorphismus ist. Aus $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m)$ folgt $\overrightarrow{\varphi(g)}\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}_1}}\ \overrightarrow{\varphi(m)}$, also $\psi(\vec{g})\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}_1}}\ \psi(\vec{m})$ und $\vec{g}\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}\ \vec{m}$. Nach Satz 4 ist $\varphi_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}$ ein I-Homomorphismus, woher $\vec{g}\ I_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}}\ \vec{m} \Rightarrow g\ I\ m$. Wegen $\varphi(g)\ I_1\ \varphi(m) \Rightarrow g\ I\ m$ bildet $\varphi$ einen I-Homomorphismus.

Fassen wir die Ergebnisse einiger vorgegangenen Sätze zusammen, so erhalten wir:

**Satz 17** *Für einen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_1$ sind die folgenden Behauptungen äquivalent:*

*(1)* $\varphi$ *ist ein I-Homomorphismus.*

*(2)* *Es gelten* (H3) *und* (H4).

*(3)* *Es gelten* (H3) *und* (H5).

*(4)* *Es gelten* (H2) *und* (H10).

*(5)* *Es gelten* (H9) *und* (H10).

*(6)* *Es gelten* (H3), (H7) *und* (H10).

*(7)* *Es gelten* (H3) *und* $\mathcal{R}_{\varphi} \leq \mathcal{R}_{\mathcal{J}}$.

*(8)* *Es gibt einen Homomorphismus* $\psi : \mathcal{J}_1 \to F(\mathcal{J})$ *mit* $\varphi_{\mathcal{R}_{\mathcal{J}}} = \psi\,\varphi$.

*(9)* *Es gilt* (H2) *und die Abbildung* $\psi : F(\mathcal{J}) \to F(\mathcal{J}_1)$ *mit* $\psi(\vec{g}) = \overrightarrow{\varphi(g)}$, $\psi(\vec{m}) = \overrightarrow{\varphi(m)}\ \ \forall \vec{g} \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}}\ \forall \vec{m} \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ *ist ein Isomorphismus.*

# Literatur

[1] Machala, F.: *Isomorphismen von Kontexten und Konzeptualverbänden.* Acta UP Olomucensis, Fac. rer. nat., 106 (1993).

[2] Wille, R.: *Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts.* I. Rival (ed.), Ordered sets, Reidel, Dordrecht–Boston 1982, 445–470.

**Author's address:** Department of Algebra and Geometry
Faculty of Science
Palacký University
Tomkova 40, Hejčín
779 00 Olomouc
Czech Republic