Václav Alda

Sur les propriétés affines des correspondances

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 2, 51--67

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120782

SUR LES PROPRIÉTÉS AFFINES DES CORRESPONDANCES ANALYTIQUES.

VÁCLAV ALDA, Praha.

(Reçu le 16 Juillet 1949.)

I. Soit donnée une correspondance analytique C entre deux espaces affines à $n \geqq 2$ dimensions. Les coordonnées linéaires dans les deux espaces sont des fonctions de n paramètres $u_1, \ldots, u_n$; les points correspondants $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont ceux qui appartiennent aux mêmes systèmes de valeurs de $u_1, \ldots, u_n$.

Nous supposons qu'on a dans tout le domaine considéré

$$D_x = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} \neq 0, \quad D_y = \frac{D(y_{y1}, \ldots, y_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} \neq 0. \tag{1}$$

Les vecteurs $\frac{\partial A}{\partial u_i}$ resp. $\frac{\partial B}{\partial u_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont alors linéairement indépendants et il existe une affinité T telle que

$$\mathsf{T}A \;\; = B, \tag{2_1}$$

$$\mathsf{T}\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B; \tag{2_2}$$

c'est ce que nous appelons *l'affinité tangente* (à la correspondance C au point A).

Son module est

$$\mu^n = \frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Attachons au point A du premier espace un repère mobile qui consiste du point A et de n vecteurs $I_1, \ldots, I_n$ tels que $[I_1 \ldots I_n] = 1$. Pareillement attachons au point B un repère consistant de B et de n vecteurs $J_1, \ldots, J_n$ avec $[J_1 \ldots J_n] = 1$.

Il existe des formes de Pfaff $\omega^i, \tau^i, \omega_i^k, \tau_i^k$ telles que

$$\mathrm{d}A = \omega^i I_i, \quad \mathrm{d}B = \tau^i J_i, \tag{3_1}$$

$$\mathrm{d}I_i = \omega_i^k I_k, \quad \mathrm{d}J_i = \tau_i^k J_k, \tag{3_2}$$

$$\omega_i^i = 0, \quad \tau_i^i = 0. \tag{3_3}$$

Si le point A reste fixe on a $\omega^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. La correspondance C entraîne que le point B est aussi fixe, d'où $\tau^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Les ω^i, τ^i ne contiennent que les différentielles des paramètres principaux $u_1, \ldots, u_n$.

Parce que les ω^i sont linéairement indépendants, les τ^i ont la forme

$$\tau^i = f_k{}^i \omega^k, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

et le module est

$$\mu^n = |f_k{}^i|.$$

Nous allons choisir les J_i de telle manière que $f_j{}^i = 0$ pour $i \neq j$; c'est possible en vertu de (1). Enfin nous pouvons déterminer les vecteurs J_i de manière que

$$f_{11} = f_{22} = \ldots = f_{nn} = \mu.$$

Donc

$$\tau^i = \mu \omega^i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Les vecteurs J_i sont déterminés par les vecteurs I_i et c'est pourquoi les $\tau_i{}^k$ dépendent de $\omega_i{}^k$. Par dérivation extérieure de (5)

$$[\omega^k (\tau_k{}^i - \omega_k{}^i)] + \left[\omega^i \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\right] = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Le lemme de Cartan nous donne

$$\tau_k{}^i - \omega_k{}^i + \delta_k{}^i \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = a_{kj}{}^i \omega^j, \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{6}$$

où $\delta_k{}^i$ est le symbole de Kronecker et $a_{kj}{}^i = a_{jk}{}^i$.

De (3_3) nous obtenons

$$n \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = a_{ij}{}^i \omega^j. \tag{7}$$

L'affinité T est définie maintenant par les formules

$$\mathsf{T}A = B, \tag{$2_1'$}$$
$$\mathsf{T}I_i = \mu J_i, \tag{$2_2'$}$$

d'où

$$\mathsf{T}\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B. \tag{$2_3'$}$$

Soit K une courbe passant par le point A. Les courbes $K' = \mathsf{C}K$ et $\mathsf{T}K$ ont un contact analytique d'ordre un au point $B = \mathsf{T}A$.

Pour les éléments infinitésimaux d'ordre deux nous avons

$$\mathrm{d}^2 A = \mathrm{d}\omega^i I_i + \omega^i \omega_i{}^k I_k,$$
$$\mathrm{d}^2 B = \mathrm{d}\omega^i \mu J_i + \omega^i \omega_i{}^k \mu J_k + a_{ij}{}^k \omega^i \omega^j \mu J_k,$$

donc

$$\mathrm{d}^2 B = \mathsf{T}\,\mathrm{d}^2 A + \sigma^i \mu J_i,$$

où

$$\sigma^i = a_{kj}{}^i \omega^k \omega^j.$$

Transformons par l'affinité T^{-1} le second espace dans le premier. Nous avons alors dans cet espace les courbes K et $K^* = \mathsf{T}^{-1}K'$. Le point correspondant de la courbe K^* étant $A^* = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{C}A$, on a

$$\begin{aligned} A^* &= A, \\ \mathrm{d}A^* &= \mathrm{d}A, \\ \mathrm{d}^2A^* - \mathrm{d}^2A &= \sigma^i I_i. \end{aligned} \tag{8}$$

A chaque direction (ω) il correspond ainsi une direction (σ) (l'exception faite des directions (ω) pour lesquelles $\sigma^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$). Menons par le point A un hyperplan ne contenant pas le vecteur $\sigma^i I_i$. Les projections de la courbe K et de la courbe K^* dans cet hyperplan ont le contact d'ordre deux, si la direction de cette projection est celle du vecteur $\sigma^i I_i$. Ceci donne une définition géométrique du vecteur $\sigma^i I_i$.

Appelons *direction caractéristique* de la correspondance C chaque direction $(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n)$ telle qu'à chaque courbe issue de A dans la direction envisagée et ayant une inflexion en A correspond dans C une courbe ayant une inflexion en B (pour $n = 2$ v. FUBINI-ČECH, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, p. 158). Alors les directions caractéristiques sont données par

$$\omega^1 : \omega^2 : \ldots : \omega^n = \sigma^1 : \sigma^2 : \ldots : \sigma^n. \tag{9}$$

Dans le plan ($n = 2$) on a

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= a_{11}{}^1(\omega^1)^2 + 2a_{12}{}^1\omega^1\omega^2 + a_{22}{}^1(\omega^2)^2, \\ \sigma^2 &= a_{11}{}^2(\omega^1)^2 + 2a_{12}{}^2\omega^1\omega^2 + a_{22}{}^2(\omega^2)^2, \end{aligned}$$

de manière que l'on a pour les directions caractéristiques l'équation

$$a_{11}{}^2(\omega^1)^3 + (2a_{12}{}^2 - a_{11}{}^1)(\omega^1)^2\omega^2 + (a_{22}{}^2 - 2a_{12}{}^1)\,\omega^1(\omega^2)^2 - a_{22}{}^1(\omega^2)^3 = 0.$$

Soient x^1, x^2 les coordonnées du point courant du plan par rapport au repère qui consite de A, I_1, I_2.

Les coniques

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv a_{11}{}^1(x^1)^2 + 2a_{12}{}^1x^1x^2 + a_{22}{}^1(x^2)^2 + 2x^1 = 0, \\ C_2 &\equiv a_{11}{}^2(x^1)^2 + 2a_{12}{}^2x^1x^2 + a_{22}{}^2(x^2)^2 + 2x^2 = 0 \end{aligned}$$

possèdent la propriété suivante: la courbe correspondante à la conique du faisceau $\lambda_1 C_2 - \lambda_2 C_1 = 0$ a au point B un point d'inflexion.

Dém. Les points $\mathrm{d}A = \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2$, $\mathrm{d}A + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}\omega^1 I_1 + \ldots$ étant sur une de ces coniques, nous avons

$$\begin{gathered} \lambda_1\omega^2 - \lambda_2\omega^1 = 0, \\ \lambda_1(a_{11}{}^2(\omega^1)^2 + 2a_{12}{}^2\omega^1\omega^2 + a_{22}{}^2(\omega^2)^2 + \omega^2 + \mathrm{d}\omega^2 + \omega^1\omega_1{}^2 + \omega^2\omega_2{}^2) - \\ - \lambda_2(a_{11}{}^1(\omega^1)^2 + 2a_{12}{}^1\omega^1\omega^2 + a_{22}{}^1(\omega^2)^2 + \omega^1 + \mathrm{d}\omega^1 + \omega^1\omega_1{}^1 + \\ + \omega^2\omega_2{}^1) = 0 \end{gathered}$$

(les termes d'ordre supérieur étant négligés), donc

$$\omega^1\left\{d\omega^2 + \omega^1\tau_1{}^2 + \omega^2\left(\tau_2{}^2 + \frac{d\mu}{\mu}\right)\right\} - \omega^2\left\{d\omega^1 + \omega^1\left(\tau_1{}^1 + \frac{d\mu}{\mu}\right) + \right.$$
$$\left. + \omega^2\tau_2{}^1\right\} = 0.$$

Or ceci donne $[dB\, d^2B] = 0$ c. q. f. d.

Voici une autre interprétation de la direction (σ^1, σ^2). Si le point A n'est pas un point d'inflexion, il existe une affinité H telle que

$$\mathsf{H}A = B,\ \mathsf{H}\, dA = dB,\ \mathsf{H}\, d^2A = d^2B. \tag{10}$$

Soit $\mathsf{H} = \mathsf{TL}$, où L est une affinité du plan (A) en lui-même.

D'après $(2_{1,3}')$, (10)

$$\mathsf{L}A = A,\ \mathsf{L}\, dA = dA,$$

c'est à dire: la tangente à K en A est l'axe de l'affinité L. La direction de cette affinité est celle du vecteur V pour lequel $\mathsf{L}V = \lambda V$.

Parce que il doit être $\mathsf{L}\, d^2A = d^2A + \sigma^i I_i$, le vecteur $V = \sigma^i I_i$.

Pour déterminer λ considérons deux courbes K_1, K_2 avec la tangente commune en A. Les affinités correspondantes sont L_1 resp. L_2 avec λ_1 resp. λ_2. Soit $V = d^2A - U$, le vecteur U étant porté par la tangente. Donc

$$\lambda_i(d^2A_i - U_i) = d^2A_i - U_i + \sigma^1 I_1 + \sigma^2 I_2,\quad i = 1, 2.$$

Par soustraction

$$(\lambda_2 - 1)\, d^2A_2 - (\lambda_1 - 1)\, d^2A_1 = (\lambda_2 - 1)\, U_2 - (\lambda_1 - 1)\, U_1.$$

A droite il y a un vecteur qui appartient à la tangente et c'est pourquoi $(\lambda_2 - 1)/(\lambda_1 - 1)$ est l'invariant du contact des courbes K_1, K_2 (voir Fubini-Čech, loc. cit., p. 17).

II. Dans cette partie nous allons étudier les correspondances entre deux plans, pour lesquelles le module de l'affinité tangente est constant. Ce sont les correspondances qui conservent l'aire.

Parce que

$$2\frac{d\mu}{\mu} = (a_{11}{}^1 + a_{21}{}^2)\, \omega^1 + (a_{12}{}^1 + a_{22}{}^2)\, \omega^2$$

doit s'évanouir identiquement, on a

$$a_{11}{}^1 + a_{21}{}^2 = a_{12}{}^1 + a_{22}{}^2 = 0.$$

Les équations (6) sont alors

$$\begin{aligned} \tau_1{}^1 - \omega_1{}^1 &= a\omega^1 + b\omega^2,\ \tau_1{}^2 - \omega_1{}^2 = \alpha\omega^1 - a\omega^2, \\ \tau_2{}^1 - \omega_2{}^1 &= b\omega^1 + c\omega^2,\ \tau_2{}^2 - \omega_2{}^2 = -a\omega^1 - b\omega^2, \end{aligned} \tag{6'}$$

où nous venons de poser $a = a_{11}{}^1$, $b = a_{12}{}^1$, $c = a_{22}{}^1$, $\alpha = a_{12}{}^2$.

Pour les directions caractéristiques nous avons l'équation

$$\psi \equiv c(\omega^2)^3 + 3b(\omega^2)^2\,\omega^1 + 3a\,\omega^2(\omega^1)^2 - \alpha(\omega^1)^3 = 0.$$

Par dérivation extérieure de (6′) nous obtenons

$$\begin{gathered}[(\mathrm{d}a - a\omega_1{}^1 - 2b\omega_1{}^2 + \alpha\omega_2{}^1)\,\omega^1] + \\ + [(\mathrm{d}b + b\omega_1{}^1 - c\omega_1{}^2 - 2a\omega_2{}^1)\,\omega^2] + (\alpha c + ab)[\omega^1\omega^2] = 0, \\ [(\mathrm{d}b + b\omega_1{}^1 - c\omega_1{}^2 - 2a\omega_2{}^1)\,\omega^1] + \\ + [(\mathrm{d}c + 3c\omega_1{}^1 - 3b\omega_2{}^1)\,\omega^2] - 2(b^2 - ac)[\omega^1\omega^2] = 0, \\ [(\mathrm{d}\alpha - 3\alpha\omega_1{}^1 + 3a\omega_1{}^2)\,\omega^1] + \\ + [(-\mathrm{d}a + a\omega_1{}^1 + 2b\omega_1{}^2 - \alpha\omega_2{}^1)\,\omega^2] + 2(a^2 + \alpha b)[\omega^1\omega^2] = 0.\end{gathered}$$

Le système (6′) est en involution et sa solution générale dépend d'une fonction de deux variables.

Dans le cas où une direction caractéristique est au moins double on peut donner des résultats plus détaillés.

Nous posons $\mu = 1$ ce qui ne restreint pas la généralité.

A) L'équation $\psi = 0$ a une solution triple. Le vecteur I_1 étant dans cette direction et le vecteur I_2 multiplié par un facteur, la forme ψ est $\psi = (\omega^2)^3$. Les équations (6′) et leurs conditions d'intégrabilité sont

$$\begin{aligned}\tau_1{}^1 - \omega_1{}^1 = 0,\quad \tau_1{}^2 - \omega_1{}^2 = 0,\\ \tau_2{}^1 - \omega_2{}^1 = \omega^2,\quad \tau_2{}^2 - \omega_2{}^2 = 0,\end{aligned} \tag{6″}$$

$$\begin{gathered}[\omega_1{}^2\omega^2] = 0,\\ [\omega_1{}^2\omega^1] - 3[\omega_2{}^1\omega^2] = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Nous voyons que la solution dépend de deux fonctions d'une variable. D'après (11_1), $\omega_1{}^2 = p\omega^2$. Les courbes caractéristiques sont données par $\omega^2 = 0$. Avec $\omega^2 = 0$ les équations (3) deviennent

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A &= \omega^1 I_1, & \mathrm{d}B &= \omega^1 J_1,\\ \mathrm{d}I_1 &= \omega_1{}^1 I_1, & \mathrm{d}J_1 &= \omega_1{}^1 J_1.\end{aligned} \tag{+}$$

Donc, les courbes caractéristiques sont des droites π dans le plan (A) et des droites π' dans le plan (B) et la correspondance C considérée seulement pour une des droites π est une affinité A_π.

α) $p = 0$. Les droites π (ainsi que π') sont parallèles. Choisissons une droite π pour l'axe x_1, une droite π' pour l'axe y_1. La correspondance prend la forme

$$y_1 = x_1 + f(x_2),\quad y_2 = x_2.$$

La fonction f est complètement arbitraire.

Si $p \neq 0$ deux droites π infiniment voisines ont un point commun. Ce point est

$$P = A - \frac{1}{p}\,I_1.$$

De l'équation $\omega_1^2 = p\omega^2$ on déduit par dérivation extérieure:

$$[(\mathrm{d}p + p^2\omega^1 - p\omega_1^1)\,\omega^2] = 0$$

d'où

$$\frac{1}{p^2}(\mathrm{d}p + p^2\omega^1 - p\omega_1^1) = r\omega^2$$

et

$$\mathrm{d}P = r\omega^2 I_1.$$

Le point Q correspondant au point P dans l'affinité A_π est

$$Q = B - \frac{1}{p} J_1,$$

alors

$$\mathrm{d}Q = r\omega^2 J_1.$$

β) Si $r = 0$, donc $\mathrm{d}P = \mathrm{d}Q = 0$. Les points P, Q étant fixes, choisissons les pour les origines des coordonnées. La correspondance est de la forme

$$\frac{y_2}{y_1} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

$$y_1 = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_1.$$

La condition $\mu = 1$ nous donne

$$\begin{vmatrix} -f't + f, & f' \\ \varphi f - \varphi' f t - \varphi f' t, & \varphi' f + \varphi f' \end{vmatrix} = 1$$

où

$$t = \frac{x_2}{x_1},\ f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\ \varphi' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

La solution est

$$f = \frac{1}{\sqrt{\varphi'}}.$$

γ) $r \neq 0$. Nous voyons: le point $P(Q)$ décrit une courbe dont la droite tangente est π (π').

On a

$$\mathrm{d}^2P = \{\mathrm{d}(r\omega^2) + r\omega^2\omega_1^1\}\, I_1 + r\omega^2\omega_1^2 I_2,$$
$$\mathrm{d}^2Q = \{\mathrm{d}(r\omega^2) + r\omega^2\omega_1^1\}\, J_1 + r\omega^2\omega_1^2 J_2.$$

L'arc affine de ces courbes est

$$\mathrm{d}\sigma = [\mathrm{d}P\,\mathrm{d}^2P]^{1/3} = [\mathrm{d}Q\,\mathrm{d}^2Q]^{1/3}. \qquad (*)$$

Voici la construction de la correspondance de cette espèce: Dans chacun des deux plans (A) et (B) on choisit une courbe et l'on trouve une correspondance entre ces deux courbes de telle facon que dans cette correspondance on ait (*). Pour chaque couple de points correspondants

P, Q nous construisons l'affinité A_0 réalisant le contanct d'ordre deux de ces courbes en Q. Cette affinité A_0 est, sur la droite tangente en P, identique avec A_π et la correspondance C est engendrée par ces affinités A_π.

B) Supposons que l'équation $\psi = 0$ a une racine double et une racine simple. Choisissons les vecteurs I_1, I_2 dans les directions données par $\psi = 0$; nous avons

$$\psi = 3(\omega^2)^2\,\omega^1.$$

(Nous avons choisi les longueurs des vecteurs I_1, I_2 de telle façon que $b = 1$.)

Les équations (6′) sont alors

$$\begin{aligned} \tau_1{}^1 - \omega_1{}^1 &= \omega^2, & \tau_1{}^2 - \omega_1{}^2 &= 0, \\ \tau_2{}^1 - \omega_2{}^1 &= \omega^1, & \tau_2{}^2 - \omega_2{}^2 &= -\,\omega^2 \end{aligned} \tag{6‴}$$

avec les conditions d'intégrabilité

$$\begin{gathered} 2[\omega^1\omega_1{}^2] - [\omega^2\omega_1{}^1] = 0, \\ [\omega^2\omega_1{}^1] - [\omega^2\omega_2{}^1] + 2[\omega^1\omega^2] = 0, \\ [\omega^2\omega_1{}^2] = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

La solution générale dépend de trois fonctions d'une variable.

De (12_3): $\omega_1{}^2 = p\omega^2$. Les courbes caractéristiques doubles sont données par l'équation $\omega^2 = 0$. Pour ces courbes nous avons de nouveau les équations $(+)$. Les conclusions sont les mêmes (au lieu de caractéristiques triples on doit parler de caractéristiques doubles).

α) Si $p = 0$, les droites π resp. π' sont parallèles et la correspondance a la forme

$$y_1 = \frac{1}{f_1{}'(x_2)}\,x_1 + f_2(x_2),$$
$$y_2 = f_1(x_2).$$

Soit $p \neq 0$.

Par dérivation extérieure de l'équation $\omega_1{}^2 = p\omega^2$ nous obtenons

$$\mathrm{d}p + p^2\omega^1 - p\omega_1{}^1 = s\omega^2.$$

Le point d'intersection de deux droites π infiniment voisines est

$$P = A - \frac{1}{p}\,I_1$$

et l'on a

$$\mathrm{d}P = \frac{s}{p^2}\,\omega^2 I_1.$$

Pour le point $Q = B - \dfrac{1}{p}J_1$ qui correspond au point P dans l'affinité A_π on a

$$dQ = \left(\frac{s}{p^2} - \frac{1}{p}\right) \omega^2 J_1.$$

Posons

$$dP = \alpha\omega^2 I_1, \ dQ = (\alpha + \beta)\, \omega^2 J_1. \qquad (++)$$

Avec cette notation nous avons

$$d^2P = d(\alpha\omega^2)\, I_1 + \alpha\omega^2(\omega_1^1 I_1 + \omega_1^2 I_2),$$
$$d^2Q = d(\overline{\alpha + \beta\omega^2})\, J_1 + (\alpha + \beta)\, \omega^2(\overline{\omega_1^1 + \omega^2 J_1} + \omega_1^2 J_2).$$

β) Si $\alpha = 0$, toutes les droites π passent par un point fixe P_0. Mais $\beta = -\frac{1}{p} \neq 0$ et le point Q décrit une courbe dont les droites tangentes sont les droites π'.

Soit $P_0 = (0, 0)$ et soit $Q = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ le point qui correspond à la droite $x_2 = tx_1$. La correspondance est alors

$$y_1 = \eta_1(t) + x_1\, \varphi(t)\, \eta_1'(t), \ y_2 = \eta_2(t) + x_1\, \varphi(t)\, \eta_2'(t).$$

De la condition $\mu = 1$ nous obtenons

$$\varphi(t) = (\eta_1'(t)\, \eta_2''(t) - \eta_1''(t)\, \eta_2'(t))^{-\frac{1}{3}}.$$

Si $\alpha + \beta = 0$, alors $\alpha \neq 0$ et les plans (A), (B) sont à échanger.

γ) $\alpha \neq 0 \neq \alpha + \beta$. Pour la courbe du point P resp. Q nous avons

$$[dP\, d^2P] = p\alpha^2(\omega^2)^3, \quad [dQ\, d^2Q] = p(\alpha + \beta)^2(\omega^2)^3 \qquad (+++)$$

et les tangentes à ces deux courbes sont les droites π resp. π'.

La construction de cette correspondance est la suivante.

On choisit arbitrairement deux courbes ainsi qu'une correspondance entre leurs points; ceci donne exactement trois fonctions d'une variable. Pour les points correspondants P, Q nous déterminons $[dP\, d^2P]$, $[dQ\, d^2Q]$. Selon $(+++)$ nous calculons β/α. Ce nombre étant connu nous pouvons trouver l'affinité A_π entre les tangentes et P et en Q qui transforme P en Q, I_1 en J_1 et qui satisfait à $(++)$.

III. L'affinité T [(voir définition (2')] est déterminée (pour une correspondance C fixe) par le point A et dépend alors de n paramètres. Dans cette partie nous allons nous occuper de la détermination des correspondances pour $n = 2, 3$ pour lesquelles les affinités T dépendent de $\nu < n$ paramètres.

Soit $n = 2$. On peut avoir $\nu = 1$. Par chaque point A passe une courbe C le long de laquelle l'affinité T est constante. Soit I_1 le vecteur tangent à cette courbe dans chaque point.

T est définie par

$$A \to B, \ I_1 \to \mu J_1, \ I_2 \to \mu J_2.$$

Sur la courbe C on a $\omega^2 = 0$ et donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}A = \omega^1 I_1, && \mathrm{d}B = \omega^1 \mu J_1,\\
&\mathrm{d}I_1 = \omega_1{}^1 I_1 + \omega_1{}^2 I_2, && \mathrm{d}(\mu J_1) = (\omega^1 + a_{11}{}^1\omega^1)\mu J_1 + (\omega_1{}^2 + a_{12}{}^2\omega^1)\mu J_2,\\
&\mathrm{d}I_2 = \omega_2{}^1 I_1 - \omega_1{}^1 I_2, && \mathrm{d}(\mu J_2) = (\omega_2{}^1 + a_{12}{}^1\omega^1)\mu J_1 + (-\omega_1{}^1 + a_{21}{}^2\omega^1)\mu J_2.
\end{aligned}$$

L'affinité T est fixe si

$$a_{11}{}^1 = a_{12}{}^1 = a_{11}{}^2 = a_{21}{}^2 = 0.$$

Les équations (6) sont ici

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} + \tau_1{}^1 - \omega_1{}^1 = 0,\ \tau_1{}^2 - \omega_1{}^2 = 0,\\
\tau_2{}^1 - \omega_2{}^1 = a_{22}{}^1\omega^2,\ \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} + \tau_2{}^2 - \omega_2{}^2 = a_{22}{}^2\omega^2.
\end{gathered} \tag{13}$$

D'après (3_3) il y a

$$2\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = a_{22}{}^2\omega^2.$$

Le système (13) devient fermé par adjonction des équations

$$\begin{gathered}
a_{22}{}^1[\omega_1{}^2\omega^2] = 0,\\
[(\mathrm{d}a_{22}{}^1 + 3a_{22}{}^1\omega_1{}^1 + a_{22}{}^2\omega_2{}^1)\,\omega^2] - a_{22}{}^1[\omega_1{}^2\omega^1] = 0,\\
a_{22}{}^2[\omega_1{}^2\omega^2] = 0,\\
[(\mathrm{d}a_{22}{}^2 + a_{22}{}^1\omega_1{}^2 + a_{22}{}^2\omega_1{}^1)\,\omega^2] - a_{22}{}^2[\omega_1{}^2\omega^1] = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Pour $a_{22}{}^1 = a_{22}{}^2 = 0$ on a la solution singulière; c'est une affinité. Ce cas exclu le système est en involution et sa solution générale dépend de trois fonctions d'une variable.

L'équation (14_1) ou (14_3) nous donne

$$\omega_1{}^2 = p\omega^2;$$

c'est à dire toutes les courbes C sont des droites π. Les courbes correspondantes dans le plan (B) sont des droites π'. En même temps pour $\omega^2 = 0$ les équations (3) prennent la forme suivante:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}A = \omega^1 I_1, && \mathrm{d}B = \omega^1(\mu J_1),\\
&\mathrm{d}I_1 = \omega_1{}^1 I_1, && \mathrm{d}(\mu J_1) = \omega_1{}^1\mu(J_1).
\end{aligned}$$

La correspondance C considérée pour une droite π seulement se réduit à une affinité A_π entre les droites π et π' correspondantes. L'affinité A_π coïncide d'ailleurs avec l'affinité T qui appartient à la droite π.

Trois cas sont à distinguer.

α) $p = 0$. Les droites π resp. π' sont parallèles. Nous choisissons une droite π resp. π' pour l'axe x_1 resp. y_1. La correspondance est

$$\begin{aligned}
y_1 &= \varphi(x_2)\,x_1 + f_1(x_2),\\
y_2 &= x_2 + f_2(x_2)
\end{aligned}$$

avec la condition que le long de la droite $x_2 = \text{const}$ T soit fixe. De la définition de T il vient que

$$\varphi = \text{const}.$$

Soit $p \neq 0$. Deux droites π infiniment voisines ont le point $P = A - \frac{1}{p} I_1$ commun. Nous pouvons normaliser le vecteur I_1 de manière que $P = A - I_1$, donc $p = 1$.

L'équation $\omega_1^2 = \omega^2$ nous donne par dérivation extérieure

$$\omega_1^1 - \omega^1 = q\omega^2.$$

Et alors

$$\mathrm{d}P = -q\omega^2 I_1.$$

Dans l'affinité T correspond au point P le point $Q = B - \mu J_1$ avec

$$\mathrm{d}Q = -q\omega^2 \mu J_1.$$

Pour les éléments d'ordre deux nous avons les expressions

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2P &= -\{\mathrm{d}(q\omega^2) + q\omega^2\omega_1^1\} I_1 - q(\omega^2)^2 I_2, \\ \mathrm{d}^2Q &= -\{\mathrm{d}(q\omega^2) + q\omega^2\omega_1^1\} \mu J_1 - q(\omega^2)^2 \mu J_2. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathsf{T}P &= Q, \\ \mathsf{T}\,\mathrm{d}P &= \mathrm{d}Q, \\ \mathsf{T}\,\mathrm{d}^2P &= \mathrm{d}^2Q. \end{aligned} \tag{15}$$

β) $q = 0$. Dans ce cas les points P, Q sont fixes. Prenons les pour les origines des coordonnées. La correspondance est de la forme

$$y_1 = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_1,$$

$$y_2 = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_2.$$

La condition que l'affinité T soit constante le long de la droite $x_2 = tx_1$ est remplie pour des fonctions f, φ complètement arbitraires. C'est pourquoi y_2/y_1 est une fonction arbitraire de x_2/x_1.

γ) $q \neq 0$. Les droites π étant tangentes à une courbe, les droites π' sont tangentes à une courbe elles aussi. On peut choisir d'une manière arbitraire ces deux courbes ainsi qu'une correspondance entre leurs points. Pour chaque couple de points correspondants P, Q nous construisons l'affinité T selon (15). La relation entre T, A_π, C est connue et la correspondance est donc déterminée.

Dans l'espace ($n = 3$) deux cas sont possibles: les affinités T dépendent A) d'un paramètre ou B) de deux paramètres.

A) Par chaque point A passe une surface S sur laquelle T est constante. Les vecteurs I_2, I_3 étant dans le plans tangent de cette surface nous trouvons que les différences $\tau_i^k - \omega_i^k$ sont liées par les relations:

$$\frac{d\mu}{\mu} + \tau_1^1 - \omega_1^1 = a_{11}^1\omega^1, \; \tau_1^2 - \omega_1^2 = a_{11}^2\omega^1, \; \tau_1^3 - \omega_1^3 = a_{11}^3\omega^1,$$

$$\tau_2^1 - \omega_2^1 = \tau_3^1 - \omega_3^1 = \frac{d\mu}{\mu} + \tau_2^2 - \omega_2^2 = \tau_3^2 - \omega_3^2 = \tag{16}$$

$$= \tau_2^3 - \omega_2^3 = \frac{d\mu}{\mu} + \tau_3^3 - \omega_3^3 = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\begin{aligned}
[\omega^1\psi_1] + a_{11}^1[\omega^2\omega_2^1] + a_{11}^1[\omega^3\omega_3^1] &= 0, \\
a_{11}^1[\omega_2^1\omega^1] = a_{11}^1[\omega_3^1\omega^1] &= 0, \\
[\omega^1\psi_2] + a_{11}^2[\omega^2\omega_2^1] + a_{11}^2[\omega^3\omega_3^1] &= 0, \\
a_{11}^2[\omega_2^1\omega^1] = a_{11}^2[\omega_3^1\omega^1] &= 0, \\
[\omega^1\psi_3] + a_{11}^3[\omega^2\omega_2^1] + a_{11}^3[\omega^3\omega_3^1] &= 0, \\
a_{11}^3[\omega_2^1\omega^1] = a_{11}^3[\omega_3^1\omega^1] &= 0
\end{aligned}$$

où ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont les formes de Pfaff linéairement indépendantes entre elles et indépendantes de $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_2^1, \omega_3^1$.

Le système est en involution et sa solution dépend de cinq fonctions d'une variable. Solutions singulières sont telles que $a_{11}^1 = a_{11}^2 = a_{11}^3 = 0$; ce sont les affinités.

Soit $a_{11}^i \neq 0$ au moins pour un index i. D'après le lemme de Cartan nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\omega_2^1 &= p_2\omega^1, \\
\omega_3^1 &= p_3\omega^1.
\end{aligned}$$

Les surfaces S sont des plans — désignons les par ϱ et les plans correspondants par ϱ' — et la correspondance C est engendrée par des affinités A_ϱ qui sont les affinités T considérées seulement sur le plan ϱ.

α) $p_2 = p_3 = 0$. Les plans ϱ resp. ϱ' sont parallèles. Prenons un de ces plans pour le plan $x_1 = 0$ resp. $y_1 = 0$. La correspondance a la forme

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + f_1(x_1), \\
y_2 &= x_2 + f_2(x_1), \\
y_3 &= x_3 + f_3(x_1);
\end{aligned}$$

les fonctions f_1, f_2, f_3 sont arbitraires.

Nous allons donc supposer qu'on n'a pas $p_2 = 0, p_3 = 0$. Si nous faisons varier le trièdre $AI_1I_2I_3$ en laissant le point A fixe les fonctions p_2, p_3 changent d'après

$$\begin{aligned}
\delta p_2 - p_2e_2^2 - p_3e_2^3 &= 0, \\
\delta p_3 - p_2e_3^2 - p_3e_3^3 &= 0.
\end{aligned}$$

(Les formes e sont les formes ω avec les paramètres principaux fixes.)

Par un choix des vecteurs I_2, I_3 nous pouvons atteindre que

$$p_2 = 0,\ p_3 = 1.$$

Le plan passant par le point A et par les vecteurs I_2, I_3 a l'équation

$$R_1 \equiv [(X - A)\, I_2 I_3] = 0,$$

X désignant le point courant du plan. Les équations $R_2 = 0$, $R_3 = 0$ ont une signification analogue. Pour le déplacement infinitésimal du plan R_1 nous avons

$$\mathrm{d}R_1 = -\,\omega_1{}^1 R_1 - \omega^1 R_3 - \omega^1.$$

Le plan $R_3 + 1 = 0$ est le plan déterminé par le point $A - I_3$ et les vecteurs I_1, I_2.

Parce que $\varrho \equiv R_1 = 0$ nous voyons que la droite d'intersection des plans ϱ, $\mathrm{d}\varrho$ est la droite $\pi \equiv A - I_3 + \lambda I_2$.

Des équations $\omega_2{}^1 = 0$, $\omega_3{}^1 = \omega^1$ il suit

$$\omega_2{}^3 = q\omega^1,\ \omega_3{}^3 - \omega^3 = r\omega^1.$$

β) $q = 0$. Les vecteurs I_2 sont parallèles; c'est à dire les droites π et les droites correspondantes π' dans le second espace sont parallèles.

Si $r = 0$ toutes les droites π sont identiques, π' elles aussi. Prenons les pour les axes x_1, y_1. Nous constatons que les parties des affinités A_ϱ relatives à l'axe sont identiques l'une à l'autre et c'est pourquoi la correspondance a la forme

$$\frac{y_2}{y_3} = f\left(\frac{x_2}{x_3}\right),$$

$$y_1 = x_1 + \varphi_1\left(\frac{x_2}{x_3}\right) x_2,$$

$$y_2 = \varphi_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right) x_2.$$

Si $r \neq 0$ les droites π resp. π' sont les droites d'une surface cylindrique.

Prenons un plan qui coupe les droites π. Supposons que le point A et les vecteurs I_1, I_3 appartiennent à ce plan; dans les équations (3) nous avons $\omega^2 = 0$, $\omega_1{}^2 = \omega_3{}^2 = 0$. Le point $P = A - I_3$ qui est le point d'intersection des droites π avec ce plan engendre une courbe. Le point $Q = B - \mu J_3$ (correspondant au point P dans l'affinité A_ϱ) engendre une courbe qui est, en général, gauche. Si le vecteur I_2 est fixe, alors le vecteur μJ_2 est aussi fixe. Parce que les composantes rélatives de I_3 sont les mêmes que celles de μJ_3, nous avons

$$\mathsf{A}_\varrho P = Q,$$

$$\mathsf{A}_\varrho \, \mathrm{d}P = \mathrm{d}Q,$$

et par définition

$$\mathsf{A}_\varrho I_2 \quad = \mu J_2.$$

Pour construire la correspondance nous nous donnons dans l'espace (A) une courbe plane (lieu des points P), une courbe dans l'espace (B) (lieu des points Q) et une correspondance entre elles. Nous menons une surface cylindrique par chacune de ces courbes. Les vecteurs I_2 resp. μJ_2 étant choisis d'une manière fixe nous trouvons les affinités A_ϱ, suivant ce qui précède, entre les plans tangents aux surfaces.

γ) $q \neq 0$. Les trois plans ϱ infiniment voisins ont un point P_0 commun; de même pour les plans ϱ'. Si les points P_0, Q_0 sont fixes les droites π resp. π' forment une surface conique et la construction est la même que dans le cas précédent avec les changements suivants: les vecteurs $I_2, \mu J_2$ ne sont pas fixes et les affinités A_ϱ transforment P_0 en Q_0.

Si le point P_0 resp. Q_0 décrit une courbe, nous constatons que les droites π resp. π' sont les tangentes et que les plans ϱ resp. ϱ' sont les plans osculateurs de cette courbe. L'affinité T est telle que

$$\begin{aligned} \mathsf{T}P_0 \quad &= Q_0, \quad & \mathsf{T}\, \mathrm{d}P_0 &= \mathrm{d}Q_0, \\ \mathsf{T}\, \mathrm{d}^2 P &= \mathrm{d}^2 Q_0, \quad & \mathsf{T}\, \mathrm{d}^3 P_0 &= \mathrm{d}^3 Q_0. \end{aligned}$$

La construction est évidente.

B) Soit T une affinité dépendante de deux paramètres. Par chaque point P passe une courbe C le long de laquelle l'affinité T est constante. Soit I_1 le vecteur tangent de cette courbe en chaque point. Dans les équations (6) on a

$$\begin{aligned} a_{11}{}^1 = a_{12}{}^1 = a_{13}{}^1 = 0, \\ a_{11}{}^2 = a_{12}{}^2 = a_{13}{}^2 = 0, \\ a_{11}{}^3 = a_{12}{}^3 = a_{13}{}^3 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Par dérivation extérieure des équations (6), ayant regard à (17), nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} [(a_{22}{}^1\omega_1{}^2 + a_{23}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^2] + [(a_{23}{}^1\omega_1{}^2 + a_{33}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^3] = 0, \\ [(a_{22}{}^2\omega_1{}^2 + a_{23}{}^2\omega_1{}^3)\,\omega^2] + [(a_{23}{}^2\omega_1{}^2 + a_{33}{}^2\omega_1{}^3)\,\omega^3] = 0, \\ [(a_{22}{}^3\omega_1{}^2 + a_{23}{}^3\omega_1{}^3)\,\omega^2] + [(a_{23}{}^3\omega_1{}^2 + a_{33}{}^3\omega_1{}^3)\,\omega^3] = 0, \\ -[(a_{22}{}^1\omega_1{}^2 + a_{23}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^1] + [\psi_1\omega^2] + [\psi_2\omega^3] + k_1[\omega^2\omega^3] = 0, \\ -[(a_{23}{}^1\omega_1{}^2 + a_{33}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^1] + [\psi_2\omega^2] + [\psi_3\omega^3] + k_2[\omega^2\omega^3] = 0, \\ -[(a_{22}{}^2\omega_1{}^2 + a_{23}{}^2\omega_1{}^3)\,\omega^1] + [(\psi_4 + a_{22}{}^1\omega_1{}^2)\,\omega^2] + [(\psi_5 + a_{23}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^3] + \\ + k_3[\omega^2\omega^3] = 0, \\ -[(a_{23}{}^2\omega_1{}^2 + a_{33}{}^2\omega_1{}^3)\,\omega^1] + [(\psi_5 + a_{23}{}^1\omega_1{}^2)\,\omega^2] + [(\psi_6 + a_{33}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^3] + \\ + k_4[\omega^2\omega^3] = 0, \\ -[(a_{22}{}^3\omega_1{}^2 + a_{23}{}^3\omega_1{}^3)\,\omega^1] + [(\psi_7 + a_{22}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^2] + [(\psi_8 + a_{23}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^3] + \\ + k_5[\omega^2\omega^3] = 0, \\ -[(a_{23}{}^3\omega_1{}^2 + a_{33}{}^3\omega_1{}^3)\,\omega^1] + [(\psi_8 + a_{23}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^2] + [(\psi_9 + a_{33}{}^1\omega_1{}^3)\,\omega^3] + \\ + k_6[\omega^2\omega^3] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

où les formes de Pfaff $\psi_1, \ldots, \psi_9$ sont linéairement indépendantes entre elles ainsi que de $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^2, \omega_1^3$. Les $k_1, \ldots, k_6$ sont les expressions en a_{jk}^i.

Ce système n'est pas en involution. Le cas où tous les $a_{jk}^i = 0$ conduit aux affinités. Nous pouvons donc supposer que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{22}^1, & a_{23}^1, & a_{22}^2, & a_{23}^2, & a_{22}^3, & a_{23}^3 \\ a_{23}^1, & a_{33}^1, & a_{23}^2, & a_{33}^2, & a_{23}^3, & a_{33}^3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

est au moins un.

a) Si le rang est un, la deuxième ligne p. e. est proportionnelle à la première. Dans les équations (6) ne figure que la forme $\omega^2 + k\omega^3$ et l'affinité T ne dépend que d'un paramètre. C'est le cas qui a été déjà étudié.

b) Soit alors le rang de la matrice (19) égal à deux. Les équations $(18_{1,2,3})$ expriment d'après le lemme de Cartan que les formes $a_{22}^1\omega_1^2 + a_{23}^1\omega_1^3, \ldots, a_{23}^3\omega_1^2 + a_{33}^3\omega_1^3$ sont des combinaisons linéaires des formes ω^2, ω^3. En vertu de notre supposition nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= k_{22}\omega^2 + k_{23}\omega^3, \\ \omega_1^3 &= k_{32}\omega^2 + k_{33}\omega^3 \end{aligned} \tag{20}$$

où le coefficients k_{ij} remplissent les conditions

$$\begin{aligned} -a_{22}^1k_{23} + a_{23}^1(k_{22} - k_{33}) + a_{33}^1k_{32} &= 0, \\ -a_{22}^2k_{23} + a_{23}^2(k_{22} - k_{33}) + a_{33}^2k_{32} &= 0, \\ -a_{22}^3k_{23} + a_{23}^3(k_{22} - k_{33}) + a_{33}^3k_{32} &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Le système (6), (20) [avec (17) et (21)] est déjà en involution et sa solution générale dépend de cinq fonctions de deux variables.

Les courbes C sont données par $\omega^2 = \omega^3 = 0$; on a donc $\omega_1^2 = \omega_1^3 = 0$. Nous voyons que les courbes C sont des droites π; les courbes correspondantes dans le second espace sont des droites π'. En même temps, l'égalité des composantes relatives pour A et B et pour I_1 et μJ_1 exprime que la correspondance C est engendrée par les affinités A_π. L'affinité A_π est identique avec T (pour la droite π).

Les droites π resp. π' dépendent de deux paramètres et forment alors une congruence K resp. K'.

α) Le cas où tous les coefficients $k_{ij} = 0$. Les droites π resp. π' sont parallèles et la solution ne dépend que de trois fonctions de deux variables.

Elle est fournie par les équations

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \; y_2 = \varphi_2(x_1, x_2), \; y_3 = x_3 + \varphi_3(x_1, x_2).$$

Nous supposerons donc dans ce qui suit qu'un au moins des coefficients k_{ij} soit différent de zéro.

Cherchons la surface focale de la congruence K. Soit $P = A + \lambda I_1$ le point qui appartient à cette surface.

On a aussi

$$P = A + \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2 + \omega^3 I_3 + \varkappa(I_1 + \omega_1{}^1 I_1 + \omega_1{}^2 I_2 + \omega_1{}^3 I_3).$$

En comparant ces deux expressions nous avons

$$\begin{aligned} \omega^2 + \varkappa\omega_1{}^2 &= 0, \\ \omega^3 + \varkappa\omega_1{}^3 &= 0; \end{aligned} \tag{22}$$

on doit alors avoir

$$\begin{vmatrix} \omega^2, & k_{22}\omega^2 + k_{23}\omega^3 \\ \omega^3, & k_{32}\omega^2 + k_{33}\omega^3 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\Phi \equiv k_{32}(\omega^2)^2 + (k_{33} - k_{22})\,\omega^2\omega^3 - k_{23}(\omega^3)^2 = 0. \tag{23}$$

β) L'équation (23) est une identité. Le cas α) étant exclusion a $k_{22} = k_{23} = k \neq 0$. Aussi $\lambda = -\frac{1}{k}$. Par dérivation extérieure des relations $\omega_1{}^2 = k\omega^2$, $\omega_1{}^3 = k\omega^3$:

$$\mathrm{d}k + k^2\omega^1 - k\omega_1{}^1 = 0.$$

Nous avons $\mathrm{d}P = 0$; les droites de la congruence K passent par un point fixe. Dans l'espace (B) le point $Q = B - \frac{1}{k}\mu J_1$ est fixe et toutes les droites π' passent par ce point.

Nous prenons ces deux points pour les origines des coordonnées. La correspondance C est

$$y_1 = \varphi_3(u, v)\,\varphi_1(u, v)\,x_1,\quad y_2 = \varphi_3(u, v)\,\varphi_2(u, v)\,x_2,$$
$$y_3 = \varphi_3(u, v)\,x_3$$

où $u = \frac{x_1}{x_3}$, $v = \frac{x_2}{x_3}$. Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont arbitraires.

γ) L'équation $\Phi = 0$ a deux racines distinctes. Nous pouvons choisir les vecteurs I_1, I_2, I_3 de manière que $\Phi = \omega^2\omega^3$. Dans les équations (20) on a $k_{32} = k_{23} = 0$, $k_{33} - k_{22} = 1$. Posons $k_{22} = k$. Dérivation extérieure des équations (20) donne

$$[(\mathrm{d}k - k\omega_1{}^1)\,\omega^2] + [\omega_3{}^2\omega^3] + k^2[\omega^1\omega^2] = 0,$$
$$[(\mathrm{d}k - \overline{k+1}\,\omega_1{}^1)\,\omega^3] - [\omega_2{}^3\omega^2] + (k+1)^2[\omega^1\omega^3] = 0.$$

De la première des équations

$$\mathrm{d}k + k^2\omega^1 - k\omega_1{}^1 = \alpha\omega^2 + \beta\omega^3.$$

Un des nombres k, $k+1$ est différent de zéro; supposons p. e. $k \neq 0$.

Pour $\omega^3 = 0$ nous avons $\lambda_1 = -\frac{1}{k}$ et le point P est

$$P_1 = A - \frac{1}{k}\,I_1.$$

De cette équation on déduit

$$dP_1 = \frac{1}{k^2} \{(\alpha\omega^2 + \beta\omega^3) I_1 - \omega^3 I_3\}.$$

Supposons que $\alpha \neq 0$. Le point P_1 appartient à la surface S_1 dont le plan tangent porte les vecteurs I_1, I_3.

Le point $Q_1 = B - \frac{1}{k} \mu J_1$ correspond au point P_1 dans l'affinité A_π.

$$dQ_1 = \frac{1}{k^2} \{(\alpha\omega^2 + \beta\omega^3) \mu J_1 - \omega^3 \mu J_2\}.$$

La construction de la correspondance est la suivante: on choisit une surface S_1 dans l'espace (A), une surface S_1' dans l'espace (B) et une correspondance entre elles. Dans le plan tangent à la surface S_1 au point P_1 on mène une droite π. Q_1 étant le point de S_1' qui correspond au point P_1 on trouve l'affinité A_0 des plans tangents qui transforme P_1 en Q_1, dP_1 en dQ_1. Les droites π' seront les droites $\mathsf{A}_0 \pi$. Sur la droite π, A_π est identique avec A_0.

Si $\alpha = 0$, autres cas sont possibles.

δ) Le cas où l'équation (23) a une racine double et la surface focale existe n'est que le cas précédent; seulement on ne peut pas choisir la droite π, qui doit être une tangente asymptotique.

O afinních vlastnostech analytických korespondencí.

(Obsah předešlého článku.)

Budiž C analytická korespondence mezi afinními prostory (A) a (B) o n dimensích. Body prvního označme A, body druhého B a budiž $B = \mathsf{C}A$. Existuje afinita T, že $\mathsf{T}A = B$, $\mathsf{T}\, dA = dB$. Tuto afinitu nazveme tečnou afinitou (ke korespondenci C v bodu A). Případ, že C je afinita, je v dalším vždy vyloučen.

I. Pro druhý řád je obecně $\mathsf{T}\, d^2A \neq d^2B$. Veďme bodem A křivku K; křivky K a $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{C}K$ mají tedy styk pouze prvého řádu. Promítneme-li tyto křivky směrem $V = \mathsf{T}^{-1}\, d^2B - d^2A$ do nadroviny jdoucí bodem A, mají průměty styk druhého řádu. V rovině má V také tento význam: je to směr afinity H takové, že křivky $\mathsf{C}K$ a $\mathsf{TH}K$ mají styk druhého řádu.

II. V druhé části jsou vyšetřovány korespondence mezi dvěma rovinami, pro které je modul afinity T konstantní. Takové korespondence existují a závisí od jedné funkce dvou proměnných. Pro případ, že existuje charakteristický směr nejméně dvojnásobný, jsou udány rovnice nebo konstrukce takových korespondencí. Charakteristická křivka odpovídající dvojnásobnému charakteristickému směru je vždy přímka, a řešení se rozpadají na čtyři skupiny podle toho, zda tyto přímky jsou rovnoběžné, či procházejí pevným bodem v obou rovinách nebo jenom v jedné z nich nebo obalují v obou rovinách křivku.

III. Ve třetí části jsou hledány korespondence pro rovinu a prostor ($n = 2$ nebo 3), pro které afinity T závisí na $\nu < n$ parametrech. Každým bodem A pak prochází $(n - \nu)$-rozměrný lineární prostor $R_{n,\nu}$, na kterém je T konstantní. Dále je pro tento prostor korespondence C identická s afinitou T. Jemu odpovídá v prostoru (B) prostor $R_{n,\nu}'$ procházející bodem $B = CA$.

A) $n = 2$, $\nu = 1$. Korespondence tohoto typu závisí na třech funkcích jedné proměnné. Pro případ, že přímky $\pi \equiv R_{2,1}$ jsou rovnoběžné nebo procházejí jedním bodem, jsou udány rovnice příslušné korespondence. Obalují-li přímky τ křivku, obalují také π' křivku. Afinita T realisuje pak styk druhého řádu obou křivek v dotykových bodech odpovídajících si přímek π a π'.

B) $n = 3$, $\nu = 1$. Korespondence závisí na pěti funkcích jedné proměnné. Konstrukce závisí na vzájemné poloze rovin $\varrho = R_{3,1}$. Jsou-li tyto roviny oskulačními rovinami křivky, pak totéž platí o rovinách ϱ' a afinita T realisuje styk třetího řádu obou křivek v dotykových bodech korespondujících rovin ϱ a ϱ'. Také pro ostatní případy jsou udány konstrukce hledané korespondence.

C) $n = 3$, $\nu = 2$. Korespondence závisí na pěti funkcích dvou proměnných. Prostory $R_{3,2}$ jsou přímky π, které tvoří kongruenci K. Pro případ, že přímky π jsou rovnoběžné nebo procházejí pevným bodem, jsou udány rovnice příslušné korespondence. Je-li v kongruenci K fokální plocha, je udána konstrukce této korespondence.