Křivce $p$ náleží oblouk $B_0DB_1$ kružnice $l'$ definovaný nerovnostmi:

$$2 \arccos \frac{x_0}{R} \leqq \omega \leqq 2\pi - 2 \arccos \frac{x_0}{R} \cdot \qquad (14)$$

Z obr. 3. jest patrno, že odražený paprsek protne vždy dříve kružnici $l'$ a pak teprve osu $Ox$; část křivky $p$ definovaná vzorci (13) nepřichází tedy k platnosti. Tak tomu jest vůbec v případě, že $A$ leží uvnitř kružnice $z$.

Konstrukce oblouku (14) odpadá v případě, že $A$ jest vně kružnice $z$ aneb na kružnici samé; neboť pak nelze sestrojiti reální ellipsu, která by se kružnice $z$ dvojnásobně dotýkala, měla jedno ohnisko v $A$ a jejíž vedlejší osa by procházela bodem $O$.

*Křivka $p$ redukuje se na část osy $Ox$ — definovanou vzorci (13) — v případě, že bod $A$ leží vně dané kružnice nebo na kružnici samé, a na oblouk kružnice $l'$ — definovaný vzorcem (14) — v případě, že $A$ leží uvnitř dané kružnice.*

7. Fermatův princip, vyslovený v odst. *1.*, platí též, jak známo, pro lom světla. Úloha o absolutním minimu dala by se i v tomto případě řešiti podobně jako dříve. Tvar kaustických křivek a křivek $p$ závisel by ovšem též na hodnotě indexu lomu.

Ku konci upozorňuji na krásné pojednání Duhemovo*), které jest věnováno přesnému rozboru Fermatova principu o relativním minimu jednak v případě, že paprsky lámou se a odrážejí opětovaně na daných plochách, jednak v případě, že světlo šíří se křivočarými paprsky v heterogenním mediu. Bylo by zajímavo doplniti Duhemovy resultáty diskussí absolutního minima.

---

# O kuželosečkových plochách translačních.

Napsal Dr. **Frant. Kadeřávek.**

(Dokončení.)

13*a*. Ježto plocha $\alpha$ je stupně 4, musí v rovině, která obsahuje jednu kuželosečku $C$ plochy (obr. 7) spočívati ještě druhá křivka 2° a obě protínají se v bodech $d$ $d'$ na křivce dvojné $D$.

---

*) *P. Duhem*: Sur le principe d'Optique géométrique énoncé par Fermat (Journal de math. p. et appl. 6e série t. 8, p. 1—58; 1912).

V rovinách $\varphi'$, $\varphi''$ leží vždy dvě ellipsy plochy $\alpha$, které se v bodech $k'$, $k''$, $k'''$, $k''''$ křivky dvojné sebe dotýkají. Jsou proto uvedené body *body kuspidálními.*

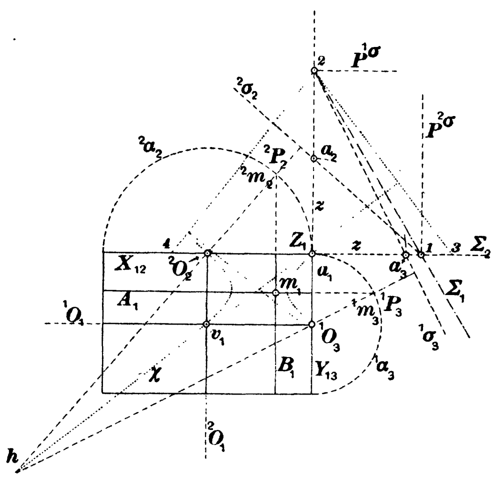
Zvolme (obr. 7.) na dvojné křivce $D$ plochy $\alpha$ body $d$ $d'$ diametrálně protilehlé a veďme jimi obě ellipsy $C_1$, $C'_1$ dotýkající se obdélníkové kontury plochy $\alpha$. Jsou to průměty dvou křivek $C$ $C'$ druhého stupně položených na ploše $\alpha$ v rovině $\vartheta$, jejíž stopa jest přímka $\overline{d_1 o_1 d_1'}$. Křivky $C_1$ $C_1'$ protínají se kromě bodů $d_1$ $d_1'$ ještě v dalších dvou bodech $m_1$ $m_1'$, jež jsou k bodům $d_1$, $d_1'$ směrem $\varphi_1'$ šikmo souměrny dle $\varphi''_1$. Jest totiž $\varphi'_1$ $\varphi''_1$ společná dvojina sdruž. průměrů všech křivek $2^0$ do konturního obdélníka plochy $\alpha$ vepsaných. Leží proto body $m_1$, $m_1'$ na hyperbole $M_1$ k $D_1$ dle $\varphi_1''$ souměrné. Válec křivkou $M_1$ směrem $S \perp \omega \equiv (^1O, {}^2O)$ proložený protíná válce $^1\alpha$ $^2\alpha$ v křivkách $^1M$, $^2M$ stupně 4, jejichž součet $M$ náleží ploše $\alpha$ a jest rovněž stupně 4. Promítají se totiž křivky $^1M$, $^2M$ na rovinu $^1\sigma \perp \omega$ do ellips $^1M_2$, $^2M_2$ o společných tečnách směru $S$, součet takovýchto ellips jest opět ellipsa; promítá se proto křivka $M$ i do roviny $^1\sigma$ do kuželosečky a je proto stupně 4. Křivky $C$ $C'$ v jedné rovině $\vartheta$ položené protínají se krom bodů $d$ $d'$ na dvojné křivce ještě v bodech $m$ $m'$ křivky $M$, dotýká se proto rovina $\vartheta$ plochy $\alpha$ v bodech $m$ $m'$, a ježto křivka $M$ promítá se ze středu $o$ plochy $\alpha$, jímž rovina $\vartheta$ též prochází, kuželem stupně druhého, patrno, že

14$a$. veškery dotyčníky $m$ rovin dvojtečných plochy $\alpha$ vyplňují prostorovou křivku stupně 4 $M$. Tato promítá se ze středu plochy $\alpha$ kuželem 2. stupně, jehož se všechny roviny dvojtečné, plochu $\alpha$ ve dvou ellipsách protínající, dotýkají.

15$a$. Z obr. 6. patrno, any *křivky* $A^{1\tau}$, $A^{2\tau}$, $B^{3\tau}$, $B^{4\tau}$ *jsou geom. místem bodů parabolických* plochy $\alpha$, že ona část plochy, která neobsahuje křivku dvojnou, jest část bodů elliptických. Spustíme-li ze středu $s_2$ kružnice $A_2^{\nu\prime}$ kolmici k $B_2$ až k průsečíku $s'$ s křivkou $\varkappa_2^B$ a vedeme-li tímto kolmici k $X$, protne tato přímka kružnici $A_2^{\nu\prime}$ v nárysu $^1u_2$ *bodu kruhového.* Půdorys $^1u_1$ spadá s vrcholem křivky $D_1$ ($\overline{s_2 s'}^2 = \overline{^1u_2 s_2}^2 - \overline{^1u_2 s'}^2 =$ rozdílu čtverců vzdáleností bodu $k'$ křivky $D_1$ od os $^2O_1$, $^1O_1$ rovných $^1u_2 s_2$ a $^1u_2 s'_2$).

Povšimněme si osvětlení geometrálného plochy $\alpha$ (obr. 8.).

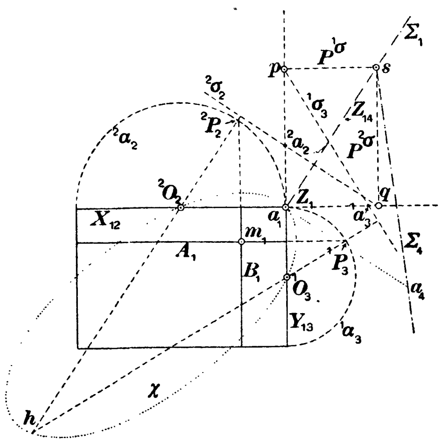
16*a*. Zvolme nejprve *světelný paprsek* $\Sigma \equiv \overline{12}$ *rovnoběžný s půdorysnou.* Plocha $\alpha$ buď opět stanovena jakožto součet dvou rotačních válců $^1\alpha$, $^2\alpha$ o osách $^1O \perp {}^2O$. Na ose $Z$ zvolme v libovolné výši $z$ bod $a$ ($a_2$ nárys, $a_3$ stranorys) přímkami $\overline{a2}$, $\overline{a1}$ proložme roviny $^1\sigma$, $^2\sigma$ o stopách $P^{1\sigma} \parallel X$, $P^{2\sigma} \parallel Y$ a sečteme je. Součet je rovina $\sigma$, pro níž $\Sigma_1$ jest půdorysem hlavní přímky ve výši $z$, tedy rovina $\sigma$ jest rovnoběžna s paprskem $\Sigma$. Učiňme $\overline{^2O_2{}^2P_2} \perp {}^2\sigma_2$, $\overline{^1O_3{}^1P_3} \perp {}^1\sigma_3$; tím stanovili jsme na válci



Obr. 8.

$^1\alpha$ přímku $^1P$, podél níž tečná rovina je rovnoběžna s $^1\sigma$ a na válci $^2\alpha$ přímku $^2P$ s tečnou rovinou rovnoběžnou s rovinou $^2\sigma$. Označíme-li body přímek $^1P$, $^2P$ náležejících válcům $^1\alpha$, $^2\alpha$, ležící na témž půdorysně promítacím paprsku písmenami $^1m$, $^2m$, (půdorysy $^1m_1 \equiv {}^2m_1 \equiv m_1$), stanovili jsme tak ve válcích $^1\alpha$, $^2\alpha$ body, jejichž tečné roviny jsou rovnoběžné s rovinami $^1\sigma$, $^2\sigma$ a leží na témž paprsku ve směru sčítání, i bude v bodě $m$ ($\overline{mm_1} = \overline{^1mm_1} + \overline{^2mm_1}$) plochy $\alpha$ tečná rovina rovnoběžná se součtem $\sigma \equiv ({}^1\sigma + {}^2\sigma)_{s,m}$, tudíž rovnoběžná se $\Sigma$. I jest bod $m$ bodem meze stínu vlastního.

Měníme-li souřadnici $z$ bodu $a$, probíhají body $a_2$, $a_3$ v přímkách $\overline{a_1 2}$, $\overline{a_1 1}$ řady shodné a proto navzájem promětné; paprsky ${}^2\sigma_2$, ${}^1\sigma_3$ body $a_2$, $a_3$ z bodů 2, 1 promítající vytvářejí též dva svazky promětné a proto i kolmice $\overline{{}^2O_2{}^2P_2}$, $\overline{{}^1O_3{}^1P_3}$ k paprskům ${}^2\sigma_2$, ${}^1\sigma_3$ z bodů ${}^2O_2$, ${}^1O_3$ spuštěné vytvoří dva svazky navzájem promětné. I vyplní jejich průsečík $h$ hyperbolu $\chi$. Snadno se přesvědčíme, že $\chi$ jde body ${}^2O_2$, ${}^1O_3$, $v_1$, $a_1$; je tedy střed obdélníka ${}^2O_2$ ${}^1O_3$ $v_1$ $u_1$ středem $\chi$ a jím jdou její assymptoty kolmo



Obr. 9.

k paprskům $\overline{24}$, $\overline{23}$, jež spojují bod 2 s body 3, 4, při čemž $\overline{a_1 3} = \overline{a_1 4} = \sqrt{\overline{a_1 1} \,.\, \overline{a_1 2}}$.

Z uvedeného patrno, že půdorys meze stínu vlastního lze sestrojiti, dána-li $\chi$ takto: Libovolný její bod $h$ spojíme s body ${}^2O_2$, ${}^1O_3$; průsečíky spojnice $\overline{h{}^2O_2}$ s kružnicí ${}^2\alpha_2$ vedeme paprsky rovnoběžné s osou $Y$, průsečíky spojnice $\overline{h{}^1O_3}$ s kružnicí ${}^1\alpha_3$ paprsky rovnoběžné s osou $X$ a průsečné body takto sestrojených paprsků jsou již půdorysy bodů meze stínu vlastního.*)

17*a*. Podobným způsobem stanovíme i *mez stínu vlastního při obecně položeném paprsku světelném* $\Sigma$ (obr. 9.). Zvolme

*) Svírá-li paprsek $\Sigma$ s osou ${}^1O$ (obr. 6.) úhel 45°, stanou se křivky $C'\varphi''$, $C''\varphi'$ neb $C''\varphi''C'\varphi'$ v rovinách $\varphi'$, $\varphi''$ položené mezemi stínu vlastního.

na ose $Z$ bod $a$ ve výši $z$ nad půdorysnou, veďme jím paprsek světelný $\Sigma$, stanovme jeho stopu $s$ a tou veďme přímky $P^{1\sigma} \parallel X$, $P^{\sigma} = Y$. Vytkneme-li dále v ose $Z$ body ${}^1a$, ${}^2a$ o souřadnicích ${}^1z$ a ${}^2z$ hovících podmínce $z = {}^1z + {}^2z$ a proložíme-li jimi a přímkami $P^{1\sigma}$, $P^{2\sigma}$ roviny ${}^1\sigma, {}^2\sigma$, tu musí nezbytně součet $\sigma \equiv ({}^1\sigma + {}^2\sigma)_{Z,\pi}$ procházeti paprskem $\Sigma$. Vedeme-li opět, jako v případu předchozím, body ${}^2O_2$, ${}^1O_3$ kolmice k přímkovým průmětům ${}^2\sigma_2$, ${}^1\sigma_3$ rovin ${}^2\sigma$, ${}^1\sigma$, získáme v průsečících jejích s ${}^2\alpha_2$, ${}^1\alpha_3$ bodové průměty přímek ${}^2P$, ${}^1P$ válců ${}^2\alpha$, ${}^1\alpha$, podél nichž dotýkají se jich roviny, jichž součet jest rovnoběžný se $\Sigma$. Jest proto opět průsečík $m_1$ kolmice z bodů ${}^2P_2$, ${}^1P_3$ k $X$ a $Y$ spuštěných půdorysem bodu meze stínu vlastního plochy $\alpha$.

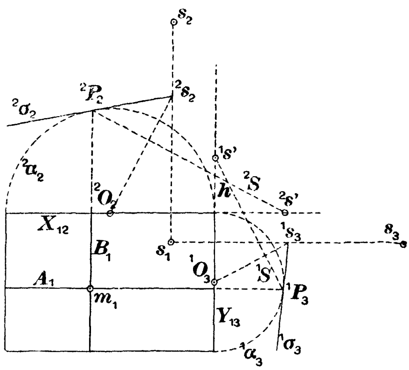
Řady bodů ${}^2a$, ${}^1a$ v ose $Z$ jsou opět shodné, proto z bodů $p, q$ je promítající svazky paprskové, vyplněné přímkami ${}^2\sigma_2$, ${}^1\sigma_3$ jsou navzájem projektivní a jsou takými i svazky kolmic $\overline{{}^2O_2\,{}^2P_2}$, $\overline{{}^1O_3\,{}^1P_3}$ k paprskům ${}^2\sigma_2$, ${}^1\sigma_3$ a vytvářejí proto průsečíkem svým $v$ kuželosečku $\chi$, z níž opět týmž způsobem, jako v případu předchozím možno půdorys meze stínu vlastního odvoditi jednoduše.

18*a*. Uvážíme-li, že v promítání rovnoběžném jeví se obrys plochy $\alpha$ jako obálka homothetických a shodných ellips, jichž středy probíhají jinou ellipsu (na př. ellips $A'$, jichž středy vyplňují ellipsu $\varkappa^{A'}$), poznáváme, že *obrysy plochy $\alpha$ jsou affinní křivky k elliptické aequidistantě.* I možno na základě affinity s touto křivkou stanoviti jejich *body dvojné* a *body úvratu.**)

19*a*. I mez centrální stínu vlastního pro plochu $\alpha \equiv ({}^1\alpha + {}^2\alpha)_{Z\pi}$ stanovíme snadno. Buď dán svítící bod $s$ (obr. 10.). Na paprsku $\overline{ss_1}$ zvolíme dva body ${}^1s$, ${}^2s$ tak, aby součet $\overline{{}^1ss_1} + \overline{{}^2ss_1} = \overline{ss_1}$. Veďme bodem ${}^1s$ tečnou rovinu ${}^1\sigma$ válce ${}^1\alpha$, bodem ${}^2s$ tečnou rovinu ${}^2\sigma$ válce ${}^2\alpha$. Dotyčné přímky buďtež ${}^1P$, ${}^2P$, průsečík jejich půdorysů bod $m_1$. Je patrno, že bod $m_1$ je půdorysem bodu hledané meze stínu vlastního, poněvadž jeho rovina tečná jest součet rovin ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ jdoucích body ${}^1s$, ${}^2s$ a prochází proto bodem $s$.

*) Srovnej: Stanovení úvratů elliptické aequidistanty, tohoto časopisu roč. 41., str. 33 (r. 1911).

Označme poly přímek $\overline{s_1 s_2}$ a $\overline{s_1 s_3}$ vzhledem ke křivkám ${}^2\alpha_2$, ${}^1\alpha_3$ písmenami ${}^2s'$, ${}^1s'$. Ježto body ${}^1s$, ${}^2s$ v přímkách $\overline{s_2 s_1}$, $\overline{s_3 s_1}$ vytvářejí řady shodné, neboť platí pro ně vztah: $\overline{{}^1ss_2} + \overline{{}^2ss_1} = \overline{ss_1}$, vytvoří i jejich polary $\overline{{}^2P_2\,{}^2s'}$, $\overline{{}^1P_3\,{}^1s'}$ otáčející se kol bodů ${}^2s'$, ${}^1s'$ svazky projektivné a probíhá proto průsečík $h$ uvedených polar kuželosečku $\chi$. Kdyby tato křivka byla dána, narýsujeme půdorys meze stínu vlastního jednoduše takto: Libovolný její bod $h$ spojíme s poly ${}^1s'$, ${}^2s'$, vyšetříme průsečíky ${}^1P_3$, ${}^1P_3'$, ${}^2P_2$, ${}^2P_2'$ těchto spojnic s kružnicemi ${}^1\alpha_3$, ${}^2\alpha_2$ a průsečíky uvedenými proložené přímky $A_1 \ldots \| X$; $B_1 \ldots \| Y$ protínají se v bodech $m_1 \ldots$, jež jsou půdorysy hledané meze stínu vlastního.

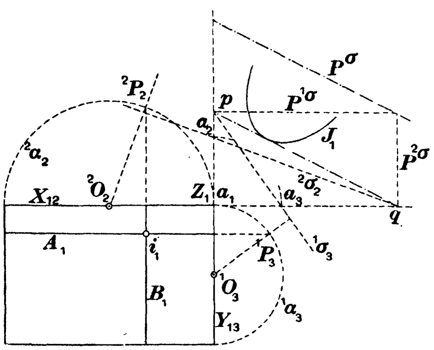



Obr. 10.

20*a*. V obr. 11. opět dána plocha kruhokruhová $\alpha$ součtem dvou válců $\alpha \equiv ({}^1\alpha + {}^2\alpha)_{Z,\pi}$. Na ose $Z$ zvolen libovolný bod $a$ a sestrojena část půdorysné stopy $J_1$ kužele stejné světlosti (lhostejno, zda skutečné neb zdánlivé) vzhledem k určitému světelnému paprsku. Veďme průsečíky $p, q$ tečny $\overline{pq}$ křivky $J_1$ s osami $Y$ a $X$ přímky $P^{1\sigma} \| X$, $P^{2\sigma} \| Y$ a těmito jako stopami a bodem $a$ určeme roviny ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$. Je patrno, že součet $\sigma \equiv ({}^1\sigma + {}^2\sigma)_{Z\pi}$ jest rovnoběžný s tečnou rovinou $(apq)$ kužele $(aJ_1)$. Sestrojíme-li k válcům ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ tečné roviny s ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ rovnoběžné, ${}^1P$, ${}^2P$ jsou příslušné dotyčné přímky, tu průsečík $i$, půdorysů $A_1 \equiv {}^1P_1$, $B_1 \equiv {}^2P_1$ jest půdorys bodu $i$ plochy $\alpha$, který náleží křivce téže světlosti jakou má kužel $(a\, J_1)$. Takto lze sestrojiti půdorysy isofot i isofeng plochy $\alpha$ jakož i půdorys dotyčné křivky rozvinutelné plochy ploše $\alpha$ opsané a mající řídící kužel $(a\, J_1)$.

Dotkne-li se stopa kužele $(a\, J_1)$ os $X$ a $Y$, budou při konstrukci isofot neb isofeng řady bodů $\overline{p, q}$ projektivné a příslušný půdorys bude možno sestrojiti pomocí určité kuželosečky $\chi$ týmž způsobem, jako při osvětlení bylo uvedeno.

Způsobem, jakým zde vyšetřena plocha kruho kruhová možno vyšetřovati i ostatní plochy, které uváděl ve svých přednáškách p. prof. Dr. Fr. Tilšer jako příklady ploch translačních. Tak sečtením dvou válců hyperbolických dostaneme plochu hyper-



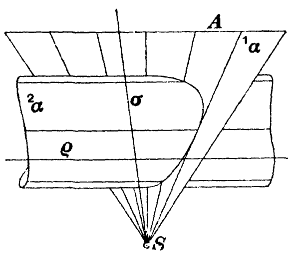

Obr. 11.

bolicko-hyperbolickou, válec rotační a parabolický dají plochu kruho-parabolickou a pod.

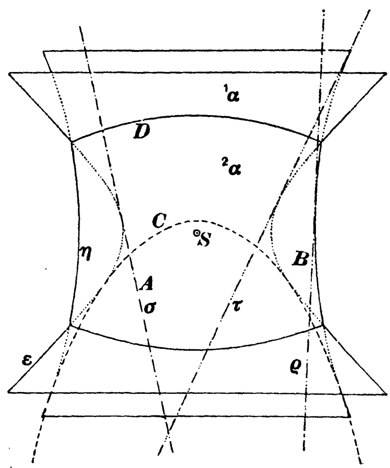
Též zajímavá plocha vlno-vlnová a její povrchové přímky a křivky dají se snadno sčítáním dvou válců o řídících křivkách sinusoidách odvoditi.

Když se neomezíme pouze na válce, nýbrž provedeme sčítání i obecných ploch stupně druhého, dojdeme k plochám (obecně) stupně čtvrtého a to přímkovým i nepřímkovým. Tak na př. (obr. 12.) dán-li válec $^2\alpha$ a hyperbolický paraboloid $^1\alpha$, jehož jedna řídící rovina $\varrho$ jest rovnoběžna s povrchovými přímkami válce $^2\alpha$ i se směrem $S$; povstane sečtením $\alpha \equiv (^1\alpha + {}^2\alpha)_{S,\omega}$ plocha stupně čtvrtého, která v rovinách rovnoběžných s $\varrho$ obsahuje přímky, v rovinách proložených směrem sčítání $S$ povrchovými přímkami 2. systému pl. ${}^1\alpha$ (na př. $\sigma$) kuželosečky jakožto součty kuželosečky průsečné roviny $\sigma$ s válcem ${}^2\alpha$ a druhé površky paraboloidu s přímkou $S$ v $\sigma$ položené.*)

Provedeme-li sečtení dvou přímkových ploch stupně druhého o společné rovině hlavní, na př. dvou soustředných a souosých sborcených hyperboloidů ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ (obr. 13.) při čemž rovina základní $\omega$ buď společná rovina hlavní a směr sčítání $S$ příslušná k ní sdružená osa. Součet $\alpha \equiv ({}^1\alpha + {}^2\alpha)_{S\omega}$ má pak následní vlastnosti ihned patrné: V rovinách rovnoběžných s přímkou $S$ a tečných




Obr. 12.




Obr. 13.

k ploše ${}^1\alpha$, na př. v $\sigma$ položeny jsou dvojiny kuželoseček ($A$). Roviny $\sigma$ jsou dvojnásob dotyčné roviny plochy $\alpha$, obalují válec stupně druhého $\varepsilon$ dotýkající se plochy $\alpha$ podél křivky stupně čtvrtého. Podobně tečné roviny $\varrho$ plochy ${}^2\alpha$ rovnoběžné s $S$ obsahují po dvou kuželosečkách ($B$) plochy, jsou roviny dvojtečné a obalují válec $\eta$ a dotýkají se plochy $\alpha$ v bodech křivky prostorové stupně 4. Společné roviny tečné $\tau$ válců $\varepsilon$ a $\eta$ obsahují místo dvojiny kuželoseček 4 přímky, jež vznikly sečtením povrchových přímek ploch ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ ležících v rovině $\tau$. Společné roviny tečné

*) Srovnej: Dr. Chr. Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie sv. II. str. 471. (r 1887) cylindroid Frezièresův.

válců $\varepsilon$ a $\eta$ jsou čtyři, obsahuje proto plocha $\alpha$ 16 povrchových přímek. Průsečná křivka ploch $'\alpha$, $^2\alpha$ vede týmž způsobem, jako při ploše kruhokruhové ke křivce dvojné $D$ druhého stupně, kuželosečky, které se dvakráte kontur $\varepsilon$ a $\eta$ dotýkají k dalšímu systému ($C$) křivek stupně druhého v dalších rovinách dvojtečných. Roviny, na př. $\tau$, které obsahují 4 površky plochy $\alpha$, dotýkají se ve 4 bodech průsečných oněch přímek plochy $\alpha$, kdežto 2 průsečíky příslušných 4 površek náležejí křivce dvojné $D$. Jest patrno, že plocha $\alpha$ jest plochou čtvrtého stupně s nekonečně mnohými povrchovými kuželosečkami, jiš vyšetřoval též Kummer (Pascal, Repertorium, II., kap. XII. § 6.).

(Pokud se týče ploch translačních, srovnej čtenář laskavě článek předložený s pracemi prof. Ot. Suchardy.)

---

# Jednoduchý přístroj k fotografování při světle elektrickém.

Napsal Dr. **Vikt. Vojtěch**, s. docent fotochemie a fotografie na čes. univ.

Ve fotografické praxi přichází velmi často úkol, fotografovati serii různých malých předmětů neb obrazů z knih za stejných neb podobných podmínek. Pomýšlel jsem na to, tento úkol zjednodušiti a sestrojil jsem proto před 2 roky jednoduchý přístrojek, který, jelikož se velmi osvědčil,*) v následujícím popíši.

Dva faktory působí největší potíže, osvětlení a vhodné umístění fotografovaných předmětů.

Osvětlení předmětu neb obrazu má býti stejnoměrné a konstantní. Tomu denní světlo vyhovuje velmi špatně, jsouc podrobeno různým změnám, jednak pravidelným — závislým na době denní a roční — jednak nepravidelným, které někdy i zkušeného praktika uvedou do rozpaků stran přesné exposice. Proto je výhodno používati světla umělého, které je možno považovati prakticky za konstantní, mimo to pak možno pracovati kteroukoli dobu, což má zvláště v zimě veliké výhody. Dříve užívalo se ve fotografii výhradně světla obloukového k osvětlování,

*) Též v Jedličkově ústavu pro invalidy, kam jsem jej zavedl, se všestranně osvědčil.