*Stejnoramenným hyperbolám Hessiany, jež mají dvojné přímky plochy kruho-kruhové za společné asymptoty, přísluší přímky tyto jakožto křivka Steineriany.*

16. *Pro plochu, dané ploše kollinearnou, budou též plochy, kollinearné s polárnými plochami oné, plochami polárnými.* *) *I lze z výsledků, které až dosud jsme obdrželi pro polárné plochy zvláštní, orthogonálně souměrné plochy kruho-kruhové, souditi též na plochy polárné všech ostatních ploch posouvání kruho-kruhových a ellipso-eliptických.*

---

# Rozbor rovnice druhého stupně.

Studujícím napsal **M. R.**

1. Rovnicí druhého stupně o dvou proměnných veličinách $x$, $y$ nazýváme každou rovnici tvaru

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

tedy rovnici, v níž nejvyšší členy jsou druhého stupně. Chtějíce pojednati o rovnici druhého stupně arci mlčky supponujeme, že nejsou všecky tři koëfficienty členů kvadratických, t. j. koëfficienty $a_{11}$, $2a_{12}$, $a_{22}$ současně nullami, nebo pak by rovnice se stala linearnou. V následujícím přihlížíme jen k *reálné* rovnici druhého stupně, t. j. předpokládáme, že jsou všecky koëfficienty realné.

Dejme tomu, že $x$, $y$ značí pravoúhlé souřadnice bodu v rovině, a položme si za úkol vyšetřiti, jakou čáru repraesentuje rovnice (1). Řešení tohoto úkolu označujeme jakožto rozbor dané rovnice.

2. Všecky body $x$, $y$, jichž souřadnice vyhovují rovnici prvního stupně, vyplňují přímku. Snadno lze ukázati, že v jistých případech totéž, nebo něco obdobného má platnost i vůči rovnici druhého stupně. Napíšeme-li na př. rovnici kvadratickou

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + 2acx + 2bcy + c^2 = 0,$$

---

*) Srovnej: Cremona-Weyr: Úvod do geometrické theorie křivek rovinných, pag. 23. odst. 18.

shledáme ihned, že všecky body, této rovnici vyhovující, naplňují přímku; neboť napsanou rovnici lze psáti

$$(ax + by + c)^2 = 0,$$

a aby hodnoty $x$, $y$ jí vyhověly, musí

$$ax + by + c = 0.$$

Toť však rovnice lineárná, charakterisující přímku.

Napišme dále rovnici kvadratickou

$$aa'x^2 + (ab' + a'b)\,xy + bb'y^2 + (ac' + a'c)x + (bc' + b'c)y$$
$$+ cc' = 0;$$

patrně ji lze psáti ve tvaru

$$(ax + by + c)\,(a'x + b'y + c') = 0,$$

a každý bod $x$, $y$, hovící této rovnici, vyhovuje buď rovnici

$$ax + by + c = 0$$

aneb rovnici

$$a'x + b'y + c' = 0$$

aneb oběma zároveň. Naplňují tedy všecky body, hovící dané kvadratické rovnici, *dvě* přímky.

Z toho vychází, že kvadratická rovnice *může* repraesentovati jednu neb dvě *přímky.*

Tu zcela přirozeně se naskytá otázka, zda-li tomu není vždycky tak, a v případě že ne, další otázka, kterak poznati, že je tomu tak, po případě, kterak nalézti *onu* resp. *ony* přímky? Ku všem třem otázkám odpovíme v následujících článcích.

Daná rovnice

$$f(x, y) \equiv a_{11}x_2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

seřaděna dle mocností $y$ zní

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_{23})y + a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0. \quad (2)$$

Není-li $a_{22}$ nullou, pak jest tato rovnice vůči $y$ kvadratickou, je-li $a_{22}$ nullou, jest jen linearnou. Případy ty v dalším budeme různiti.

3. V tomto článku vezmeme v úvahu případ, kdy $a_{22}$ není nullou. Pak máme, řešíce (2) dle $y$,

$$a_{22}y = -(a_{12}x + a_{23})$$
$$\pm \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\,x^2 + 2\,(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\,x + a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}$$

čili stručněji

$$a_{22}y = Ax + B \pm \sqrt{Cx^2 + 2Dx + E},$$

kde význam liter $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ jest patrný.

Předpokládejme, že této rovnici vyhovují souřadnice všech bodů nějaké přímky. Tu především seznáme, že přímka ta nemůže býti rovnoběžna s osou $y$, to jest, že její rovnice nemůže zníti $x =$ stálé; neboť této rovnici vyhověno libovolným $y$, kdežto poslední rovnici, nechť si za $x$ jakoukoli stálou položíme, libovolným $y$ vyhověti nelze.

Supponovaná přímka, nejsouc rovnoběžna s osou $y$, má rovnici tvaru

$$y = mx + n$$

a dle supposice platí tedy při každém $x$

$$Ax + By \pm \sqrt{Cx^2 + 2Dx + E} = a_{22}(mx + n)$$

to jest

$$Cx^2 + 2Dx + E = [(ma_{22} - A)\,x + na_{22} - B]^2.$$

Výraz po levé straně musí tudíž býti čtvercem lineárného výrazu, což vyžaduje, aby

$$CE - D^2 = 0;$$

to ale také stačí. Vloživše za $C$, $D$, $E$ jich hodnoty, máme výminku

$$(a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22})\,(a_{23}{}^2 - a_{22}a_{33}) - (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})^2 = 0. \quad (3)$$

Rozvineme-li, zruší se dva členy, v ostatních se pak všude vyskytuje faktor $a_{22}$; tímto, *poněvadž není nullou*, můžeme děliti a máme

$$\varDelta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{11}a_{23}{}^2 - a_{22}a_{13}{}^2 - a_{33}a_{12}{}^2 = 0. \quad (4)$$

Je-li tato výminka vyplněna, pak jest patrně i (3) vyplněna t. j. $Cx^2 + 2Dx + E$ jest úplným čtvercem; máme pak tedy

$$Cx^2 + 2Dx + E = (x\sqrt{C} + \sqrt{E})^2,$$

kdež lze znamení jedné odmocniny n. př. $\sqrt{C}$ libovolně zvoliti; druhá jest pak úplně stanovena relací

$$D = \sqrt{C}\sqrt{E}.$$

Nyní máme

$$a_{22}y = Ax + B \pm (x\sqrt{C} + \sqrt{E})$$

to jest

$$a_{22}y = (A \pm \sqrt{C})\,x + B \pm \sqrt{E}. \quad (5)$$

Rovnice tato repraesentuje dvě přímky a sice realné, jeli $C > 0$ (neboť pak je i $E$ vůči $CE = D^2$ kladnou hodnotou), a imaginárné, je-li $C < 0$; při $C = 0$ jsou přímky rovnoběžné.

Přímky mohou též splynouti, což vyžaduje, aby

$$C = 0, \; E = 0;$$

pak vůči $CE - D^2 = 0$ máme též $D = o$, t. j. pak platí relace

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{12} = 0, \; a_{12}a_{13} - a_{22}a_{13} = 0, \; a_{23}^2 - a_{22}a_{33} = 0. \quad (6)$$

Rovnice (5) pak zní

$$a_{22}y = Ax + B$$

to jest

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

První formule tohoto článku podává kořeny $y_1$, $y_2$ předcházející kvadratické rovnice (2), pročež

$$f(x, y) = a_{22}(y - y_1)(y - y_2).$$

Máme tedy při vyplněné výmince (4)

$$f(x,y) = a_{22}\left[y - \frac{1}{a_{22}}(Ax + By + x\sqrt{C} + \sqrt{E})\right].$$
$$\left[y - \frac{1}{a_{22}}(Ax + B - x\sqrt{C} - \sqrt{E})\right]$$

t. j. daná kvadratická funkce $f$ rozložena na dva linearné faktory. V případě, kdy platí relace (6), máme

$$f(x, y) = a_{22}\left[y - \frac{1}{a_{22}}(Ax + B)\right]^2 = \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23})^2,$$

$f$ jest zde úplným čtvercem. V této formuli jsme psali pro pohodlnější čtení $a_{21}$ místo $a_{12}$; tak učiníme i v dalším, kladouce obecně $a_{ij}$ místo $a_{ji}$ tam, kde se nám to hodí, t. j. píšíce $a_{21}$, $a_{31}$, $a_{32}$ resp. místo $a_{12}$, $a_{13}$, $a_{23}$. Srovnáme-li koëfficienty výrazu $f(x, y)$ s koëfficienty v rozvinutém čtverci, máme tyto relace, v nichž k vůli stručnosti klademe $\lambda$ místo $\frac{1}{a_{22}}$:

$$a_{11} = \lambda a_{12}^2, \quad a_{22} = \lambda a_{22}^2, \quad a_{33} = \lambda a_{23}^2,$$
$$a_{12} = \lambda a_{12}a_{22}, \quad a_{13} = \lambda a_{12}a_{23}, \quad a_{23} = \lambda a_{22}a_{23}.$$

Z toho jde ihned, že mimo relace (6) platí i další obdobné relace

$$a_{13}^2 - a_{11}a_{33} = 0, \quad a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} = 0, \quad a_{31}a_{32} - a_{33}a_{12} = 0.$$

Tyto tři rovnice i rovnice (6) můžeme zahrnouti rovnicemi

$$a_{ij}^2 - a_{ii}a_{jj} = 0, \quad a_{ij}a_{ik} - a_{ii}a_{jk} = 0. \quad (7)$$

Nyní je ale patrno, že platí složitá proporce

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33},$$

tak že rovnici $f = 0$ lze nahraditi — zanedbáme-li číselného činitele — každou z tří rovnic

$$(a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3})^2 = 0. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Shrneme-li dosavadní úvahy, máme tento výsledek: Je-li $a_{22} \gtrless 0$ a předpokládáme-li, že dané rovnici (1) vyhovují souřadnice všech bodů nějaké přímky, tedy musí nutně platiti výminka (4). Je-li tato vyplněna, tu se rozloží $f$ obecně na dva různé linearné faktory; v případě, že platí výmínky (7), na dva stejné faktory, t. j. rovnice (1) repraesentuje dvě resp. jednu přímku.

4. V tomto článku vezmeme v úvahu případ, kdy $a_{22} = 0$. Pak zní daná rovnice

$$f(x, y) \equiv 2(a_{12}x + a_{23})y + a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0,$$

z níž
$$y = -\frac{a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}}{2(a_{12}x + a_{23})},$$

při čemž arci předpokládáme, že jmenovatel není nullou, t. j. že nejsou současně $a_{12}$ a $a_{23}$ nullami. Jsou-li $a_{12}$ a $a_{23}$ nullami, pak zní daná rovnice

$$f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + a_{13}x + a_{33} = 0;$$

tyto dva případy nutno různiti.

*A)* Koëfficienty $a_{12}$, $a_{23}$ nejsou současně nullami; pak

$$y = -\frac{a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}}{2(a_{12}x + a_{23})}.$$

Mají-li této rovnici vyhověti souřadnice všech bodů přímky

$$y = mx + n,$$

— přímky $x =$ stálé z důvodu známého jsou opět vyloučeny — musí za každého $x$

$$-\frac{a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}}{2(a_{12}x + a_{23})} = mx + n$$

t. j. divise

$$(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) : (a_{12}x + a_{23})$$

musí algebraicky vyjíti beze zbytku; podíl bude $-2(mx + n)$.

Předpokládáme-li $a_{12} \gtrless 0$, máme — vyhýbajíce se známým spůsobem zlomkům — tyto divise

$$a_{12}(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) : (a_{12}x + a_{23}) = a_{11}x,$$

zbytek
$$2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})x + a_{12}a_{33}.$$

Druhá divise:

$$[a_{12}(2a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})x + a_{12}{}^2a_{33}] : (a_{12}x + a_{23}) = 2a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23},$$

zbytek
$$a_{12}{}^2a_{33} - a_{23}(2a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}).$$

Za učiněných supposic máme tedy

$$a_{11}a_{23}{}^2 + a_{33}a_{12}{}^2 - 2a_{23}a_{31}a_{12} = 0,$$

z čehož jde vůči $a_{22} = 0$, že opět rovnice (4) jest vyplněna. A naopak, platí-li rovnice (4) současně s $a_{22} = 0$, $a_{12} \gtrless 0$ vyjde napsaná divise a rovnice

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (2a_{12}x + a_{23})y + a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} \\ &= 2(a_{12}x + a_{23})(y - mx - n) = 0 \end{aligned}$$

repraesentuje dvě přímky, z nichž jedna jest rovnoběžna s osou $y$-ovou.

Předpokládáme-li, že $a_{12} = 0$, pak máme

$$y = -\frac{1}{2a_{23}}(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}).$$

Koëfficient $a_{11}$ musíme pokládati za různý od nully, neboť by jinak daná rovnice nebyla kvadratickou. Pak ale naší rovnici nemohou vyhověti souřadnice všech bodů nějaké přímky

$$y = mx + n,$$

poněvadž by to vyžadovalo, aby platila rovnice

$$-\frac{1}{2a_{23}}(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) = mx + n$$

t. j. rovnice

$$a_{11}x^2 + (2a_{13} + ma_{23})x + a_{33} + na_{23} = 0$$

za každého $x$; věc to při $a_{11} \gtrless 0$ nemožná.

*B)* Koëfficienty $a_{12}$, $a_{23}$ jsou současně nullami. Pak zní daná rovnice

$$f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0.$$

Řešení dle $x$ podává dvě rovnice

$$x = x_1, \quad x = x_2,$$

repraesentuje tedy dvě přímky rovnoběžné s osou $y$, které po případě — kdy $a_{11}a_{33} - a_{13}{}^2 = 0$ — mohou splynouti v jedinou. V uvažovaném případě, kdy totiž $a_{12} = a_{22} = a_{23} = 0$, jest patrně rovnice (4) vyplněna, a naopak, je-li vyplněna při supposicích $a_{12} = a_{22} = a_{23}$, vzniká uvažovaný případ.

5. Na základě dosavadních úvah můžeme tvrditi: Vyhovují-li souřadnice všech bodů nějaké přímky $P$ kvadratické rovnici $f = 0$, pak repraesentuje tato rovnice buď přímku $P$ a ještě jinou přímku $Q$, aneb jen přímku $P$; v prvním případě lze rozložiti

$f$ na dva různé linearné faktory, v druhém na dva stejné. V obou případech vymizí výraz (4) t. j. platí

$$\varDelta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0 .$$

A naopak: Vymizí-li výraz (diskriminant) $\varDelta$, pak repraesentuje $f = 0$ zvrhlou čáru druhého stupně t. j. dvě různé neb splývající přímky. Neboť při $\varDelta = 0$ a $a_{22} \gtrless 0$ nalezneme výsledky článku 3.; při $\varDelta = 0$ a $a_{22} = 0$ máme při $a_{12} \gtrless 0$ případ *A)* článku 4., tedy věc opět dokázána; při $a_{12} = 0$ plyne vůči $a_{11} \gtrless 0$ ze supposice $\varDelta = 0$ ihned $a_{23} = 0$ a tu nalezáme případ *B)* téhož článku, čímž věc opět dokázána.

6. Uvažujme nyní čáry druhého stupně

$$f(x,\, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 ,$$

o nichž předpokládáme, že nejsou zvrhlé t. j. že napsané rovnici nevyhovují souřadnice všech bodů žádné přímky; jinak řečeno, supponujme, že

$$\varDelta \gtrless 0 .$$

Lze snadno ukázati, že pak dané rovnici nemohou vyhověti souřadnice tří bodů položených na přímce, z čehož jde, že při $\varDelta \gtrless 0$ rovnice $f = 0$ repraesentuje *křivou* čáru; čáry tyto nazývati budeme *křivkami* druhého stupně.

Dejme tedy tomu, že by se vyskytly na čáře $f$ tři body položené na přímce $P$ a supponujme nejdříve, že je $P$ rovnoběžná s osou $y$ a že má rovnici $x = \alpha$. Pak musí rovnici dané býti vyhověno, položíme-li za $x$ číslo $\alpha$ a za $y$ jednu ze tří pořadnic oněch bodů, t. j. rovnici

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}\alpha + a_{23})y + a_{11}\alpha^2 + 2a_{13}\alpha + a_{33} = 0$$

musejí hověti ony tři pořadnice. To ale vyžaduje — poněvadž je rovnice vůči $y$ jen kvadratická — aby všecky její koëfficienty vymizely, t. j. aby

$$a_{22} = 0 , \quad a_{12}\alpha + a_{23} = 0 , \quad a_{11}\alpha^2 + 2a_{13}\alpha + a_{33} = 0 .$$

Za $a_{12} \gtrless 0$ máme tedy $\alpha = -\dfrac{a_{23}}{a_{12}}$, což do třetí výminky jsouc položeno, dává

$$a_{11}a_{23}^2 + a_{33}a_{12}^2 - 2a_{12}a_{23}a_{31} = 0 ,$$

t. j. vůči $a_{22} = 0$ máme $\varDelta = 0$, proti supposici.

Za $a_{12} = 0$ máme ihned $a_{23} = 0$ a tedy vůči $a_{22} = 0$ taktéž $\varDelta = 0$, proti supposici.

Není-li $P$ rovnoběžna s osou $y$, má rovnici

$$y = mx + n,$$

což vloženo jsouc do $f = 0$ dává rovnici kvadratickou pro $x$, které mají vyhověti *tři* hodnoty $x$ (úsečky oněch bodův); musí tedy býti rovnicí identickou, t. j. tvaru

$$0 . x^2 + 0 . x + 0 = 0,$$

jíž každé $x$ vyhoví, t. j. souřadnice všech bodů přímky $P$ vyhoví rovnici $f = 0$, jest tedy $\varDelta = 0$, proti supposici. Téhož rozumování bychom byli mohli užiti v předcházejícím případě. Nelze tedy při $\varDelta \gtrless 0$ nalézti na čáře $f$ tři body položené na přímce, jest tedy $f$ čarou křivou.

7. Křivky druhého stupně rozvrhneme na středové (centrálné) a na nestředové (necentrálné).

Středem nějaké čáry nazýváme bod $S$, má-li tu vlastnost, že, je-li $M$ libovolný bod na čáře, jest též na čáře bod $M_1$ tak sestrojený, že $S$ půlí délku $MM_1$.

Vyšetřme, za jakých výminek jest počátek souřadnic středem křivky druhého stupně $f = 0$.

Budiž $M$ libovolný bod na dané křivce, t. j. předpokládejme že jeho souřadnice $x$, $y$ vyhovují rovnici

$$f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 .$$

Bod $M_1$ sestrojený tak, že počátek souřadnic půlí délku $MM_1$, má souřadnice $-x$, $-y$; je-li tedy počátek středem křivky, platí rovnice $f(-x, -y) = 0$ t. j.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_{13}x - 2a_{23}y + a_{33} = 0 .$$

Odečteme-li obě rovnice a krátíme-li čtyřmi, máme

$$a_{13}x + a_{23}y = 0 .$$

Této linearné rovnici vyhovuje tedy každý bod $x$, $y$ na křivce položený, věc to patrně při $\varDelta \gtrless 0$ nemožná, pročež musí rovnice býti identitou, t. j.

$$a_{13} = 0 , \quad a_{23} = 0 .$$

A naopak: scházejí-li v $f = 0$ linearné členy, t. j. zní-li daná rovnice

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 ,$$

jest počátek středem této křivky. Neboť vyhoví-li souřadnice $x$, $y$ napsané rovnici, vyhoví jí patrně i $-x$, $-y$.

Dejme tomu, že křivka druhého stupně

$$f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

má střed. Zvolme tento bod, jehož souřadnice označíme $x_0$, $y_0$, za počátek nových os souřadnic $x'$, $y'$, rovnoběžných s původními. Má-li pak libovolný bod $x$, $y$ vůči novým osám souřadnice $x'$, $y'$, platí

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

Je-li tento bod na dané křivce, máme tedy

$$f(x' + x_0, y' + y_0) = 0,$$

t. j. seřadivše dle $x'$ a $y'$

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0,$$

kde značí nové litery $a'_{13}$, $a'_{23}$, $a'_{33}$ k vůli stručnosti tyto výrazy:

$$a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13},$$
$$a'_{23} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23},$$
$$a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = f(x_0y_0).$$

Dle supposice, že nový počátek souřadnic jest středem čáry, musí v nové rovnici scházeti lineárné členy, t. j. musí $a'_{13}$ a $a'_{23}$ vymizeti:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0; \end{aligned} \tag{8}$$

a naopak, stane-li se tak, jest nový počátek středem. Řešíme-li napsané rovnice dle $x_0$, $y_0$, máme

$$x_0 = \frac{a_{21}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \qquad y_0 = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}.$$

8. Je-li tedy jmenovatel $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \gtrless 0$, nalezneme těmito formulemi bod $x_0$, $y_0$, jenž jest středem čáry a patrně jediný takový bod. Křivka se v tomto případě nazývá středovou; její rovnice středová zní

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0.$$

Hodnota $a_{33}'$ se nemůže při učiněné supposici ($\Delta \gtrless 0$) rovnati nulle. Neboť máme patrně

$$\begin{aligned} a'_{33} = f(x_0, y_0) &= x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) \\ &+ y_0(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}, \end{aligned}$$

tedy vůči rovnicím, jimiž jsme stanovili $x_0$, $y_0$,

$$a'_{33} = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}$$

a dosadivše za $x_0$, $y_0$ vypočtené hodnoty

$$a'_{33} = \frac{\Delta}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

z čehož patrno, že $a'_{33}$ nevymizí.

Otočíme-li osy $x'$, $y'$ kolem začátku (středu) o úhel $\alpha$ do poloh $\xi$, $\eta$, lze vhodnou volbou úhlu $\alpha$ toho docíliti, že rovnice dané křivky vztažené k osám $\xi$, $\eta$ jest jednoduššího tvaru než dosavadní, neobsahujíc totiž člen se součinem souřadnic $\xi\eta$. Jest známo, že transformační formule jsou

$$x' = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha ,$$
$$y' = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha .$$

Vložíme-li tyto výrazy za $x'$, $y'$ do středové rovnice, máme rovnici

$$a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{22}\eta^2 + a'_{33} = 0 ,$$

ve které litery $a'_{11}$, $a'_{12}$, $a'_{22}$ značí k vůli stručnosti následující hodnoty

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \cos \alpha \sin \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha , \\ a'_{22} &= a_{11} \sin^2 \alpha - 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha , \qquad (9) \\ a'_{12} &= (a_{22} - a_{11}) \cos \alpha \sin \alpha + a_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) . \end{aligned}$$

Absolutní člen $a'_{33}$ se touto transformací nezměnil. Aby ve transformované rovnici scházel člen $\xi\ \eta$, musíme $\alpha$ tak voliti, aby $a'_{12}$ bylo nullou, t. j. by

$$(a_{22} - a_{11}) \cos \alpha \sin \alpha + a_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$$

čili

$$\tfrac{1}{2}(a_{22} - a_{11}) \sin 2\alpha + a_{12} \cos 2\alpha = 0 ,$$

z čehož

$$tg\, 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} . \qquad (10)$$

Znajíce $tg\, 2\alpha$, známe úhel $2\alpha$; značí-li totiž $2\alpha_0$ nejmenší kladný úhel, jehož $tg$ jest $\dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$, máme

$$2\alpha = 2\alpha_0 + k\pi ,$$

značí-li $k$ libovolné celistvé číslo. Máme nyní

$$\alpha = \alpha_0 + k \frac{\pi}{2} .$$

Kladouce za $k$ všecka celistvá čísla, obdržíme sice nekonečně mnoho úhlů $\alpha$, avšak všem těm úhlům otočení přísluší jen *dvě* nové osy $\xi$, jež svírají s osou $x'$ úhly $\alpha_0$(při $k = 0$) a $\alpha_0 + \dfrac{\pi}{2}$ (při $k = 1$); berouce pak za $k$ jiná celistvá čísla, přidáváme k těmto úhlům jen násobky celého $\pi$ a nenalezneme tedy žádných nových os $\xi$, $\eta$. Vůči tomu, že osy příslušné hodnotám $\alpha_0$ a $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ jsou k sobě kolmy, stačí, uskrovníme-li se s hodnotou $\alpha_0$; neboť vzíti $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ značí patrně tolik, jako zaměniti osy $\xi$ a $\eta$ navzájem, t. j. změniti název těchto hodnot navzájem, věc to úplně zbytečná.

Nalezše takto úhel $\alpha$, totiž $\alpha = \alpha_0$, známe i hodnoty $a'_{11}$, $a'_{22}$ koëfficientů v transformované rovnici. Ostatně lze tyto hodnoty i přímo počítati, t. j. bez pomoci úhlu $\alpha$. Sečtením hodnot $a'_{11}$, $a'_{22}$ (9) nalezneme

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}.$$

Utvoříme-li dále rozdíl $a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12}$, nalezneme z (9) krátkou redukcí

$$a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11} a_{22} - a^2_{12}.$$

V našem případě však máme $a'_{12} = 0$, tedy platí tyto rovnice

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}; \quad a'_{11} a'_{22} = a_{11} a_{22} - a^2_{12}.$$

Znajíce součet a součin neznámých $a'_{11}$, $a'_{22}$, obdržíme tyto jakožto kořeny $\lambda$ kvadratické rovnice

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + a_{11} a_{22} - a^2_{12} = 0.$$

Řešením nabudeme

$$\lambda = \tfrac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a^2_{12}}],$$

hodnoty vždycky reálné, je-li daná rovnice reálnou. Jde nyní o to, abychom rozhodli, který z kořenů $\lambda$ jest hodnotou $a'_{11}$ a který jest $a'_{22}$. Za tou příčinou odvoďme z (9) rozdíl

$$a'_{11} - a'_{22} = (a_{11} - a_{22}) \cos \alpha + 2a_{12} \sin 2\alpha.$$

Je-li $tg\, 2\alpha > 0$, t. j. vůči (10), jsou-li hodnoty $a_{11} - a_{22}$ a $a_{12}$ téhož znamení, pak jest $2\alpha$ úhel ostrý a tudíž $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$ hodnoty kladné, pročež $a'_{11} - a'_{22}$ téhož znamení, jako $a_{11} - a_{22}$. Je-li tedy $a_{11} > a_{22}$, vezmeme za $a'_{11}$ větší a za $a'_{22}$ menší kořen $\lambda$; je-li $a_{11} < a_{22}$, učiníme naopak.

Je-li za druhé $tg\, 2\alpha < 0$, t. j. $a_{11} - a_{22}$ a $a_{12}$ různých znamení, tu jest $2\alpha$ úhlem tupým, tedy $\cos 2\alpha$ záporná a $\sin 2\alpha$ kladná hodnota, tedy $a'_{11} - a'_{22}$ téhož znamení jako $a_{12}$, t. j. opáčného s $a_{11} - a_{22}$. V tomto případě vezmeme při $a_{11} > a_{22}$ za $a'_{11}$ menší a za $a'_{22}$ větší kořen $\lambda$, a při $a_{11} < a_{22}$ za $a'_{11}$ větší a za $a'_{22}$ menší kořen $\lambda$.

Je-li $tg\, 2\alpha = 0$, t. j. $a_{12} = 0$, pak netřeba transformovati, rovnice tu již má žádaný tvar. K témuž případu vede supposice, že kořeny $\lambda$ jsou stejné; neboť tu nutně musí

$$a_{12} = 0, \quad a_{11} - a_{22} = 0.$$

Je-li konečně $tg 2\alpha$ nekonečně velkou t. j. $a_{11} = a_{12}$ při $a_{12} \gtrless 0$, tu máme $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, tedy z (9)

$$a'_{11} = a_{11} + a_{12}; \quad a'_{22} = a_{11} - a_{12}.$$

Máme tedy nyní transformovanou rovnici

$$a'_{11}\, \xi^2 + a'_{22}\, \eta^2 + a'_{33} = 0.$$

Vzhledem ku $a'_{33} \gtrless 0$ můžeme touto hodnotou děliti a psáti

$$A\xi^2 + B\eta^2 = 1,$$

kdež $A, B$ značí hodnoty $-\frac{a'_{11}}{a'_{33}}$, $-\frac{a'_{22}}{a'_{33}}$.

Jsou-li současně $A$ a $B$ kladné hodnoty, lze je psáti jakožto čtverce reálných čísel na př. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ a máme

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

rovnici ellipsy.

Je-li $A > 0$, $B < 0$, nalezneme

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

rovnici hyperboly s realnou osou $\xi$; při $A < 0$, $B > 0$ máme rovnici hyperboly

$$-\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

s realnou osou $\eta$.

Při $A < 0$, $B < 0$ máme rovnici:

$$-\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

jež repraesentuje imaginárnou křivku druhého stupně, na níž se nenalézá ani jediný reálný bod.

Případ, že by $A$ nebo $B$ vymizelo, není možný, neboť by pak diskriminant patrně vymizel — proti supposici.

9. V předcházejícím článku jsme uvažovali ten případ, kdy jmenovatel, který se vyskytne při řešení rovnic (8), nevymizí,

Vezměme nyní v úvahu případ, že onen jmenovatel vymizí, t. j. že

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0. \qquad (11)$$

V tomto případě neexistují žádné (konečné) hodnoty $x_0$, $y_0$, jež by rovnicím (8) vyhověly, t. j. čára nemá žádného středu; arci zde stále supponujeme $\Delta \gtrless 0$.

Předpokládejme, že by bylo lze rovnicím (8) jistými hodnotami $x_0$, $y_0$ vyhověti. Násobíme-li první tuto rovnici hodnotou $a_{22}$, druhou $a_{12}$ a odečteme-li, obdržíme vůči (11)

$$a_{22} a_{13} - a_{12} a_{23} = 0,$$

z čehož vzhledem k (11) dle formule (3) hned vychází

$$a_{22} \Delta = 0.$$

Za učiněné supposice $\Delta \gtrless 0$ máme tedy nutně $a_{22} = 0$ a dále z (11) $a_{12} = 0$, a pak z druhé rovnice (8) $a_{23} = 0$. Pohlédneme-li ale na výraz diskriminantu $\Delta$ napsaný na levé straně rovnice (4), soudíme, že $\Delta = 0$, což jest neshoda. Rovnicím (8) nelze tudíž při supposici (11) a $\Delta \gtrless 0$ nikterak vyhověti, t. j. čára nemá středu.

Chtějíce v tomto případě rovnici čáry transformací zjednodušiti, připomeňme si nejdříve, že vzhledem k (11) lze kvadratické členy daného výrazu $f(x, y)$ psáti

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 = (\sqrt{a_{11}}\, x + \sqrt{a_{22}}\, y)^2,$$

při čemž bez obmezení obecnosti supponujeme $a_{11} > 0$ a volíme $\sqrt{a_{11}}$ kladně, $\sqrt{a_{22}}$ pak tak, by

$$2 \sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{22}} = 2a_{12}.$$

Vskutku vidíme především, že nemůže $a_{11} = 0$ a $a_{22} = 0$, neboť by pak dle (11) též $a_{12} = 0$ a rovnice $f = 0$ by byla lineárnou. Z koëfficientů $a_{11}$, $a_{22}$ musí tedy alespoň jeden býti různý od nully na př. $a_{11}$ (kdyby byl $a_{22}$, stačí zaměniti litery $x$, $y$ na vzájem, t. j. přeměniti *název* os souřadných), mimo to jej můžeme supponovati $> 0$, neboť v opáčném případě stačí zaměniti rovnici $f = 0$ za $-f = 0$. Nyní vůči (11) jest patrné, že součin $a_{11} a_{22} = a_{12}^2$ jest kladný neb nullou, t. j. $a_{22}$ kladné neb nullou, tedy $\sqrt{a_{22}}$ také reálná a dána zúplna rovnicí

$$\sqrt{a_{12}} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}.$$

Máme nyní

$$f(x, y) \equiv (\sqrt{a_{11}}\, x + \sqrt{a_{22}}\, y)^2 + 2a_{13}\, x + 2a_{23}\, y + a_{33} = 0.$$

Otočíme-li osy souřadné $x$, $y$ kolem počátku směrem od kladné osy $x$ ku kladné ose $y$ o úhel $\alpha$ do nové polohy $x'$, $y'$, tu, jak je známo, platí transformační formule

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$
$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

z nichž jde řešením dle $x'$, $y'$

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$
$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Předpokládejme nyní, že volíme úhel $\alpha$ tak, aby — možno-li —

$$\sqrt{a_{11}}\, x + \sqrt{a_{22}}\, y = -\varrho y' = \varrho\,(x \sin \alpha - y \cos \alpha),$$

čemuž vyhovíme, jestliže

$$\sqrt{a_{11}} = \varrho \sin \alpha; \quad \sqrt{a_{22}} = -\varrho \cos \alpha,$$

kde $\varrho$ značí stálou hodnotu. Sečtením čtverců máme $a_{11} + a_{22} = \varrho^2$ a *volíme* $\varrho = +\sqrt{a_{11} + a_{22}}$. Nyní jest dle

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{a_{11}}}{\varrho}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{a_{22}}}{\varrho}$$

patrně $\sin \alpha$ kladným, kdežto $\cos \alpha$ má s $\sqrt{a_{22}}$ opačné znamení. Jest tedy $\alpha$ úhel v prvním neb druhém kvadrantu úplně stanovený. Nyní

$$f(x, y) = \varrho^2 y'^2 + 2a_{13}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2a_{23}\,(x' \sin + y' \cos\alpha) + a_{33}$$
$$= (a_{11} + a_{22})\, y'^2 + 2\, \frac{a_{23}\sqrt{a_{11}} - a_{13}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}$$
$$- 2\, \frac{a_{13}\sqrt{a_{11}} + a_{23}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}} + a_{33},$$

při čemž $\sqrt{a_{11} + a_{22}}$ vzata kladně. Pišme tento výraz k vůli stručnosti

$$a\, y'^2 + 2bx' + 2cy' + a_{33} = 0$$

a poznamenejme hned, že $a > 0$.

Pošiňme nyní osy $x'$, $y'$ do rovnoběžných s nimi poloh $\xi$, $\eta$ a měj nový počátek vůči osám $x'$, $y'$ souřadnice $m$, $n$. Pak

$$x' = \xi + m, \quad y' = \eta + n$$

a tedy

$$f = a\eta^2 + 2b\xi + 2\,(an + c)\, \eta + an^2 + 2bm + cn + a_{23}.$$

Učinivše $an + c = 0$, t. j. zvolivše $n = -\frac{c}{a}$, což vůči $a > 0$ je vždy možné, máme rovnici čáry ve tvaru

$$a\eta^2 + 2b\xi + an^2 + 2bm + cn + a_{33} = 0.$$

Učiníme-li dále

$$an^2 + 2bm + cn + a_{33} = 0,$$

t. j.

$$2bm = \frac{c^2}{a} - a_{33}, \quad \text{t. j. } m = \frac{c^3 - a\,a_{33}}{2\,ab},$$

máme rovnici ve tvaru

$$a\eta^2 + 2b\xi = 0.$$

Aby nalezený výraz pro $m$ měl smyslu, musí $b \gtrless 0$, a že tomu skutečně tak, vychází z hodnoty

$$b = \frac{a_{23}\sqrt{a_{11}} - a_{13}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}.$$

Kdyby totiž $b = 0$, t. j. $a_{23}\sqrt{a_{11}} - a_{13}\sqrt{a_{22}} = 0$, tu by vůči $\sqrt{a_{22}} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$ patrně $a_{23}\,a_{11} - a_{13}\,a_{12}$ bylo nullou. Pak by ale vzhledem ku formuli

$$(a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22})\,(a_{13}^2 - a_{11}\,a_{33}) - (a_{12}\,a_{13} - a_{11}\,a_{23})^2 = a_{11}\,\Delta,$$

jejíž správnost skutečným provedením v levo přímo vychází, patrně plynulo vůči (11)

$$a_{11}\,\Delta = 0,$$

a jelikož to dle supposice $a_{11} > 0$, $\Delta \gtrless 0$ jest neshoda, tedy nutně $b \gtrless 0$.

Vzhledem ku $a > 0$ lze psáti nalezenou rovnici ve tvaru

$$\eta^2 = -\frac{2b}{a}\xi$$

a rovnice tato repraesentuje parabolu, jejíž vrchol jest v počátku souřadné soustavy $\xi\eta$ a jejíž osa zapadá do osy $\xi$.

*Poznámka 1.* V předcházejících úvahách jsme pokládali $x, y$ za souřadnice pravoúhlé; značí-li $x, y$ souřadnice kosoúhlé, tu stačí zavésti známými transformačními formulemi za ně souřadnice pravoúhlé a pak provésti rozbor. Jelikož touto transformací nabudeme opět rovnice druhého stupně, nenalezneme žádných nových čar, t. j. kvadratická rovnice mezi kosoúhlými souřadnicemi repraesentuje jednu z čar v předešlém vytknutých.

*Poznámka 2.* V podaném rozboru přihlíženo na prvním místě k tomu, aby se rozhodlo, zda-li je daná čára skutečnou křivkou aneb skládá-li se z přímek. Nepřihlížíme-li k této věci na *prvním* místě, můžeme rozbor poněkud jinou cestou provésti, jako se na př. děje ve výtečné Analytické geometrii v rovině V. Jandečky, kde týž úkol je řešen s přesností u pana autora obvyklou.

Konečně podotýkám, že jsem s úmyslem neužil determinantů, chtěje ukázati, kterak lze vytčený úkol zcela elementárnými prostředky *úplně přesně* řešiti — podnik to snad ne docela zbytečný, uvážíme-li že na př. sem náležející úvaha čl. 89. jinak výborných *Salmon-Fiedlerových* kuželoseček není přesná.

Pramenů jsem necitoval vůči elementarnosti těchto úvah žádných, a pak také proto ne, že jsem při sepisování žádných před sebou neměl, chtěje si věc dle vlastních názorů upraviti. Tím se snad stalo, že jsou některé úvahy původní, ač o to autor nedbá.

*V prosinci 1883.*

## Drobné zprávy z fysiky.

Podává A. S.

*Rychlost explosivních vln* byla v novější době několikráte předmětem zajímavých studií. *Mach* a *Somr* (Sitzb. d. Wiener Akad., 2. odd. 75. sv.) studovali explose, jež způsobily vlny podobné vlnám zvukovým ve vzduchu. Rychlost jejich byla však mnohem značnější, až 700 metrů, rostouc a ubývajíc zároveň s intensitou explose.

*Berthelot* a *Vieille* (Comptes rendus sv. 94.) pozorovali rychlost, s jakou se šíří explose (plamen) v detonujících smíšeninách plynných, v trubicích uzavřených; nalezli rychlosti mnohem značnější, na př. ve smíšenině vodíku a kyslíku 2841 metrů. Pokusy jejich naznačují zvláštní druh smíšeného vlnění, „způsobeného současným působením fysikalních a chemických impulsů ve hmotě přetvořující se."

Tolik jest patrno, že jest rychlost vlnění v plynech při velké intensitě větší nežli při malé, že se však záhy blíží určité mezi, totiž rychlosti zvuku určené za obyčejných poměrů (ve vzduchu asi 332 metrů).

Platí něco podobného i pro světlo, t. j. stává se při větší intensitě rychlost světla též větší? *J. J. Müller* to tvrdí (Pogg.