Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Graf

O vlastnostech Newtonova a logarithmického potenciálu i jeho prvních derivací v některých jednoduchých singularitách hmotných ploch a křivek. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 2, 130--147

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120946`

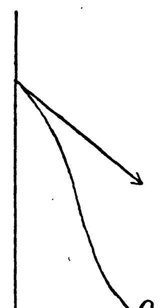
O vlastnostech Newtonova a logarithmického potenciálu i jeho prvních derivací v některých jednoduchých singularitách hmotných ploch a křivek.

Napsal

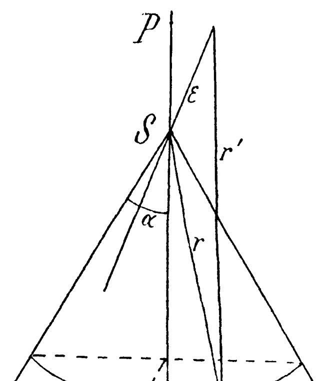
Dr. **František Graf** v Praze.

(Dokončení.)

Chci ještě zabývati se singulárními body ploch rotačních totiž body konickými i zvláštním jich druhem, kdy tečný kužel přejde v osu rotační čili kdy meridián plochy má tuto za přímku oskulační. Ježto pozorujeme vždy jen nejbližší okolí plochy, která se tedy dá až na veličiny vyššího než prvého řádu nahraditi kuželem tečným (obr. 1.) a poněvadž dále s veličinami řádu prvého úplně vystačíme, platí naše analyse všeobecně o všech rotačních plochách.



)Obr. 1.)



)Obr. 2.)

Budiž tedy povrch rotačního kužele pokryt fluidem hutnosti μ, tato pak budiž funkcí místa konečnou a spojitou. Z dřívějších vývodů následuje, že potenciál ve vrcholu kužele zůstane určitým a konečným. Myslíme-li si totiž, že povrch hmotného kužele jest na př. dle povrchové přímky rozříznut a rozprostřen v rovinu, zůstanou všechny délky na ploše samé nezměněny. Hutnost fluida v prázdném výseku jest nulla, a ježto potenciál jest funkcí skalární, jest dle dříve uvedených vět potenciál ve vrcholu kužele konečným a určitým. Zkoumejme pak jeho spojitost v okolí o tohoto bodu, které ohraničíme průsekem kužele s koulí o poloměru r, která má střed ve vrcholu kužele S (obr. 2.).

$$V_S = \int\limits_0 \frac{\mu d\omega}{r} \qquad V_P = \frac{\mu d\omega}{r'}$$

$$| V_S - V_P | < |\mu| \int\limits_0 d\omega \frac{|r' - r|}{rr'},$$

kde $|\mu|$ značí absolutně největší hodnotu hutnosti na o. Jest pak:

$$|r' - r| < \varepsilon$$

$$| V_S - V_P | < \varepsilon \sin\alpha \, |\mu| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r} \frac{d\varphi \, dr}{r'}$$

a poněvadž:

$$|r - \varepsilon| < r' < |r + \varepsilon|$$

$$| V_S - V_P | < \varepsilon \sin\alpha \, |\mu| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r} \frac{d\varphi \, dr}{r - \varepsilon}$$

a vyčíslíme-li integrál:

$$| V_S - V_P | < 2\pi\varepsilon \sin\alpha \, |\mu| \, lg \frac{\varepsilon - r}{\varepsilon}.$$

Tento výraz stává se, jak jsme dříve již uvedli, s ε nekonečně malým, potenciál jest tedy v okolí bodu S spojitým.

Chci zde uvésti specielní případ pro $\mu = 1$ a výšku kužele h z toho důvodu, že funkce V stává se pro vrchol kužele neurčitou. Jest totiž:

$$V = 2\pi \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \int\limits_0^{h} \frac{x \, dx}{\sqrt{(a + x)^2 + x^2 tg^2\alpha}} = V(h, a)$$

a jest vzdálenost bodu osy od vrcholu S. Spojitost funkce V

ve směru osy O a v bodě S je dokázána, je-li $\lim\limits_{a=0} V(h, a)$ rovno integrálu, ve kterém direktně veličinu a annulujeme, tedy rovno $2\pi h tg\alpha$. Integrací obdržíme:

$$V = 4\pi \sin\alpha \left[a\frac{\cos\alpha}{2}\, lg \frac{\cos\alpha\{\sqrt{(a+x)^2 + x^2tg^2\alpha} - a\} - x}{\cos\alpha\{\sqrt{(a+x)^2+x^2tg^2\alpha} - a\} + x} \right.$$
$$\left. + a\frac{x\cos^2\alpha\sqrt{(a+x)^2+x^2tg^2\alpha} - x(x + a\cos^2\alpha)}{(\sqrt{(a+x)^2+x^2tg^2\alpha} - a)^2\cos^2\alpha - x^2}\right]_0^h.$$

Prozatím budiž $\alpha \neq 0$. Pro hořejší mez h zůstane V určitým, pro $x = 0$ pak oba zlomky stanou se neurčitými. Differencováním obdržíme pro argument logarithmu limitu:

$$\frac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1}$$

a druhý zlomek dává teprv po dvojím differencování limitu 1. Jest tudíž:

$$V = 4\pi \sin\alpha \left[\frac{a\cos\alpha}{2}\, lg \frac{\cos\alpha\{\sqrt{(a+h)^2+h^2tg^2\alpha} - a\} - h}{\cos\alpha\{\sqrt{(a+h)^2+h^2tg^2\alpha} - a\} + h}\right.$$
$$\left. + a\frac{h\cos^2\alpha\sqrt{(a+h)^2+h^2tg^2\alpha} - h(h+a\cos^2\alpha)}{(\sqrt{(a+h)^2+h^2tg^2\alpha} - a)^2\cos^2\alpha - h^2}\right]$$
$$- 4\pi\sin\alpha\left[\frac{a\cos\alpha}{2}\, lg\frac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1} + a\right].$$

Argument logarithmu posledního jest záporný, rovněž však prvního; neboť

$$2ah\cos^2\alpha < 2ah\cos\alpha$$
$$\cos^2\alpha\,[(a+h)^2 + h^2tg^2\alpha] < (h + a\cos\alpha)^2$$
$$\cos\alpha\cdot\sqrt{(a+h)^2+h^2tg^2\alpha} < h + a\cos\alpha\,.$$

Má-li se vypočísti V pro vrchol kužele, dlužno $a = 0$ dosaditi do našeho výrazu. Dolní mez integrálu zmizí, první výraz stane se však pro $a = 0$ opět neurčitým. Differencováním následuje

$$V = 2\pi h tg\alpha,$$

tudíž táž hodnota jako dříve.

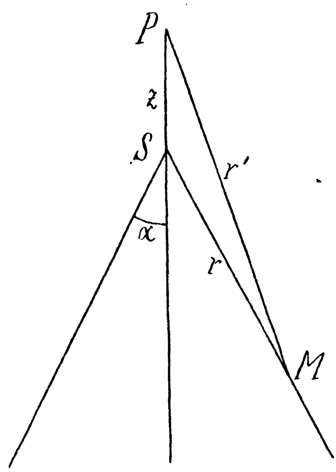
Pozorujme nyní první derivaci potenciálu ve směru osy (obr. 3.).

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\int\limits_0 \frac{\mu d\omega}{r'^2}\frac{\partial r'}{\partial z}, \qquad \frac{\partial r'}{\partial z} = \frac{r\cos\alpha + z}{r'}$$

a pro $z = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\int\limits_0 \mu d\omega \frac{\cos\alpha}{r^2} = -\cos\alpha \int\limits_0 \frac{\mu d\omega}{r^2}$$

$$d\omega = r \sin\alpha \, d\varphi \, d\alpha.$$



Obr. 3.

Značí-li $M(\mu)$ střední hodnotu hutnosti, jest

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -M(\mu)\sin\alpha\cos\alpha \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r} \frac{d\varphi dr}{r} = -M(\mu)\, 2\pi \sin\alpha\cos\alpha \left[lgr\right]_0^r.$$

Naše derivace jest tudíž logarithmicky nekonečnou.

Poněvadž jsme direktně v integrálu položili $z = 0$, zřejmo, že právě příspěvek nejbližšího okolí plochy k dotyčné attrakci jest nekonečným. Při tom jest ještě třeba poznámky ohledně střední hodnoty hutnosti $M(\mu)$; o této předpokládáme totiž, že není nekonečně malou. Kdyby μ se vzdáleností elementu plochy od vrcholu konvergovalo k nulle aneb mělo v nejbližším okolí vrcholu rozdílné znaménko, bylo by možno, že součin integrálu v tuto střední hodnotu zůstal by konečným. Podobný případ též uvedeme.

Mysleme si nyní, že z konverguje v původním integrálu k nulle. Všeobecně platí pro konečné z:

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-\int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{r\cos\alpha+z}{\sqrt{r^2+2rz\cos\alpha+z^2}^{\,3}}\,\mu r\sin\alpha\, d\varphi dr$$

$$=-M(\mu)\int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{r(r\cos\alpha+z)}{\sqrt{r^2+2rz\cos\alpha+z^2}^{\,3}}\sin\alpha\, d\varphi dr$$

a chci určiti mez integrálu pro $\lim z=0$. Jistě jest:

$$I>2\pi\sin\alpha\int_0^r \frac{r(r\cos\alpha+z)}{(r+z)^3}\,dr\,,$$

ježto všechny elementy integrálu jsou kladné. Tedy též:

$$I>2\pi\sin\alpha\Big[\cos\alpha\, lg\,(r+z)-\frac{z\,(1-2\cos\alpha)}{r+z}$$
$$+\frac{z^2(1-\cos\alpha)}{2(r+z)^2}-\cos\alpha\, lg z+(1-2\cos\alpha)-\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\Big].$$

Stává-li se z nekonečně malým, rozhoduje čtvrtý člen závorky. Naše derivace stane se téhož řádu nekonečnou, ježto položivše $\cos\alpha=1$ řád integrálu jsme nemohli změniti. Nekonečnost differenciálního quotientu měříme nyní dle vzdálenosti pohyblivého bodu od vrcholu.

Blíží-li se bod P vrcholu z druhé strany osy, máme:

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-\int_0 \frac{\mu d\omega}{r'^{\,2}}\,\frac{z-r\cos\alpha}{r'}=-\int_0 \frac{\mu d\omega}{r'^{\,3}}\,(z-r\cos\alpha),$$

však funkce pod integrálem stojící mění v intervallu integračním své znaménko. Proto rozdělíme integrál, jak následuje:

$$I = \int_0^r \frac{r^2 \cos\alpha\, dr}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\alpha + z^2}^3} - \int_0^r \frac{zr dr}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\alpha + z^2}^3} = I_1 - I_2$$

$$I_1 > \int_0^r \frac{\cos\alpha\, r^2 dr}{(r+z)^3}$$

$$I_1 > \cos\alpha \left[lg\left(1 + \frac{r}{z}\right) - \frac{2r}{r+z} + \frac{r}{z}\,\frac{r+2z}{(r+z)^2} \right]$$

a stává se tedy I_1 pro lim $z = 0$ nekonečným jako

$$\cos\alpha\, lg\, \frac{1}{z}.$$

Dále obdržíme pro I_2:

$$I_2 < \int_0^r \frac{zr dr}{(r-z)^3}$$

$$I_2 < \frac{-r}{r-z} - \frac{1}{2}\,\frac{2rz - r^2}{(r-z)^2}$$

a jeho limita zůstane pro $z = 0$ konečnou. Tedy vzrůstá naše derivace pro $z = 0$ jako výraz:

$$2\pi M(\mu) \sin\alpha \cos\alpha \lg \frac{1}{z},$$

který až na znaménko souhlasí s výrazem dřívějším, neboť differencujeme dle směru opačného.

Jest zřejmo, že hodnota derivace stane se neurčitou pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a pro $\alpha = 0$. V prvním případě přejde kužel v rovinu. Dosadíme-li do rovnice:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi M(\mu) \sin\alpha \int_0^r \frac{r(r\cos\alpha + z)}{\sqrt{r^2 + 2rz\cos\alpha + z^2}^3} dr$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{bude} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi M(\mu) \int_0^r \frac{rz}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} dz$$

$$= -2\pi M(\mu) \left[-z \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{z} \right) \right]$$

a pro $\lim z = 0$ a velice malé r:

$$\frac{\partial V}{\partial z}_{+0} = -2\pi\mu_S.$$

Pro opačný pak směr:

$$\frac{\partial V}{\partial z}_{-0} = +2\pi\mu_S,$$

z čehož vyplývá známá rovnice:

$$\frac{\partial V}{\partial z}_{+0} - \frac{\partial V}{\partial z}_{-0} = -4\pi\mu_S.$$

Přejde-li kužel v přímku, stane se element plochy nekonečně malým vyššího než druhého řádu. Kdybychom tedy chtěli od hmoty na ploše přejíti k hmotě lineární, bylo by nutno položiti:

$$2\pi\mu_f \sin\alpha\, r dr = \mu_l dl$$

a součin $\mu_f \sin\alpha$ musil by zůstat konečným, pro $r = 0$ však státi se nekonečně velkým. Mohli bychom tedy i vlastnosti potenciálu lineárně dislokovaného fluida odvoditi, čímž však se zde nechceme zabývati.

Uvedu nyní jednoduchý případ, kde attrakce směrem osy ve vrcholu kužele zůstane konečnou, jelikož svrchu uvedená podmínka není splněna.

Budiž μ proportionální vzdáleností bodu povrchu od vrcholu. Pak jest attrakce ve směru osy:

$$c\int_0^{2\pi}\int_0^r \sin\alpha\cos\alpha\, d\varphi dr = \pi c r \sin 2\alpha$$

tedy konečnou, leží-li ovšem hmoty v konečnu. Je-li všeobecně μ jen funkcí vzdálenosti bodu od vrcholu, zůstane naše derivace jistě konečnou, když

$$\int_0^r \frac{\mu(r)dr}{r}$$

vykazuje tutéž vlastnost; dle známé věty je tomu tak vždy, je-li

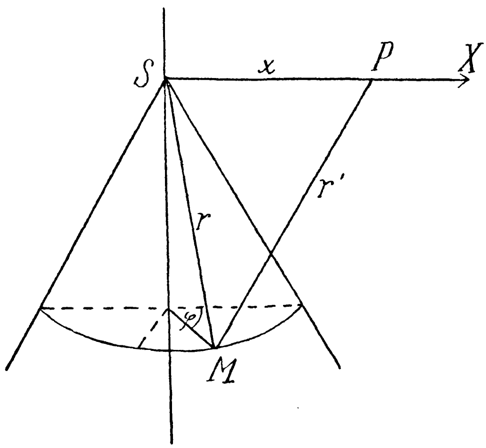
$$\lim_{r=0} \mu(r) = 0$$

Zbývá ještě derivace ve směru k ose kolmém (obr. 4.)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int_0 \frac{1}{r'^2} \frac{\partial r'}{\partial x} \mu d\omega = \int_0 \frac{r \sin\alpha \cos\varphi - x}{\sqrt{r^2 - 2rx \sin\alpha \cos\varphi + x^2}^3} \mu d\omega$$

a pro $x = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sin^2\alpha \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \mu \frac{\cos\varphi \, d\varphi dr}{r}.$$



Obr. 4.

Supponujeme-li, že μ dá se vyvinovati v okolí bodu S v řadu:

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 r + \mu_2 r^2 + \cdots,$$

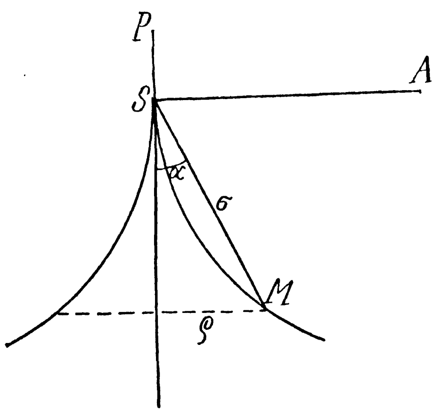
kde μ závisí pouze od azimuthu φ, bude:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sin^2\alpha \int_0^{2\pi}\int_0^{r} [\mu_0 + \mu_1(\varphi) r + \cdots] \frac{\cos\varphi \, d\varphi dr}{r}$$

$$= \sin^2\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \, [\mu_0 \cos\varphi \, (lgr) + \mu_1 \cos\varphi (r) + \cdots$$

Ve členu prvním ruší se integrováním nekonečné součty, ostatní členy dají pak hodnoty řádu r. Derivace dle směru X zůstává konečnou. Pro směr však, který není k ose kolmým, obdržíme vždy derivaci nekonečnou.

Přejdeme nyní k studiu potenciálu hmotné plochy rotační v bodě, ve kterém osa tvoří tečnu meridiánu. Ježto opět křivka tato dá se až na veličiny třetího řádu nahraditi oskulačním kruhem, nahradíme plochu částí annuloidu, povstávajícího rotací



Obr. 5.

kruhu kolem tečny (obr. 5.). Hutnost fluida μ budiž opět na ploše funkcí spojitou a konečnou. Rovnice plochy zní:

$$\sigma = D \sin \alpha$$

je-li $\frac{D}{2}$ poloměr otáčejícího se kruhu. Element povrchu pak jest dán výrazem:

$$d\omega = \varrho d\varphi ds = D^2 \sin^2 \alpha \, d\varphi d\alpha.$$

Potenciál V jest:

$$V_S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\mu D^2 \sin^2 \alpha \, d\varphi d\alpha}{\sigma} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \mu D \sin \alpha \, d\varphi d\alpha$$

a je tudíž:

$$|V_S| < 2\pi D\,|\mu|\,[1 - \cos\alpha]\,.$$

Tento obnos stává se s α nekonečně malým, má tedy V v bodu S určitou a konečnou hodnotu. Chceme-li zkoumati spojitost potenciálu směrem osy, je třeba tvořit rozdíl:

$$V_P - V_S = \int\limits_0 \mu d\omega \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{\sigma}\right] = \int\limits_0 \mu d\omega \frac{\sigma - r_a}{\sigma r_a},$$

kde $r_a = \overline{PM}$; elementy integrálu tohoto jsou negativní, je-li $\overline{SP} = z$ positivní (směrem vzhůru od bodu S), kladnými však pro negativní z.

$$z > 0 \qquad |V_P - V_S| < \int\limits_0 \mu d\omega \frac{z}{\sigma^2},$$

ježto $\sigma < r_a$

$$|V_P - V_S| < |\mu| \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\alpha} z d\varphi d\alpha$$

$$< 2\pi\,|\mu|\,\alpha z$$

a V_{+z} konverguje tudíž k hodnotě V_S.

Je-li z negativní a označíme-li úsečku $\overline{PM} = r_i$, bude rozdíl

$$V_P - V_S = \int\limits_0 \mu d\omega \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{\sigma}\right]$$

$$r_i^2 = \sigma^2 - 2\sigma z \cos\alpha + z^2,$$

kde dlužno vzíti pro z jeho absolutní hodnotu. Máme pak dále:

$$|V_P - V_S| < |\mu| \int\limits_0 d\omega \frac{|\sigma - r_i|}{\sigma r_i}$$

$$< |\mu| \int\limits_0 d\omega \frac{|z|}{\sigma r_i}$$

$$|V_P - V_S| < 2\pi\,|\mu|\,|z| \int\limits_0^{\alpha} \frac{\sigma d\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\sigma z\cos\alpha + z^2}}.$$

Položíme-li $\cos\alpha = 1$, stane se zlomek větším; dále platí relace:

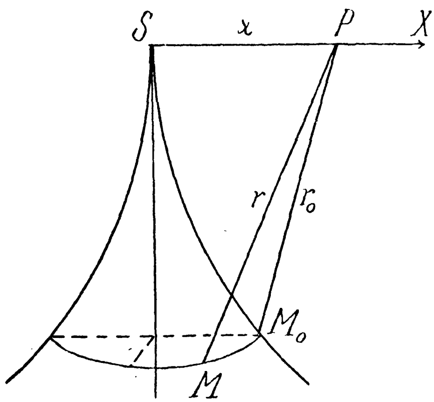
$$d\sigma = \sqrt{D^2 - \sigma^2}\, d\alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{D^2 - \sigma^2}} = \frac{1}{D}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{D^2} + \cdots\right]$$

$$|V_P - V_S| < 2\pi |\mu| |z| \int_0^\sigma \frac{\sigma d\sigma}{(\sigma - z)^2} \frac{1}{D} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{D^2} + \cdots\right].$$

První člen dává co výsledek integrace:

$$\frac{2\pi|\mu|}{D}\left[zlg\left(1 - \frac{\sigma}{z}\right) - \frac{\sigma z}{\sigma - z}\right]$$



Obr. 6.

a stává se tedy pro $z = 0$ nekonečně malým. Totéž platí pro ostatní členy, jak lehce se přesvědčíme na základě formule:

$$(n-1)\int \frac{\sigma^n d\sigma}{(\sigma - z)^2} = \frac{\sigma^n}{\sigma - z} + \frac{nz}{n-2}\frac{\sigma^{n-1}}{\sigma - z} + \frac{n-1}{n-2} n z^2 \int \frac{\sigma^{n-2} d\sigma}{(\sigma - z)^2}.$$

Jest tedy potenciál ve směru osy v okolí bodu S spojitým. Zbývá směr na ose kolmý (obr. 6.):

$$V_P - V_S = \int_0 \mu d\omega \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sigma}\right]$$

$$|V_P - V_S| < |\mu| \int_0 d\omega \frac{|\sigma - r|}{\sigma r}$$

a označíme-li nejmenší hodnotu r pro jistou rovnoběžku r_0:

$$| V_P - V_S | < | \mu | \int_0 d\omega \frac{x}{r_0 \sigma}$$

a je-li $x < \frac{D}{2}$, bude jistě:

$$| V_P - V_S | < | \mu | \int_0 \frac{d\omega}{\sigma},$$

kde x vůbec se nevyskytuje. Jest tedy

$$V_P - V_S | < 2\pi | \mu | D \int_0^{\alpha} \sin \alpha \, d\alpha,$$

kterýžto výraz konverguje i pro konečné x s okolím bodu S k nulle.

Chceme-li však měřiti řád této difference hodnotou x, obdržíme dosazením

$$r_0 > \sigma - x$$

$$| V_P - V_S | < | \mu | x \int_0^{2\pi} \int_0^{\sigma} \frac{\sigma^2 d\varphi d\alpha}{\sigma(\sigma - x)}$$

a zavedeme-li místo α proměnnou σ:

$$| V_P - V_S | < \frac{1}{D} | \mu | 2\pi x \int_0^{\sigma} \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - x} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{D^2} + \cdots \right]$$

a první člen, který jest rozhodujícím, dá za výsledek:

$$\int_0^{\sigma} \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - x} = \sigma + x lg \left(1 - \frac{\sigma}{x} \right), \qquad \lim_{x=0} x \int_0^{\sigma} \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - x} = 0.$$

Interessantní výsledky skytá studium první derivace potenciálu ve směru osy Z. Jest totiž:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - \int_0 \frac{\mu d\omega (z \pm \sigma \cos \alpha)}{\sqrt{\sigma^2 \pm 2 \sigma z \cos \alpha + z^2}^3}.$$

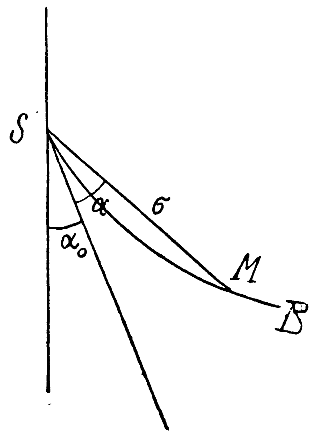
Dosadíme-li direktně $z = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \pm \int\limits_0 \mu \cos \alpha \, d\varphi d\alpha = \pm \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sigma} d\varphi d\sigma \, \frac{\mu}{D}$$

tudíž:

$$\left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| < 2\pi \frac{|\mu|}{D} \sigma .$$

Attrakce nejbližšího okolí hrotu plochy S zůstane v tomto bodě konečnou.



Obr. 7.

Mysleme si kruhový oblouk SB (obr. 7.), protínající přímku O pod úhlem α_0; jeho rotací kolem O povstane plocha, mající nekonečnou derivaci potenciálu ve směru osy v bodě S. Považujeme-li $\frac{\partial V}{\partial O}$ za funkci proměnné α_0, při čemž hutnost fluida μ dána je funkcí veličiny α, jak dříve uvedené podmínky toho vyžadují, a horní mez proměnné α má konstantní, však malou hodnotu, vykazuje tato partielní derivace zvláštní vlastnosti. Zůstane totiž jen pro $\alpha_0 = \frac{n\pi}{2}$ konečnou, kde n značí celistvé číslo. Pro sudé n obdržíme hrot plochy dříve uvedený, pro liché n pak kulový segment. Pro všechny ostatní hodnoty jest naše funkce logarithmicky nekonečnou. Budiž zde uveden jednoduchý příklad: Pro bod osy rotační má potenciál hmotné této plochy hodnotu

$$V = \int_0 \frac{\mu d\omega}{\sqrt{\sigma^2 + 2\sigma z \cos(\alpha + \alpha_0) + z^2}}$$

a derivace dle osy pro bod S jest

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi \int_0^\alpha \frac{\sin(\alpha + \alpha_0)\cos(\alpha + \alpha_0)}{\sin\alpha} d\alpha = T(\alpha_0),$$

kde $\mu = 1$, α pak značí velice malou konstantu; integrál tento dá se psáti ve formě

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{\sin 2(\alpha + \alpha_0)}{\sin\alpha} d\alpha = \left[\frac{1}{2}\sin 2\alpha_0 \lg \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \sin 2(\alpha + \alpha_0)\right]_0^\alpha.$$

Prvá část jest pro $\alpha = 0$ logarithmicky nekonečnou, je-li $\sin 2\alpha_0 \neq 0$. V případě rotačního kužele s odklonem α mezi pláštěm a osou byla derivace nekonečnou jako výraz

$$-\pi\mu \sin 2\alpha \lg r$$

a náš integrál vzrůstá neobmezeně jako

$$\pi \sin 2\alpha_0 \lg \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{pro} \quad 2\alpha_0 = n\pi.$$

Tangenta stává se však nekonečně malou jako její oblouk, tedy $\lg \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ je pro $\lim \alpha = 0$ nekonečným jako $\lg\alpha$ aneb jako $\lg(D\alpha) = \lg\sigma$. Položíme-li tedy místo oblouku jeho sinus, znamenáme naprostou shodu tohoto výsledku s dřívějším.

Chceme-li vyšetřiti spojitost řečené derivace, jest zkoumati, jaká je limita integrálu

$$\lim_{z=0} \frac{\partial V}{\partial z} = \lim_{z=0} -\int_0 \mu D^2 \sin^2\alpha\, d\varphi\, d\alpha \frac{z + D\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{D^2\sin^2\alpha + 2Dz\sin\alpha\cos\alpha + z^2}^3}$$

kde z může býti kladným neb záporným.

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi \int\limits_0^\alpha \frac{\mu D^2 \sin^2 \alpha \, d\alpha}{r^3} \, z - 2\pi \int\limits_0^\alpha \frac{\mu D^3 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{r^3} \, d\alpha.$$

Absolutní hodnota prvého integrálu je menší než

$$|\mu| |z| \int\limits_0^\alpha \frac{D^2 \sin^2 \alpha}{r^3} \, d\alpha,$$

kde $|\mu|$ je opět největší absolutní hodnota hutnosti na dané části plochy. Ježto však

$$r > |\sigma - z|,$$

kde z značí absolutní obnos vzdálenosti od hrotu plochy, bude

$$\left| z \int\limits_0^\alpha \frac{\mu D^2 \sin^2 \alpha}{r^3} \, d\alpha \right| < |\mu| |z| \int\limits_0^\alpha \frac{D^2 \sin^2 \alpha}{(D \sin \alpha - z)^3} \, d\alpha,$$

$$\int\limits_0^\alpha \frac{D^2 \sin^2 \alpha}{(D \sin \alpha - z)^3} \, d\alpha = \int\limits_0^t \frac{t^2 dt}{(t - z)^3} \, \frac{1}{D\sqrt{1 - \frac{t^2}{D^2}}}$$

$$= \frac{1}{D} \int\limits_0^t \frac{t^2 dt}{(t - z)^3} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{t^2}{D^2} + \ldots\right],$$

a integrací prvého členu obdržíme:

$$\frac{1}{D}\left[\lg\left(1 - \frac{D \sin \alpha}{z}\right) - 2 \frac{D \sin \alpha}{D \sin \alpha - z} + \frac{1}{2} \frac{D^2 \sin^2 \alpha - 2zD \sin \alpha}{(D \sin \alpha - z)^2}\right].$$

Tento výraz, násoben veličinou z, stává se pro $\lim z = 0$ nekonečně malým.

Ostatní členy jsou pak vyššího řádu, limita prvého integrálu jest tedy nullou. Pozorujme nyní integrál druhý

$$\int\limits_0^\alpha \frac{\mu D^3 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{r^3} \, d\alpha,$$

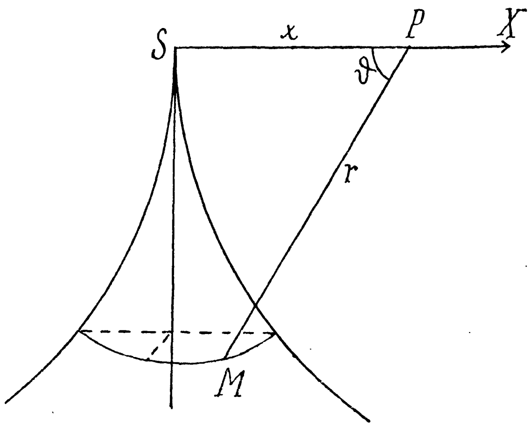
jehož absolutní obnos jest menší než

$$|\mu| \int_0^\alpha \frac{D^3 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{(D \sin\alpha - z)^3} d\alpha$$

a substitucí $D \sin \alpha = t$ vychází hodnota určitého integrálu:

$$\frac{1}{D} \Big[D \sin \alpha + 3z \lg \left(1 - \frac{D \sin \alpha}{z}\right) - 3z \frac{D \sin \alpha}{D \sin \alpha - z}$$
$$+ \frac{z}{2} \frac{D^2 \sin^2 \alpha - 2Dz \sin \alpha}{(D \sin \alpha - z)^2} \Big].$$

Tento výraz stává se pro $z = 0$ téže dimense jako okolí bodu S. Podotýkám zde tedy výslovně, že tato první derivace potenciálu dle osy rotační jest v bodě S spojitou.



Obr. 8.

Úvaha tato dala by se též provésti tak, že trigonometrické funkce veličiny α bychom vyvinovali v řady, jež druhým členem lze ukončiti. Neboť právě pro velice malé hodnoty α zůstávají vlastnosti spojitosti potenciálu nezměněny.

Uvádím ještě krátkou poznámku ohledně elementu síly, kterou působí nekonečně úzké, stejnorodé pásmo dle rovnoběžky kužele na bod vrcholu. Differenciál této síly jest dán rovnicí:

$$dK = 2\pi \sin \alpha \cos \alpha \frac{dr}{r^4},$$

kde $\mu = 1$. Pro rovinu jest $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a zmizí tu $\cos\alpha$, který charakterisuje polohu elementu ku směru osy. Jest to tedy poloha elementů plochy, která působí, že u roviny attrakce dle normály jest konečnou. Pro $\alpha_0 = 0$, tedy pro hrot plochy annuloidu však má velikost differenciálu plochy za následek, že přítažlivá síla zde zůstane omezenou, neboť jest

$$dK = \pi \frac{d \sin^2(\alpha + \alpha_0)}{\sin\alpha}$$

a velikosť plochy kolem singulárního bodu jest nekonečně malou vyššího řádu.

Zbývá konečně differenciální quocient ve směru na ose kolmém (obr. 8.). Nazveme-li tento směr X, bude

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int\limits_0 \mu d\omega \frac{x - \sigma \sin\alpha \cos\varphi}{\sqrt{\sigma^2 - 2x\sigma \sin\alpha \cos\varphi + x^2}^{\,3}}$$

a pro $x = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int\limits_0 \mu d\omega \frac{\sin\alpha \cos\varphi}{\sigma^2} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\alpha} \mu \sin\alpha \cos\varphi \, d\varphi \, d\alpha$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\alpha} [\mu_0 + \mu_1(\varphi)\sigma + \ldots] \sin\alpha \cos\varphi \, d\varphi \, d\alpha$$

$$= \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{\alpha} \sin\alpha \, d\alpha + D \int\limits_0^{2\pi} \mu_1 \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{\alpha} \sin^2\alpha \, d\alpha + \ldots$$

Jest tedy naše derivace i v tomto směru konečnou. Bychom se přesvědčili o její spojitosti, jest určiti pro $x = 0$ limitu integrálu:

$$-\int\limits_0 \mu d\omega \frac{x - \sigma \sin\alpha \cos\varphi}{\sqrt{\sigma^2 - 2\sigma x \sin\alpha \cos\varphi + x^2}^{\,3}} = -\int\limits_0 \mu d\omega \frac{x - \sigma \sin\alpha \cos\varphi}{r^3}$$

$$\frac{x - \sigma \sin\alpha \cos\varphi}{r} = \cos\vartheta, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\int\limits_0 \mu d\omega \frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

a poněvadž

$$-1 < \cos\vartheta < +1, \qquad |\sigma - x| < r < |\sigma + x|$$

následuje pro absolutní hodnotu integrálu:

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| < |\mu| \int_0^\sigma \frac{d\omega}{(\sigma - x)^2}$$

a integrujeme-li dle proměnné φ:

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| < \frac{2\pi|\mu|}{D} \int_0^\sigma \frac{\sigma^2}{(\sigma - x)^2} [1 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{D^2} + \ldots] d\sigma.$$

Prvý člen řady rovná se

$$\sigma + 2x \lg\left(1 - \frac{\sigma}{x}\right) - x\frac{\sigma}{\sigma - x}$$

a hledaná limita bude tedy menší než

$$\frac{2\pi|\mu|}{D}\sigma,$$

ježto ostatní integrály jsou vyššího řádu, jak jsme se již dříve o tom přesvědčili partielní integrací. Derivace potenciálu hmotné plochy zůstává tudíž spojitou v každém směru v okolí jejího singulárního bodu.

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Výroční zpráva c. k. vyšší reálky v Jičíně za školní rok 1903—4. O lineární závislosti kapillárního napjetí na teplotě. Thermodynamická studie. Napsal *Dr. Arnošt Dittrich.* V Jičíně, 1904 (10 str.).

Účel uvedené práce jest mnohem dalekosáhlejší, než z nadpisu lze souditi. P. autor applikuje tu zákony thermodynamiky na zjevy kapillární, aby odvodil theoretickou závislost kapillární konstanty na teplotě, při čemž výsledek jeho úvah má ukázati neúplnost základních vět thermodynamiky. Systém, jejž si za tím účelem zvolil, skládá se z tekutinové lamelly připjaté ke