Arnošt Dittrich

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 4, 283--300

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120960`

Snadno můžeme též ukázati, že body X a X' jsou harmonicky sdružené vzhledem k bodům A_1 a X_1; podobně jsou body X a X'' harmonicky sdružené vzhledem k bodům A_2 a X_2 a body X a X''' vzhledem k A_3 a X_3. Z toho plyne jednoduché sestrojení algebraicky přidružených bodů X', X'', X''', je-li dán bod X.

Na Král. Vinohradech dne 5. března 1901.*)

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati.

Napsal

Arnošt Dittrich v Praze.

(Pokračování.)

§ 5. *Věta třetí.* Obsah prvé části věty třetí, která praví, že, lze-li realisovati jistou úplnou soustavu, lze též realisovati každou soustavu shodnou, jest následující.

Čítá-li původní soustava n hmotných bodů, z nichž ν-tý má souřadnice x_ν, y_ν, z_ν, hmotu m_ν, lze realisovati též soustavu čítající n bodů, se souřadnicemi $x_{1\nu}$, $y_{1\nu}$, $z_{1\nu}$, hmotami m_ν, kterou lze přivésti vždy do každé polohy $x_{1\nu}$, $y_{1\nu}$, $z_{1\nu}$, jež z polohy x_ν, y_ν, z_ν vznikla nějakým pošinutím a otočením. Má-li původní soustava vazby $\varphi_\pi(x, y, z)$ síly $X_\nu(x, y, z)$, $Y_\nu(x, y, z)$, $Z_\nu(x, y, z)$ má nová soustava tytéž vazby a síly

$$\varphi_\pi(x_1, y_1, z_1),\ X_\nu(x_1, y_1, z_1),\ Y_\nu(x_1, y_1, z_1),\ Z_\nu(x_1, y_1, z_1).$$

Soustavy, jež jsou v tomto poměru, nazveme v dalším shodné.

Z definice shodných soustav plyne, že vazby musí míti

---

*) O větách Casparyho a jiných větách s nimi souvisících pojednávají též články „Zur neueren Dreiecksgeometrie" od F. *Casparyho* a „Sur quelques nouveaux theorèmes relatifs au triangle" par M. L. *Ripert*, jež jsou uveřejněny v I. svazku třetí řady „Archiv der Mathematik und Physik" (1901); nížepsaný, sepisuje předcházející článek, neznal těchto pojednání, ježto vyšla teprve 2. dubna 1901.

jisté vlastnosti; lze však dokázati, že vazby tyto vlastnosti mají, platí-li o nich věta 1.

Je-li jedna z poloh, kterou původní soustava, označme ji I, zaujmouti může, dána souřadnicemi $(x, y, z)\,\varrho$, lze shodnou soustavu II přivésti do polohy $(x_1, y_1, z_1)\,\varrho_1$, kde $\varrho_1 = \varrho S$. S značí opět nějaké pošinutí a otočení. Každá jiná poloha $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\,\overline{\varrho}$, v niž I přejíti může, vázána relacemi

$$(34) \qquad \varphi_\pi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \varphi_\pi(x, y, z).$$

Každá poloha $(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1)\,\overline{\varrho}_1$, v niž II přejíti může, hoví podmínkám

$$(35) \qquad \varphi_\pi(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1) = \varphi_\pi(x_1, y_1, z_1).$$

Z definice shodnosti plyne, že rovnice (35) musí býti splněny, je-li $\overline{\varrho}_1 = \overline{\varrho}\overline{S}$, kde $\overline{S}$ jest nějaké pošinutí a otočení, hoví-li $\overline{\varrho}$ rovnicím (34).

Z věty prvé plyne, že vskutku splněny jsou; neboť

$$(36) \qquad \varphi_\pi(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1) = \varphi_\pi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}),$$

je-li

$$\overline{\varrho}_1 = \overline{\varrho}\overline{S}.$$

Obdobně jest

$$(37) \qquad \varphi_\pi(x_1, y_1, z_1) = \varphi_\pi(x, y, z),$$

poněvadž

$$\varrho_1 = \varrho S.$$

Dosadíme-li výrazy na levé straně z rovnic (36) a (37) do soustavy (35), vidíme, že poloha $\overline{\varrho}_1$ rovnicím těm hoví, hoví-li poloha $\overline{\varrho}$ rovnicím (34).

Zvolíme-li transformaci $\overline{S} \equiv S$, plyne z předchozího, že, pohybuje-li se původní soustava, může se shodná soustava vždy pohybovati tak, aby vždy totéž pošinutí a otočení převádělo polohu, kterou původní soustava v jistém okamžiku zaujímá, v polohu, kterou shodná v téže době zaujímá. Nazveme v dalším pohyb obou soustav shodným, jsou-li polohy obou soustav vždy v uvedené souvislosti.

Poněvadž při shodném pohybu souvisí polohy obou soustav týmže pošinutím a otočením v době t i $t + dt$, přejde stav původní soustavy v libovolné době vždy touže transformací rozšířené skupiny všech pošinutí a otočení ve stav shodné soustavy v téže době.

Jest tedy možno, aby stavy dvou shodných soustav souvisely vždy touže transformací P′ (viz ke konci min. §) rozšířené skupiny všech pošinutí a otočení.

Nyní můžeme se obrátiti k druhé části věty třetí, která praví, že za jistých okolností jest pohyb shodné soustavy shodný s pohybem původní soustavy.

Obsah této věty lze formulovati tak, že vše další platí, ať užíváme souřadnic Descartesových nebo Lagrange-ových.

Mějme dvě shodné soustavy. Pohyb obou soustav popsán pak differencialními rovnicemi stejné formy, poněvadž vazby a síly obou soustav dány stejnými funkcemi. Stav původní soustavy, označme ji I, v době $t = 0$ nazveme u; souřadnice jeho jsou veličiny $u_1, \ldots, u_s$. Během doby t přejde soustava ta pohybem do stavu $\bar{u}$, jenž má souřadnice $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s$. Nazveme-li počáteční stav, z něhož shodná soustava II vyšla, v, lze pro shodnost obou soustav zvoliti v tak, že se stavem u souvisí nějakou transformací P′ rozšířené skupiny všech pošinutí a otočení; lze tedy zvoliti $v = u\mathrm{P}'$. Z předchozího plyne, že jest možno, aby shodná soustava přešla pohybem během doby t ze stavu v do stavu $\bar{v}$, kde $\bar{v} = \bar{u}\mathrm{P}'$. Stav ten vznikne tedy ze stavu $\bar{u}$ touže transformací P′, která převádí u ve v. Druhá část věty třetí má pak vyjádřiti, že tento případ možný skutečně nastane:

Je-li u stav počáteční; $\bar{u}$ stav po době t,

je-li v stav počáteční; $\bar{v}$ stav po téže době t,

jest $\bar{u}\mathrm{P}' = \bar{v}$, je-li $u\mathrm{P} = v$.

Tato věta zdánlivě složitá jest takřka samozřejmou, uvědomíme-li si, co rozšířená skupina všech pošinutí a otočení znamená. Věta uvedená značí pouze, že kdykoliv polohu soustavy I lze převésti v polohu soustavy II týmže pošinutím a otočením v době $t = 0$ i v době $t = dt$, souvisí polohy obou soustav tímtéž pošinutím a otočením v libovolné době t. Formulace nahoře uvedená připojuje pouze, že též polohy obou soustav v době $t + dt$ týmže pošinutím a otočením v sebe přecházejí. Tento dodatek jest dovolen, neboť, co platí o libovolné době t, platí též o době $t + dt$.

Užijeme-li dříve zavedené shodnosti pohybů, lze druhou část věty třetí vyjádřiti slovy:

Pohyby dvou shodných soustav jsou shodny, souvisí-li polohy obou soustav týmže pošinutím a otočením v době $t = 0$ a $t = dt$.

Z věty 1. a 2. plyne, že differencialní rovnice pohyb soustavy popisující, definují jednočlenou skupinu T_t, jež udává, jak počáteční stav u neb v přechází během doby t ve stav $\overline{u}$ resp. $\overline{v}$. Pomocí značky T_t lze souvislost těchto stavů vyjádřiti rovnicemi

$$\overline{u} = uT_t, \quad \overline{v} = vT_t.$$

Přibereme-li k tomu, že dle věty třetí jest

$$\overline{v} = \overline{u}P',$$

je-li

$$v = uP',$$

obdržíme z obou rovnic pro $\overline{v}$, že

$$\overline{u}P' = vT_t.$$

Dosadíme-li za v a $\overline{u}$ ze zbývajících dvou rovnic symbolické jich vyjádření, plyne

$$uT_tP' = uP'T_t,$$

neb zkrátka

$$T_tP' = P'T_t.$$

Tato symbolická rovnice praví, že stav, v nějž soustava přejde během doby t a nějakou transformací P', jest týž, ať se soustava dříve pohybuje a pak transformuje neb naopak.

Transformace T_t tvoří jednočlenou skupinu, jejíž symbol jest A. Transformace P' tvoří sice skupinu šestičlenou, která vytvořována infinitesimalními transformacemi, jichž symboly jsou výrazy W'_i, $i = 1, \ldots, 6$ (viz ke konci § 4.), ale transformace této skupiny lze spořádati v ∞^5 jednočlenných skupin, jež vytvořeny infinitesimalní transformací

$$\mathfrak{W}f = \sum_1^6 e_i W'_i f.$$

$c_1, \ldots, c_6$ jsou libovolné stálé; záleží jen na poměrech těchto veličin.

Větu $P'T = TP'$ lze pak pojímati tak, že každou transformaci jednočlené skupiny T lze zaměniti s každou transformací jednočlené skupiny, jejíž symbol jest $\mathfrak{W}$. Dle Lie-ových vět*) jest to možno jedině tehdá, je-li závorkový výraz $(\mathfrak{W}A) \equiv 0$. Poněvadž

$$(\mathfrak{W}A) = \mathfrak{W}(A) - A(\mathfrak{W}) = \sum_1^6 {}^i c_i (W'_i A),$$

nemůže výraz ten pro libovolnost konstant c vymizeti jinak, leč je-li

$$(W'_i A) \equiv 0, \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Když tyto výrazy skutečně provedeme, rozpadnou se nám v řadu differencialních rovnic, jež lze transformovati v podmínky, jimž síly zevní hoví, platí-li o soustavě věta třetí.

Další počet třeba rozděliti dle toho, jakých souřadnic užíváme.

1. *V souřadnicích Descartesových.* Jak již v § 3. uvedeno, jest v těchto souřadnicích výraz

$$Af \equiv \sum_1^n {}^\nu \left[x'_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + y'_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu} + z'_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \right.$$
$$\left. + \overline{X}_\nu \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} + \overline{Y}_\nu \frac{\partial f}{\partial y'_\nu} + \overline{Z}_\nu \frac{\partial f}{\partial z'_\nu} \right],$$

kdežto $W'_i f \equiv V'_i f$, $i = 1, \ldots, 6$. Výrazy V'_i vypsány v § 1.

Dosadíme-li tyto hodnoty do výrazů $(W'A) = 0$, obdržíme

$$(V'_\varkappa A) \equiv \sum_1^n {}^\nu \left[\frac{\partial f}{\partial x'_\nu} V'_\varkappa \overline{X}_\nu + \frac{\partial f}{\partial y'_\nu} V'_\varkappa \overline{Y}_\nu + \frac{\partial f}{\partial z'_\nu} V'_\varkappa \overline{Z}_\nu \right] \equiv 0,$$
$$\varkappa = 1, 2, 3,$$

*) *Scheffers, Lie* „Differentialgleichungen," 307.

$$(V'_4 \varDelta) \equiv \sum_1^n{}^{\nu} \left[\frac{\partial f}{\partial x'_\nu}(V'_4 \overline{X}_\nu)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y'_\nu}(V'_4 \overline{Y}_\nu + \overline{Z}_\nu) + \frac{\partial f}{\partial z'_\nu}(V'_4 \overline{Z}_\nu - \overline{Y}_\nu)\right] \equiv 0,$$

$$(V'_5 \varDelta) \equiv \sum_1^n{}^{\nu} \left[\frac{\partial f}{\partial x'_\nu}(V'_5 \overline{X}_\nu - \overline{Z}_\nu)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y'_\nu}(V'_5 \overline{Y}_\nu) + \frac{\partial f}{\partial z'_\nu}(V'_5 \overline{Z}_\nu + \overline{X}_\nu)\right] \equiv 0,$$

$$(V'_6 \varDelta) \equiv \sum_1^n{}^{\nu} \left[\frac{\partial f}{\partial x'_\nu}(V'_6 \overline{X}_\nu + \overline{Y}_\nu)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y'_\nu}(V'_6 \overline{Y}_\nu - \overline{X}_\nu) + \frac{\partial f}{\partial z'_\nu}(V'_6 \overline{Z}_\nu)\right] \equiv 0.$$

Pro libovolnost funkce f nemůže těchto 6 výrazů vymizeti jinak, než je-li

$$\begin{array}{llll} V'_\varkappa \overline{X}_\nu = 0, & V'_4 \overline{X}_\nu = 0, & V'_5 \overline{X}_\nu - \overline{Z}_\nu = 0, & V'_6 \overline{X}_\nu + \overline{Y}_\nu = 0, \\ V'_\varkappa \overline{Y}_\nu = 0, & V'_4 \overline{Y}_\nu + \overline{Z}_\nu = 0, & V'_5 \overline{Y}_\nu = 0, & V'_6 \overline{Y}_\nu - \overline{X}_\nu = 0, \\ V'_\varkappa \overline{Z}_\nu = 0, & V'_4 \overline{Z}_\nu - \overline{Y}_\nu = 0, & V'_5 \overline{Z}_\nu + \overline{X}_\nu = 0, & V'_6 \overline{Z}_\nu = 0, \\ & \varkappa = 1, 2, 3, & \nu = 1, \ldots, n. & \end{array} \tag{38}$$

Tyto rovnice, jichž jest $18n$, jsou dosti složité; lze je však značně zjednodušiti.

Dosadíme-li do prvého sloupce těchto rovnic za $\overline{X}_\nu, \overline{Y}_\nu, \overline{Z}_\nu$ hodnoty, jež vypsány v § 3. vzorec (10), obdržíme zkrátivše m_ν

$$V'_\varkappa X_\nu + V'_\varkappa \sum_1^p{}^{\pi} \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu} = 0, \quad V'_\varkappa Y_\nu + V'_\varkappa \sum_1^p{}^{\pi} \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu} = 0,$$
$$V'_\varkappa Z_\nu + V'_\varkappa \sum_1^p{}^{\pi} \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu} = 0,$$
$$\varkappa = 1, 2, 3.$$

Rovnice ty lze zjednodušiti, poněvadž, značí-li ξ jednu ze souřadnic x_ν, y_ν, z_ν, jest

$$V'_\varkappa \sum_1^p{}^{\pi} \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \xi} = \sum_1^p{}^{\pi} \left[\lambda_\pi V'_\varkappa \left(\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \xi} V'_\varkappa \lambda_\pi\right].$$

Koefficienty funkcí λ_π vymizí. Neboť, pokud $\varkappa = 1, 2, 3$, jest

$$V'_\varkappa\left(\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}V_\varkappa\varphi_\pi. \tag{39}$$

Dle § 1. jest totiž výraz $V'_\varkappa f \equiv V_\varkappa f$, je-li $\varkappa = 1, 2, 3$; výraz $V_\varkappa f$ jest ale součtem parcialních derivací funkce f. Proto jest obecně

$$V'_\varkappa\frac{\partial f}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi}V_\varkappa f. \tag{40}$$

Poněvadž pak dle věty prvé jest $V_i\varphi_\pi = 0$, $i = 1, \ldots, 6$, jest dle vzorce (39)

$$V'_\varkappa\left(\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\xi}\right) = 0. \tag{41}$$

Dosadíme-li to do hořejších rovnic, plyne, že

$$\begin{gathered} V'_\varkappa X_\nu + \sum_1^p{}_\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}V'_\varkappa\lambda_\pi = 0, \quad V'_\varkappa Y_\nu + \sum_1^p{}_\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu}V'_\varkappa\lambda_\pi = 0, \\ V'_\varkappa Z_\nu + \sum_1^p{}_\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu}V'_\varkappa\lambda_\pi = 0, \\ \varkappa = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{42}$$

Z druhého sloupce rovnic (38) obdržíme dosazením z rovnic (10) v § 3. zkrátivše m_ν, že

$$V'_4 X_\nu + V'_4\sum_1^p{}_\pi \lambda_\pi\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu} = 0,$$

$$V'_4 Y_\nu + V'_4\sum_1^p{}_\pi \lambda_\pi\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu} + Z_\nu + \sum_1^p{}_\pi \lambda_\pi\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu} = 0,$$

$$V'_4 Z_\nu + V'_4\sum_1^p{}_\pi \lambda_\pi\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu} - Y_\nu - \sum_1^p{}_\pi \lambda_\pi\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu} = 0.$$

Transformujeme-li výrazy v druhém sloupci těchto vzorců stojící, jež označeny v dalším ξ_ν, η_ν, ζ_ν, plyne, že

$$\xi_\nu = \sum_1^p{}_\pi\left[\lambda_\pi V'_4\left(\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}\right) + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}V'_4\lambda_\pi\right],$$

$$\eta_\nu = \sum_1^p{}_\pi\left[\lambda_\pi V'_4\left(\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu}\right) + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu}V'_4\lambda_\pi\right],$$

$$\zeta_\nu = \sum_1^p {}^\pi [\lambda_\pi V'_4 \left(\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu}\right) + \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu} V'_4 \lambda_\pi].$$

Dle § 1. jest výraz

$$V'_4 f \equiv \sum_1^n {}^e \left(\frac{\partial f}{\partial z_e} y_e - z_e \frac{\partial f}{\partial y_e} + \frac{\partial f}{\partial z'_e} y'_e - z'_e \frac{\partial f}{\partial y'_e}\right),$$

$$V_4 f \equiv \sum_1^n {}^e \left(\frac{\partial f}{\partial z_e} y_e - z_e \frac{\partial f}{\partial y_e}\right).$$

Proto jest, pokud funkce f závisí jen na souřadnicích,

$$V'_4 \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \equiv \sum_1^n {}^e \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial z_e} y_e - z_e \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial y_e}\right] = \frac{\partial}{\partial x_\nu} V_4 f,$$

$$(43)\quad V'_4 \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \equiv \sum_1^n {}^e \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y_\nu \partial z_e} y_e - z_e \frac{\partial^2 f}{\partial y_\nu \partial y_e}\right] = \frac{\partial}{\partial y_\nu} V_4 f - \frac{\partial f}{\partial z_\nu},$$

$$V'_4 \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \equiv \sum_1^n {}^e \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial z_e} y_e - z_e \frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial y_e}\right] = \frac{\partial}{\partial z_\nu} V_4 f + \frac{\partial f}{\partial y_\nu}.$$

Dosadíme-li $f \equiv \varphi_\pi$, obdržíme, ježto dle věty prvé $V_4 \varphi_\pi = 0$, že

$$(44)\quad V'_4 \left(\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu}\right) = 0, \qquad V'_4 \left(\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu}\right) = -\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu},$$
$$V'_4 \left(\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu}\right) = \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu}.$$

Vrátíme-li se nyní k rovnicím pro ξ_ν, η_ν, ζ_ν, plyne, že

$$\xi_\nu = \sum_1^p {}^\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu} V'_4 \lambda_\pi,$$

$$\eta_\nu = \sum_1^p {}^\pi \left[\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu} V'_4 \lambda_\pi - \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu}\right],$$

$$\zeta_\nu = \sum_1^p {}^\pi \left[\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu} V'_4 \lambda_\pi + \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu}\right].$$

Substitucí těchto hodnot do původních rovnic nalezneme podmínky

$$V'_4 X_\nu + \sum_1^p {}^\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu} V'_4 \lambda_\pi = 0,$$

$$(45)\quad V'_4 Y_\nu + \sum_1^p {}^\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu} V'_4 \lambda_\pi + Z_\nu = 0,$$

$$V'_4 Z_\nu + \sum_1^p {}^\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu} V'_4 \lambda_\pi - Y_\nu = 0.$$

Obdobné dvě soustavy rovnic plynou z třetího a čtvrtého sloupce rovnic (38). Celkem obdržíme, přibereme-li rovn. (42), $18n$ rovnic, jež představují nutné a dostačující podmínky pro síly a vazby soustav, o nichž platí věta třetí. Podmínky ty jsou

$$
\begin{aligned}
&V'_\varkappa X_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu} V'_\varkappa \lambda_\pi = 0, \quad && V'_4 X_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu} V'_4 \lambda_\pi = 0,\\
&V'_\varkappa Y_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu} V'_\varkappa \lambda_\pi = 0, && V'_4 Y_\nu + Z_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu} V'_4 \lambda_\pi = 0,\\
&V'_\varkappa Z_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu} V'_\varkappa \lambda_\pi = 0, && V'_4 Z_\nu - Y_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu} V'_4 \lambda_\pi = 0,\\
(46) \quad &\varkappa = 1, 2, 3. && \nu = 1, 2, \ldots, n.\\
&V'_5 X_\nu - Z_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu} V'_5 \lambda_\pi = 0, && V'_6 X_\nu + Y_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu} V'_6 \lambda_\pi = 0,\\
&V'_5 Y_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu} V'_5 \lambda_\pi = 0, && V'_6 Y_\nu - X_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu} V'_6 \lambda_\pi = 0,\\
&V'_5 Z_\nu + X_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu} V'_5 \lambda_\pi = 0, && V'_6 Z_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu} V'_6 \lambda_\pi = 0.
\end{aligned}
$$

Rovnice ty spořádány ve čtyři řady po třech rovnicích. Násobíme-li prvou rovnici každé řady δx_ν, druhou δy_ν, třetí δz_ν, kde tyto variace jsou virtualná pošinutí, jež hoví rovnicím

$$(47) \quad \sum_1^n{}^\nu \left[\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right] = 0, \qquad \pi = 1, \ldots, p,$$

obdržíme sečtením přes všechna ν vztahy

$$
\begin{aligned}
&\sum_1^n{}^\nu [\delta x_\nu V'_\varkappa X_\nu + \delta y_\nu V'_\varkappa Y_\nu + \delta z_\nu V'_\varkappa Z_\nu] = 0, \qquad \varkappa = 1, 2, 3.\\
&\sum_1^n{}^\nu [\delta x_\nu V'_4 X_\nu + \delta y_\nu (V'_4 Y_\nu + Z_\nu) + \delta z_\nu (V'_4 Z_\nu - Y_\nu)] = 0,\\
(48) \quad &\\
&\sum_1^n{}^\nu [\delta x_\nu (V'_5 X_\nu - Z_\nu) + \delta y_\nu V'_5 Y_\nu + \delta z_\nu (V'_5 Z_\nu + X_\nu)] = 0,\\
&\sum_1^n{}^\nu [\delta x_\nu (V'_6 X_\nu + Y_\nu) + \delta y_\nu (V'_6 Y_\nu - X_\nu) + \delta z_\nu V'_6 Z_\nu] = 0.
\end{aligned}
$$

Rovnice ty jsou splněny pro každé virtualné pošinutí, platí-li o soustavě věta třetí; lze dokázati též opak. Hoví-li síly pro každé virtualné pošinutí rovnicím (48), platí o soustavě věta třetí, neboť z rovnic těch plynou rovnice (46).

Z první rovnice (48) plyne, že

$$(49)\quad \begin{gathered} V'_\varkappa X_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu}\varrho_{\pi\varkappa} = 0, \quad V'_\varkappa Y_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu}\varrho_{\pi\varkappa} = 0, \\ V'_\varkappa Z_\nu + \sum_1^p{}^\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu}\varrho_{\pi\varkappa} = 0, \\ \varkappa = 1, 2, 3. \end{gathered}$$

Funkce $\varrho_{\pi\varkappa}$ lze vždy ustanoviti, ježto funkce φ_π jsou na sobě nezávislé.

Všimněme si nyní blíže veličin λ_π a $V'_\varkappa\lambda_\pi$. Hodnoty λ_π určeny rovnícemi $\frac{d^2\varphi_h}{dt^2} = 0$, $h = 1, 2, \ldots, p$. Z těchto rovnic plyne, že λ_π určeno soustavou

$$(50)\qquad \sum_1^p{}^\pi \lambda_\pi M_{\pi h} + N_h + Q_h = 0, \qquad h = 1, \ldots, p,$$

kde

$$(51)\quad \begin{aligned} M_{\pi h} &\equiv \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{m_\nu}\left(\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi_h}{\partial y_\nu} + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu}\frac{\partial\varphi_h}{\partial z_\nu}\right), \\ N_h &\equiv \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{m_\nu}\left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu}X_\nu + \frac{\partial\varphi_h}{\partial y_\nu}Y_\nu + \frac{\partial\varphi_h}{\partial z_\nu}Z_\nu\right), \\ Q_h &\equiv \sum_1^n{}^\nu \sum{}^i \left[\frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial x_i}x'_\nu x'_i + 2\frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial y_i}x'_\nu y'_i + 2\frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial z_i}x'_\nu z'_i \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial y_i}y'_\nu y'_i + 2\frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i}y'_\nu z'_i + \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial z_i}z'_\nu z'_i\right]. \end{aligned}$$

Determinant veličin $M_{\pi h}$ nevymizí, poněvadž funkce φ_π jsou na sobě nezávislé. Proto lze veličiny λ_π z rovnic (50) určiti. Dosadíme-li nalezené hodnoty do rovnic (50), jsou ovšem levé strany jejich identicky rovny nulle. Zavedeme-li tyto výrazy za funkci f do symbolu $V'_\varkappa f$, obdržíme zase výrazy identicky nulle rovné. Proto lze rovnice

$$V'_\varkappa\left(\sum_1^p{}^\pi \lambda_\pi M_{\pi h} + N_h + Q_h\right) = 0, \qquad h = 1, \ldots, p$$

použiti k určení veličin $V'_\varkappa\lambda_\pi$.

Transformujeme-li tyto rovnice, plyne

$$(52)\quad \sum_{}^{p}{}^{\pi} [M_{\pi h} V'_{\varkappa} \lambda_{\pi} + \lambda_{\pi} V'_{\varkappa} M_{\pi h}] + V'_{\varkappa} N_h + V'_{\varkappa} Q_h = 0,\ h = 1, \ldots, p.$$

Dle vzorce (40) a (41) jest, pokud $\varkappa = 1, 2, 3$,

$$V'_{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} V'_{\varkappa} f, \qquad V'_{\varkappa}\left(\frac{\partial \varphi_{\pi}}{\partial \xi}\right) = 0, \quad \pi = 1, \ldots, p,$$

kde ξ jest jedna z hodnot x_ν, y_ν, z_ν. Proto jest

$$V'_{\varkappa} M_{\pi h} \equiv \sum_1^n{}^{\nu} \frac{1}{m_\nu} \left[\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu} V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu} V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu} \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu} V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu} + \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu} V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu} V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu} \right] \equiv 0.$$

Z téhož důvodu jest, poněvadž $V'_{\varkappa}$, pokud $\varkappa = 1, 2, 3$, neobsahuje derivace dle x'_ν, y'_ν, z'_ν, veličina

$$V'_{\varkappa} Q_h \equiv \sum_1^n{}^{\nu} \sum_1^n{}^{i} \left[x'_\nu x'_i \frac{\partial}{\partial x_\nu} V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} + 2 x'_\nu y'_i \frac{\partial}{\partial x_\nu} V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_i} + \ldots \right.$$
$$\left. + z'_\nu z'_i \frac{\partial}{\partial z_\nu} V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_i} \right] \equiv 0.$$

Konečně jest

$$V'_{\varkappa} N_h \equiv \sum_1^n{}^{\nu} \frac{1}{m_\nu} \left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} V'_{\varkappa} X_\nu + \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu} V'_{\varkappa} Y_\nu + \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu} V'_{\varkappa} Z_\nu \right.$$
$$\left. + X_\nu V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} + Y_\nu V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu} + Z_\nu V'_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu} \right].$$

Poněvadž druhá část tohoto výrazu vymizí, zbývá

$$V'_{\varkappa} N_h \equiv \sum_1^n{}^{\nu} \frac{1}{m_\nu} \left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} V'_{\varkappa} X_\nu + \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu} V'_{\varkappa} Y_\nu + \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu} V'_{\varkappa} Z_\nu \right].$$

Použijeme-li těchto výsledků, obdrží rovnice (52) tvar

$$(53)\quad \sum_1^p{}^{\pi} M_{\pi h} V'_{\varkappa} \lambda_\pi + \sum_1^n{}^{\nu} \frac{1}{m_\nu} \left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} V'_{\varkappa} X_\nu + \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu} V'_{\varkappa} Y_\nu \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu} V'_{\varkappa} Z_\nu \right] = 0.$$

Veličiny $V'_\varkappa \lambda_\pi$ jsou těmito rovnicemi určeny, poněvadž determinant soustavy nevymizí.

Dle předpokladu jsou rovnice (48) pro každé virtualné pošinutí splněny; následkem toho splněny též rovnice (49). Dosadíme-li z těchto rovnic příslušné hodnoty za tři veličiny $V'_\varkappa$ do výrazu $V'_\varkappa N_h$, obdržíme, že

$$V'_\varkappa N_h \equiv -\sum_1^p{}^\pi \varrho_{\pi\varkappa} \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{m_\nu}\left(\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu}+\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi_h}{\partial y_\nu}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu}\frac{\partial\varphi_h}{\partial z_\nu}\right) = -\sum_1^p{}^\pi \varrho_{\pi h} M_{\pi h}.$$

Zavedeme-li tuto hodnotu do rovnic (53), plyne

$$\sum_1^p{}^\pi M_{\pi h}(V'_\varkappa \lambda_\pi - \varrho_{\pi\varkappa}) = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, p,$$

z čehož, poněvadž determinant veličin $M_{\pi h}$ nevymizí,

$$V'_\varkappa \lambda_\pi \equiv \varrho_{\pi\varkappa}.$$

Následkem toho jsou rovnice (49) identické s první řadou rovnic (46).

Obdobné výsledky obdržíme pro další z rovnic (48). Z druhé rovnice plyne, že lze vždy určiti funkce $\varrho_{\pi 4}$ tak, že splněny jsou rovnice

$$
\begin{aligned}
&V'_4 X_\nu + \sum_1^p{}^\pi \varrho_{\pi 4}\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu} = 0,\\
(54)\qquad &V'_4 Y_\nu + Z_\nu + \sum_1^p{}^\pi \varrho_{\pi 4}\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu} = 0,\\
&V'_4 Z_\nu - Y_\nu + \sum_1^p{}^\pi \varrho_{\pi 4}\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu} = 0.
\end{aligned}
$$

Jde opět o to, dokázati, že tyto rovnice jsou identické s druhou řadou rovnic (46). K tomu třeba odvoditi, že

$$\varrho_{\pi 4} \equiv V'_4 \lambda_\pi .$$

Veličiny $V'_4 \lambda_\pi$ jsou ze stejných důvodů jako dříve $V'_\varkappa \lambda_\pi$, $\varkappa = 1, 2, 3$, určeny rovnicemi

$$V'_4 \left(\sum_1^p{}^\pi \lambda_\pi M_{\pi h} + N_h + Q_h\right) = 0, \qquad h = 1, \ldots, p,$$

kde $M_{\pi h}$, N_h, Q_h jsou opět veličiny dané vzorci (51).

Transformujeme-li tyto rovnice, plyne

$$(55)\ \sum_1^p \pi\left[M_{\pi h}V'_4\lambda_\pi + \lambda_\pi V'_4 M_{\pi h}\right] + V'_4 N_h + V'_4 Q_h = 0,\ h = 1, \ldots, p.$$

Použijeme-li vzorců (43) a (44), obdržíme, že

$$V'_4 M_{\pi h} = \sum_1^n \nu \frac{1}{m_\nu}\left[\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu} V'_4 \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu} V'_4 \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu} + \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu} V'_4 \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_\nu} V'_4 \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu} V'_4 \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu} V'_4 \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu}\right]$$
$$= \sum_1^n \nu \frac{1}{m_\nu}\left[-\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu}\frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu} + \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu}\frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_\nu}\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_\nu}\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu}\right] \equiv 0.$$

Poněvadž výraz

$$V'_4 f \equiv \sum_1^n e \left(\frac{\partial f}{\partial z_e} y_e - z_e \frac{\partial f}{\partial y_e} + \frac{\partial f}{\partial z'_e} y'_e - z'_e \frac{\partial f}{\partial y'_e}\right),$$

jest

$$V'_4 Q_h = \sum_1^n \nu \sum i \left[x'_\nu x'_i V'_4 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_\nu \partial x_i} + 2x'_\nu y'_i V'_4 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_\nu \partial y_i} + 2x'_\nu z'_i V'_4 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_\nu \partial z_i}\right.$$
$$\left. + y'_\nu y'_i V'_4 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y_\nu \partial y_i} + 2y'_\nu z'_i V'_4 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i} + z'_\nu z'_i V'_4 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial z_\nu \partial z_i}\right] + P,$$

kde

$$P \equiv \sum_1^n \nu \sum i \left[-2x'_\nu z'_i \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_\nu \partial y_i} + 2x'_\nu y'_i \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_\nu \partial z_i} - (y'_\nu z'_i + z'_\nu y'_i)\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y_\nu \partial y_i}\right.$$
$$\left. + 2(y'_\nu y'_i - z'_\nu z'_i)\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i} + (y'_\nu z'_i + z'_\nu y'_i)\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial z_\nu \partial z_i}\right].$$

Poněvadž v každém členu výrazu P lze index ν zaměniti s indexem i, lze výraz ten transformovati na tvar

$$P \equiv \sum_1^n \nu \sum i \left[-2x'_\nu z'_i \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_\nu \partial y_i} + 2x'_\nu y'_i \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_\nu \partial z_i} + 2y'_\nu z'_i \left(\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial z_\nu \partial z_i} - \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y_\nu \partial y_i}\right)\right.$$
$$(56)\qquad \left. + 2y'_\nu y'_i \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i} - 2z'_\nu z'_i \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i}\right].$$

Též výraz $V'_4 Q_h$ — P lze transformovati pomocí vzorců (43) a (44). Neboť

$$V'_4 \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} V'_4 \frac{\partial\varphi_h}{\partial x_i} = 0, \quad V'_4 \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} V'_4 \frac{\partial\varphi_h}{\partial y_i} = -\frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial z_i}.$$

Obdobnými transformacemi obdržíme, že

$$V'_4 \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial z_i} = \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial y_i}, \qquad V'_4 \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial y_i} = -\left(\frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i} + \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial y_i}\right),$$

$$V'_4 \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i} = \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial y_i} - \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial z_i}, \qquad V'_4 \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial z_i} = \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial y_i} + \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do výrazu, o jehož zjednodušení jde, plyne

$$V'_4 Q_h - P \equiv \sum_1^n{}^\nu \Sigma i \left[-2x'_\nu y'_i \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial z_i} + 2x'_\nu z'_i \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_\nu \partial y_i} \right.$$
$$- y'_\nu y'_i \left(\frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i} + \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial y_i}\right) + 2y'_\nu z'_i \left(\frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial y_i} - \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial z_i}\right)$$
$$\left. + z'_\nu z'_i \left(\frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial y_i} + \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i}\right)\right].$$

Zavedeme-li sem veličinu P danou vzorcem (56), obdržíme, sloučivše

$$V'_4 Q_h \equiv \sum_1^n{}^\nu \Sigma i \left(y'_\nu y'_i \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i} - z'_\nu z'_i \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial y_\nu \partial z_i}\right)$$
$$+ \sum_1^n{}^\nu \Sigma i \left(z'_\nu z'_i \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial y_i} - y'_\nu y'_i \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial z_\nu \partial y_i}\right).$$

Zaměníme-li v druhém součtu indexy, vidíme, že

$$V'_4 Q_h \equiv 0.$$

Vyvineme-li ještě výraz $V'_4 N_h$, obdržíme

$$V'_4 N_h = \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{m_\nu} \left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu} V'_4 X_\nu + \frac{\partial\varphi_h}{\partial y_\nu} V'_4 Y_\nu + \frac{\partial\varphi_h}{\partial z_\nu} V'_4 Z_\nu \right.$$
$$\left. + X_\nu V'_4 \frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu} + Y_\nu V'_4 \frac{\partial\varphi_h}{\partial y_\nu} + Z_\nu V'_4 \frac{\partial\varphi_h}{\partial z_\nu}\right).$$

Zjednodušíme-li druhou část tohoto součtu pomocí vzorců (44), plyne, že

$$V'_4 N_h \equiv \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{m_\nu} \left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu} V'_4 X_\nu + \frac{\partial\varphi_h}{\partial y_\nu}(V'_4 Y_\nu + Z_\nu) + \frac{\partial\varphi_h}{\partial z_\nu}(V'_4 Z_\nu - Y_\nu)\right].$$

Vrátíme-li se nyní k rovnicím (55), jsou veličiny $V'_4\lambda_\pi$, ježto

$$V'_4 M_{\pi h} \equiv 0, \qquad V'_4 Q_h \equiv 0,$$

dány soustavou

$$(57) \quad \sum_1^h{}^\pi M_{\pi h} V'_4 \lambda_\pi + \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{m_\nu}\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu} V'_4 X_\nu + \frac{\partial\varphi_h}{\partial y_\nu}(V'_4 Y_\nu + Z_\nu) + \frac{\partial\varphi_h}{\partial z_\nu}(V'_4 Z_\nu - Y_\nu)\right] = 0, \qquad h = 1, \ldots, p.$$

Poněvadž rovnice (48) splněny pro každé virtualné pošinutí, hoví síly zevní též rovnicím (54). Dosadíme-li z těchto rovnic za hodnoty na složkách sil závislé do výrazu $V'_4 N_h$, obdržíme, že

$$V'_4 N_h = -\sum_1^p{}^\pi \varrho_{\pi 4} \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{m_\nu}\left(\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi_h}{\partial y_\nu} + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu}\frac{\partial\varphi_h}{\partial z_\nu}\right)$$
$$= -\sum_1^p{}^\pi \varrho_{\pi 4} M_{\pi h}.$$

Zavedeme-li tuto hodnotu do rovnice (57), plyne

$$\sum_1^p{}^\pi M_{\pi h}(V'_4\lambda_\pi - \varrho_{\pi 4}) = 0, \qquad h = 1, \ldots, p,$$

z čehož, poněvadž determinant veličin $M_{\pi h}$ nevymizí,

$$V'_4 \lambda_\pi \equiv \varrho_{\pi 4}.$$

Následkem toho jsou rovnice (54) totožné s druhou řadou rovnic (46).

Obdobné výsledky platí pro poslední dvě z rovnic (48). Proto hoví síly rovnicím (46), jsou-li pro všechna virtualná pošinutí splněny rovnice (48). Rovnice ty představují proto nutné a dostačující podmínky pro síly a vazby soustav, o nichž platí věta třetí.

Jako z d'Alembertova principu lze odvoditi větu o kinetické energii, neobsahují-li vazby čas, lze i z rovnic (48) odvoditi větu o práci.

Poněvadž dle věty prvé vazby úplných soustav nezávisí na čase, lze v rovnicích (48) nahraditi variace differencialy a ty rychlostmi x'_ν, y'_ν, z'_ν. Rychlosti třeba ovšem zvoliti tak, aby se srovnávaly s vazbami. Třeba tedy, aby

$$\sum_1^n {}^{\nu}\left[\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}x'_\nu+\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu}y'_\nu+\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu}z'_\nu\right]=0,\qquad \pi=1,\ldots,p.$$

Rovnice (48) lze pak převésti na velmi jednoduchý tvar, vezmeme-li ohled na to, že při tvoření výrazů $V'_i f$ jest x'_ν, y'_ν, z'_ν pouhou proměnnou, ne derivací.

Pišme tedy v rovnicích (48) x'_ν, y'_ν, z'_ν místo δx_ν, δy_ν, δz_ν. Poněvadž dle § 1.

$$V'_1 f=\sum_1^n {}^{\varrho}\frac{\partial f}{\partial x_\varrho},\qquad V'_2 f=\sum_1^n {}^{\varrho}\frac{\partial f}{\partial y_\varrho},\qquad V'_3 f=\sum_1^n {}^{\varrho}\frac{\partial f}{\partial z_\varrho},$$

lze prvou z rovnic (48) transformovati na tvar

$$\sum_1^n {}^{\nu}[V'_\varkappa x'_\nu X_\nu+V'_\varkappa y'_\nu Y_\nu+V'_\varkappa z'_\nu Z_\nu]=0,\qquad \varkappa=1,\ 2,\ 3,$$

z čehož

$$V'_\varkappa\sum_1^n {}^{\nu}[x'_\nu X_\nu+y'_\nu Y_\nu+z'_\nu Z_\nu]=0,\qquad \varkappa=1,\ 2,\ 3.$$

Též ostatní tři z rovnic (48) lze na tento velice jednoduchý tvar převésti. Proveďme výpočet pro poslední z rovnic (48), jež zní, zaměníme-li variace rychlostmi,

$$\sum_1^n {}^{\nu}[x'_\nu(V'_6X_\nu+Y_\nu)+y'_\nu(V'_6Y_\nu-X_\nu)+z'_\nu V'_6Z_\nu]=0,$$

kde

$$V'_6 f=\sum_1^n {}^{\varrho}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\varrho}x_\varrho-y_\varrho\frac{\partial f}{\partial x_\varrho}+\frac{\partial f}{\partial y'_\varrho}x'_\varrho-y'_\varrho\frac{\partial f}{\partial x'_\varrho}\right).$$

Tuto rovnici lze zjednodušiti, neboť

$$\begin{aligned} x'_\nu V'_6X_\nu-y'_\nu X_\nu&=V'_6x'_\nu X_\nu,\\ y'_\nu V'_6Y_\nu+x'_\nu Y_\nu&=V'_6y'_\nu Y_\nu,\\ z'_\nu V'_6Z_\nu&=V'_6z'_\nu Z_\nu.\end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do původní rovnice, obdržíme, použivše dvakráte vlastnosti výrazu V'_6, jež vyjádřena rovnicí $\Sigma V'_6=V'_6\Sigma$, že

$$V'_6\sum_1^n {}^{\nu}(x'_\nu X_\nu+y'_\nu Y_\nu+z'_\nu Z_\nu)=0.$$

Obdobně lze transformovati zbývající dvě z rovnic (48). Celkem plyne z těchto rovnic, že

$$(58) \qquad V_i' \sum_1^n {}^{\nu} (x_\nu' X_\nu + y_\nu' Y_\nu + z_\nu' Z_\nu) = 0, \qquad i = 1, \ldots, 6$$

pro každou soustavu hodnot x_ν', y_ν', z_ν', jež se srovnává s vazbami. Co zde uvedeno, zůstane v platnosti i když síly zevní závisí též na rychlostech.

Rovnice (58) mají jednoduchý názorný význam. Funkce

$$f = \sum_1^n {}^{\nu} (x_\nu' X_\nu + y_\nu' Y_\nu + z_\nu' Z_\nu)$$

závisí na všech souřadnicích stavu r, jenž určen proměnnými x, y, z, x', y', z'. Přejde-li stav r rozšířenou skupinou S′ do stavu $\bar{r}$, jenž má souřadnice $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$, je-li, tedy $\bar{r} = r\mathrm{S}'$, přejde funkce f ve funkci

$$\bar{f} \equiv \sum_1^n {}^{\nu} (\bar{x}' \bar{X}_\nu + \bar{y}' \bar{Y}_\nu + \bar{z}' \bar{Z}_\nu);$$

$\bar{X}_\nu$, $\bar{Y}_\nu$, $\bar{Z}_\nu$ jsou výrazy, v něž síly přejdou, dosadíme-li místo x_ν, y_ν, z_ν proměnné $\bar{x}_\nu$, $\bar{y}_\nu$, $\bar{z}_\nu$.

Dle Lie-ových vět lze funkci $\bar{f}$ vyjádřiti funkcí f pomocí řady

$$\bar{f} = f + \sum_1^6 {}^{i} e_i V_i' f + \sum_1^6 {}^{i} \sum {}^{\varkappa} e_i e_\varkappa V_\varkappa' (V_i f) + \ldots$$

Stálé e_i jsou parametry skupiny S′, V_i' jsou infinitesimalní transformace této skupiny. Dle vzorců (58) jest $V_i' f \equiv 0$ pro každé x_ν', y_ν', z_ν', jež se srovnává s vazbami. Následkem toho vymizí ve výrazu $\bar{f}$ členové v e_i linearní. Pak vypadnou ale též další členové, neboť

$$V_\varkappa' (V_i' f) \equiv V_\varkappa' (0) \equiv 0 \text{ a t. d.}$$

Pro každé x_ν', y_ν', z_ν', jež se s vazbami srovnává, jest proto $\bar{f} = f$, je-li $\bar{r} = r\mathrm{S}'$.

Považujme nyní $\bar{r}$ za stav soustavy, která jest shodná se soustavou, jejíž stav jest r. Předpokládejme dále, že též pohyb obou soustav jest shodný. Pak jest v každé době t stav $\bar{r} = r\mathrm{S}'$. Poněvadž dle předchozího

$$dt \sum_1^n{}^{\nu} [\bar{x}'_\nu \bar{\mathrm{X}}_\nu + \bar{y}'_\nu \bar{\mathrm{Y}}_\nu + \bar{z}'_\nu \bar{\mathrm{Z}}_\nu] = dt \sum_1^n{}^{\nu} [x'_\nu \mathrm{X}_\nu + y'_\nu \mathrm{Y}_\nu + z'_\nu \mathrm{Z}_\nu],$$

je-li

$$\bar{r} = r\mathrm{S}',$$

jest při shodném pohybu obou soustav též

$$\int_0^t dt \sum_1^n{}^{\nu} [\bar{x}'_\nu \bar{\mathrm{X}}_\nu + \bar{y}'_\nu \bar{\mathrm{Y}}_\nu + \bar{z}'_\nu \bar{\mathrm{Z}}_\nu] = \int_0^t dt \sum_1^n{}^{\nu} [x'_\nu \mathrm{X}_\nu + y'_\nu \mathrm{Y}_\nu + z'_\nu \mathrm{Z}_\nu].$$

Pravá strana této rovnice představuje práci, kterou síly původní soustavy během doby t vykonávají. Levá strana udává práci, kterou shodná soustava při shodném pohybu během téže doby t vykoná. Rovnice ta praví pak, že práce shodnou soustavou při shodném pohybu vykonaná, rovná se práci původní soustavou v téže době vykonané. Tato samozřejmá věta jest důsledkem vzorců (58).

(Dokončení.)

Rapports présentés au Congrés International de Physique

réuni à Paris en 1900 sous les auspices de la Société Française de Physique, ressemblés et publiés par *Ch. Éd. Guilaume* et *L. Poincaré.*

Referuje

Dr. **Vladimír Novák,**
docent české university v Praze.

(Pokračování.)

Pro intensitu i' záření v prostředí, jehož index lomu jest n platí zákon Clausiův