Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda

O některých plochách polárných plochy posouvání kruho-kruhové. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 1, 1--12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121044

O některých plochách polárných plochy posouvání kruho-kruhové.

Napsal **Ant. Sucharda.**

Výtvarný zákon plochy posouvání kruho-kruhové, již zavedl do přednášek svých o organické geometrii formy prof. F. Tilšer, poznati lze z následujícího:

Hranu kruhovou B poloměru r, svisle umístěnou, přiložme ku hraně kruhové A poloměru R, vodorovně položené, tak aby v jedné částici $a_B \equiv a_A$ se stýkaly a střed hrany B aby byl v rovině hranou A určené. Přemísťujme pak hranu B nepřetržitě tak, aby částice a_B neustávala stýkati se s hranou A, ovšem postupně v částicích po sobě následujících; střed hrany hybné zůstávej v rovině hrany A a roviny hranou hybnou určené v polohách její soumezných buďte spolu stejnosměrny. Tu zajisté všechny částice hrany hybné vytvoří dráhy vespolek shodné. Jsouť to dráhy shodné s drahou částice a_B, tudíž dráhy kruhové poloměru R. Touž dráhu proběhne dojista i střed s hrany hybné v rovině hranou A určené.

2. Prohlédajíce k vlastnímu cíli tohoto pojednání, jemuž má zachován býti ráz čistě analytický, odvoďme si pomocí uvedeného v odst. 1. zákona výtvarného rovnici této plochy posouvání a pak některé její vlastnosti, jichž v dalších úvahách užiti se nám vidí.

V rovině $\overline{XY}$ soustavy souřadné pravoúhlé mysleme si křivku kruhovou A_s poloměru R, se středem v počátku soustavy.

Rovnice zmíněné křivky jsou:

$$x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0. \qquad (1)$$

Prohlédajíce k tomu, co o pohybu hrany B z počátku bylo řečeno, mysleme si dále libovolnou křivku kruhovou poloměru r*) v rovině osnovy $\overline{XZ}$, jejíž střed ve křivce A_s rovnicí 1. naznačené. Rovnice její, jsou-li souřadnice jejího středu α, β, γ, bude:

$$(x - \alpha)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2,\ y = \beta. \qquad (2)$$

*) Pokud by nic zvláštního se nevytklo, v tomto pojednání stále předpokládati budeme $R > r \ldots . 0$.

Z příčin, ze zákona výtvarného vycházejících, nazývá se první křivka kruhová *křivkou řídící*, druhá *křivkou tvořící*. Jelikož souřadnice α, β nutně vyhovují rovnici (1), lze psáti

$$\alpha^2 = R^2 - \beta^2,$$

kterážto hodnota za α^2 do rovnice 2. jsouc vložena, dává

$$z^2 + (x \mp \sqrt{R^2 - y^2})^2 - r^2 = 0 \qquad (3)$$

jakožto rovnici uvažované plochy posouvání kruho-kruhové.

Plocha tato má v rovinách osnovy $\overline{XY}$ soustavu křivek kruhových poloměru R, tedy shodných s křivkou řídící, v rovinách osnovy $\overline{XZ}$ soustavu křivek kruhových poloměru r, tedy shodných s křivkou tvořící. *) O tom z rovnice 3. hned se přesvědčíme, zavedeme-li tam nejprve za z, podruhé za y, libovolnou constantu.

Plocha uvažovaná jest stupně čtvrtého. I nebude nesnadno, z rovnice 3. poznati, že středem její počátek soustavy a že roviny souřadné $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$ má za roviny souměrnosti orthogonálné.

Vyšetřme křivku, ve které proniká rovinu $\overline{YZ}$.

Zavedeme-li k tomu cíli do rovnice (3).

$$x = 0,$$

obdržíme:

$$y^2 - z^2 - R^2 + r^2 = 0 \qquad (4)$$

což znamená hyperbolu stejnoramennou, jež s plochou uvažovanou jest soustředná.

Přihlédněme k tomu, že v každé rovině osnovy $\overline{XZ}$ jsou dvě křivky kruhové naší plochy. (To snadně dalo by se počtem odvoditi, však prostě plyne ze zákona její výtvarného — máť As v rovině této obecně dva různé body, středy těchto křivek.) Tyto křivky pronikají se ve dvou bodech roviny $\overline{YZ}$, bodech to dojista tedy *dvojných* plochy posouvání.

Hyperbola 4. jest patrně místem těchto bodů, jsouc jedinou v $\overline{YZ}$ obsaženou křivkou plochy uvažované; *i jest to plochy kruho-kruhové křivka dvojnásobná.*

V rovinách osnovy $\overline{XZ}$, od této roviny o $\pm R$ vzdálených, křivky kruhové příslušné dotýkají se křivky As v koncích průměru, v ose $\overline{Y}$ obsaženého. Příslušné dvě tu křivky kruhové

---

*) Vlastnost tuto, jakož i jiné ještě prof. Tilšer v kynetické části své morphognosie spůsobem velezajímavým ukazuje.

v jedinou splývají. Výsledek tento, ze zákona výtvarného plynoucí, dotvrdí se počtem, vložíme-li do rovnice (3)

$$y = \pm R.$$

Obdržíme pak v obou případech:

$$z^2 + x^2 = r^2,$$

což jest rovnice jediné křivky kruhové.

Kruhové křivky soustavy druhé vesměs *těchto křivek* se dotýkají. Z toho jde, že rovina tečná, příslušná libovolnému bodu jedné z těch křivek, jest rovinou tečnou i všech bodů ostatních, s rovinou $y = \pm R$ křivky kruhové splývajíc.

Křivky ty jsou rozhraním bodů elliptických a hyperbolických plochy kruho-kruhové a náležejí tedy ku *křivce parabolických bodů* plochy posouvání.*)

Hyperbola dvojná proniká je ve čtyrech bodech $x = 0$, $y = \pm R$, $z = \pm r$, které, náležejíce křivce dvojné, zároveň pak majíce vlastnosti bodů parabolických, jsou *body kuspidálnými*. Jsou to body dvojné, jimž příslušná plocha kuželová inflekční degeneruje v rovinu. Zovou se proto též uniplanárními.**)

Vložíce do rovnice (3)

$$z = \pm r,$$

obdržíme

$$y^2 + z^2 = R^2,$$

z čehož poznáváme, že i v rovinách, od $\overline{XY}$ o $\pm r$ vzdálených, plocha kruho-kruhová má po křivce kruhové. Na místě *dvou* křivek kruhových, jež vyskytují se v rovinách osnovy $\overline{XY}$, tu vždy jest po křivce *jediné*. Snadně lze poznati, že roviny křivek těchto ve všech jejich bodech jsou tečnými rovinami plochy uvažované, a že křivky samy, jsouce rozhraním bodů elliptických a hyperbolických ve ploše, náležejí zase ku křivkám *parabolických bodů.*

Podle úvah těchto a předcházejících *má plocha uvažovaná v každé soustavě křivek kruhových dvě, jež náležejí křivce bodů parabolických.* Čtyři tyto křivky representují patrně křivku

*) Srovnej Cremona-Curtze: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen, pag. 64. odst. 68.

**) Tamže, pag. 18. odst. 17.

stupně osmého. Dvě a dvě, různým soustavám náležité, pronikají se vždy v jednom z kuspidálných bodů.

Pro úplnosť buď ještě zmíněno, že v rovině $\overline{XY}$ a $\overline{XZ}$ má plocha po dvou křivkách kruhových příslušné soustavy. Středy jejich vzdáleny jsou od sebe o průměr, křivce druhé soustavy příslušný.

Obdržíme rovnice jejich, položíce do (3) poprvé $z = o$, podruhé $y = o$.

V prvém případu shledáme

$$(x^2 \mp \sqrt{R^2 - y^2})^2 = r^2,$$

v druhém pak

$$z^2 + (x^2 \mp R)^2 = r^2.$$

Dosud jsme předpokládali, že poloměry R a r jsou různy. Přihlédněme nyní ještě ku případu poloměrů stejných. Jestliže

$$R = r,$$

pak rovnice (4) křivky dvojné nabude tvaru:

$$y^2 - z^2 = 0. \qquad (5)$$

Tudíž:

Hyperbola dvojná degeneruje ve dvě dvojné přímky, jež, obsahujíce počátek soustavy, úhly os $\overline{Y}$ a $\overline{Z}$ rozpolují.

Ostatní výsledky, kterých prve bylo zmíněno, jen tím se pozmění, že na místě R všude objeví se r.

3. Pojednáme nyní blíže o prvních a druhých plochách polárných plochy posouvání kruho-kruhové, jejíž rovnici (3) jsme byli odvodili při známé jednoduché souvislosti objektivné (srov. odst. 2.). Polárných rovin zúplna opomeneme.

Užívajíce methody Salmonovy*) transformujme především rovnici (3) na pol jakožto počátek soustavy.

Buďtež souřadnice jeho m, n, p.

Rovnici obdrženou zavedením nové proměnné učiníme homogenní a differencujeme jednou, dvakráte, třikráte.

Zavedeme-li do každého výsledku differenciace za proměnnou hodnotu 1, obdržíme rovnici prvé, druhé, třetí plochy

*) Srovnej Salmon-Fiedler: Analytische Geometrie des Raumes. II. Afl. II. Theil, pag. 19.

polárné pro soustavu pravoúhlou novou, s původní stejnosměrnou, kdež pol jest počátkem.

Takto obdrženou rovnici *první plochy polárné* uveďme na střed plochy kruho-kruhové jakožto počátek soustavy, i obdržíme:

$$x^3m + y^3n + z^3p + xy^2m + x^2yn + xz^2m + x^2zp - yz^2n - y^2zp - x^2(R^2+r^2) - y^2(R^2-r^2) + z^2(R^2-r^2) - xm(R^2+r^2) - yn(R^2-r^2) + zp(R^2-r^2) + (R^2-r^2)^2 = 0. \quad (6)$$

Pro $m = n = p = o$ zní rovnice tato:

$$\frac{x^2(R^2+r^2)}{(R^2-r^2)^2} + \frac{y^2}{R^2-r^2} - \frac{z^2}{R^2-r^2} = 1,$$

z čehož jde: *První plocha polárná středu plochy kruho-kruhové jakožto polu jest hyperboloid jednodílný s ní soustředný.* *)

Vraťme se k rovnici (6).

Jelikož první plochy polárné obsahují dvojnou křivku plochy původní (jako jednoduchou) má naše plocha polárná v rovině $\overline{YZ}$ přímku. O tom se přesvědčíme, vložíce v rovnici (6) $x = 0$, a dělíce mnohočlen rovnicový levou stranou rovnice (4).

Výsledek obdržený, s nulou srovnán, zní:

$$yn - zp - R^2 + r^2 = 0$$

a znamená onu přímku.

Položíme-li v rovnici (6) $m = o$, $n = o$, obdržíme:

$$z^3p + x^2zp - y^2zp - x^2(R^2+r^2) - y^2(R^2-r^2) + z^2(R^2-r^2) + zp(R^2-r^2) + (R^2-r^2)^2 = 0.$$

Toť rovnice první plochy polárné pro pol v ose $\overline{Z}$.

Pronik její s rovinou $z = a$ jest křivka stupně druhého:

$$x^2(ap - R^2 - r^2) + y^2(-ap - R^2 + r^2) + (ap + R^2 - r^2).(a^2 + R^2 - r^2) = 0. \quad (7)$$

Obdobně-li vyšetříme rovnici první plochy polárné pro pol v ose $\overline{Y}$ a v ose $\overline{X}$, potom proniky ploch těchto pořadem s rovinami $y = a$, $x = a$, shledáme:

První plochy polárné polů, obsažených v osách $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, pronikají se rovinami k těmto normálnými v křivkách stupně druhého.

---

*) Pro $R = r$ na místě hyperboloidu obdržíme dvojnou rovinu.

Přihlédněme, které zvláštní křivky v těchto osnovách se vyskytují. Abychom poznali, jsou-li tu křivky kruhové, povšímněme si rovnice (7).

Srovnáním součinitelů prvních dvou členů vychází:

$$a = \frac{r^2}{p}$$

Z toho jde: *Každá z prvních ploch polárných, jichž poly jsou v ose* $\overline{Z}$, *má v rovině* $zp = r^2$ *křivku kruhovou.*

Taktéž vyskytují se tu křivky stupně druhého, složené ze dvou přímek. Abychom je poznali, utvořme ze součinitelů rovnice (7) známý diskriminant podmínečný, který vyčíslen a na nulu uveden zní:

$$(ap - R^2 - r^2)(ap + R^2 - r^2)^2 (a^2 + R^2 - r^2) = 0.$$

Uvážíce, že $p > o$, $R > r$, shledáváme tyto tři podmínky:

$$1.\ \ ap - R^2 - r^2 = 0, \qquad 2.\ \ ap + R^2 - r^2 = 0,$$

$$3.\ \ a^2 + R^2 - r^2 = 0.$$

Dosadíce za a z podmínky 1. do rovnice (7), obdržíme:

$$y^2 p = (R^2 + r^2)^2 + (R^2 - r^2) p^2$$

Dosadíce za a z podmínky 2. do rovnice (7), nabudeme:

$$x^2 = 0.$$

Přímka tato jen v rovině osnovy $\overline{XY}$ jest dvojnásobnou; v rovině $\overline{YZ}$, kdež mimo ni hyperbola (4) jest přímkou jednoduchou.

Podmínka 3. konečně vede nás k rovinám, jichž vzdálenosť od $\overline{XZ}$ jest imaginárná; i nebudeme se jimi zabývati.

Z uvedeného jde: *Každá z prvních ploch polárných, jichž poly jsou v positivní části osy* $\overline{Z}$, *má v rovině* $zp = R^2 + r^2$ *po dvou přímkách realných, s osou* $\overline{X}$ *stejnosměrných a od* $\overline{Z}$ *stejně vzdálených, v rovině* $zp = -R^2 + r^2$ *pak jedinou přímku, jež jest hranou (arête) plochy.*

Podobně lze nalézti:

Každá první plocha polárná polů positivní části osy $\overline{Y}$ *má v rovině* $yn = R^2$ *křivku kruhovou.*

Co pak se přímek týče, shledáváme tyto tři podmínky:

$$1.\ an - R^2 - r^2 = 0, \qquad 2.\ an - R^2 + r^2 = 0,$$

$$3\ .\ a^2 - R^2 + r^2 = 0.$$

Dosadíce za a z 1. podmínky do rovnice příslušné, shledáváme:

$$n^2 z^2 = (R^2 + r^2)^2 - n^2 (R^2 - r^2).$$

Tyto dvě přímky jsou realny, pokud $n < \frac{R^2 + r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}$.

Dosadíce z podmínky 2., nabudeme $x^2 = 0$.

Dosadíce konečně z 3., jež pro a poskytuje dvě hodnoty, obdržíme dvě rovnice, které se liší znaménkem na pravé straně:

$$x^2 [n\sqrt{R^2 - r^2} - (R^2 + r^2)] = z^2 [n\sqrt{R^2 - r^2} \mp (R^2 - r^2)].$$

Přímky, příslušné hornímu znamení, budou realné vždy, když bude $n\sqrt{R^2 - r^2} > R^2 + r^2$, a vždy, když bude $n\sqrt{R^2 - r^2} < R^2 - r^2$. (V ostatních případech imaginárné.)

Přímky, příslušné dolnímu znamení, budou jen tehdy realné, když bude $n\sqrt{R^2 - r^2} > R^2 + r^2$. *)

Tedy: *Každá první plocha polárná polů positivní části osy* $\overline{Y}$ *má v rovině* $yn = R^2 + r^2$ *dvě přímky s* X *stejnosměrné, od* $\overline{Y}$ *stejně vzdálené.* (Kdy jsou realné bylo ukázáno.) *V rovině* $yn = R^2 - r^2$ *má jedinou přímku, jež* $\overline{Y}$ *pronikajíc, se* $\overline{Z}$ *jest stejnosměrná. Je to hrana (arête) plochy.*

V rovinách $y = \pm \sqrt{R^2 - r^2}$ *po dvou přímkách osu* $\overline{Y}$ *pronikajících a potud realných, pokud jest* $n > \frac{R^2 + r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}$; *v rovině* $y = -\sqrt{R^2 - r^2}$ nadto i tehdy, kdy $n < \sqrt{R^2 - r^2}$.

Taktéž shledáme dále:

Každá první plocha polárná polů positivní části osy $\overline{X}$ *má v rovině* $xm = R^2 - r^2$ *po dvou přímkách realných, s* $\overline{Y}$ *stejnosměrných a od* $\overline{X}$ *stejně vzdálených.**)*

V rovině $xm = -R^2 + r^2$ *má po dvou přímkách se* $\overline{Z}$ *stejnosměrných a od* $\overline{X}$ *stejně vzdálených.***) Tyto jsou realny, pokud* $m^2 > \frac{R^2 (R^2 r^2)}{R^2 + r^2}$. *Konečně ještě pro tři hodnoty* x, *plynoucí z rovnice* $x^3 m - x^2 (R^2 + r^2) - x m (R^2 + r^2) + R^4 - r^4 = 0$ *též po dvou přímkách.*

---

*) V případech přechodných obdrží se přímky $z^2 = 0$, $x^2 = 0$.

**) $z^2 m^2 = r^2 (R^2 - r^2) + r^2 m^2$.

***) $y^2 = m^2 (R^2 + r^2) - R^2 (R^2 - r^2)$.

Křivek kruhových v rovinách osnovy $\overline{YZ}$ *není.*

4. Vyšetření některých dalších přímek ploch těchto v případě obecném pomíjejíce pro omezenosť místa, proveďme pro případ, že $R = r$.

Rovnice první plochy polárné pro pol v ose $\overline{Y}$ pak zní:

$$y^3 n + x^2 y n - y z^2 n - 2 x^2 r^2 = 0. \qquad (8)$$

Jelikož dvojná hyperbola, již plocha ta obsahuje, rozpadá ve dvě přímky (viz rovn. 5.), má plocha tato v rovině $\overline{YZ}$ tři přímky. Vložíce $x = 0$ do rovnice (8) obdržíme jejich rovnice:

$$y = 0, \; y + z = 0, \; y - z = 0.$$

Označme je pořadem $\overline{Z}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Sestrojíce rovnici roviny osnovu každé z těch přímek, pak rovnici křivky stupně druhého, ve které plochu polárnou ještě proniká, konečně pak vyvinouce podmínku, za které křivka tato degeneruje ve dvě přímky, poznáme přímky další, jež s $\overline{Z}$, $\overline{A}$ a $\overline{B}$ se pronikají.*)

Shledáme takto: V rovinách osnovu**) osy $\overline{Z}$ není mimo přímky $\overline{A}$ a $\overline{B}$ žádných jiných. V rovinách osnovů osy $\overline{A}$ a osy $\overline{B}$ po jedné přímce $\overline{U}$ a $\overline{V}$, jichž společná rovnice jest $yn = 2r^2$. Přímky ty, s $\overline{X}$ stejnosměrné a od $\overline{Y}$ stejně vzdálené, pronikají jedna přímku $\overline{A}$, druhá přímku $\overline{B}$. Zde spolu poznáme, že přímky $\overline{A}$ a $\overline{B}$, každá v rovině s $\overline{X}$ stejnosměrné, jsou přímkami dvojnými, tudíž hranami plochy polárné.

Že plocha tato má v rovinách osnovy $\overline{XZ}$ křivky stupně druhého, vychází již z věty dříve uvedené. Křivky ty degenerují ve dvě přímky:

1. pro $y = 0$, rovnice přímek těch jest $x^2 = 0$. Ta ukazuje, že známá již přímka $\overline{Z}$ jest hranou plochy;

2. pro $y = \frac{2 r^2}{n}$, kdež obdrží se známé přímky $\overline{U}$ a $\overline{V}$. —

Budiž o této ploše polárné, jež patrně má ještě přímku smíru rovin osnovy $\overline{XZ}$, též zmíněno, že v rovinách osnovy

---

*) Bližší vyšetření viz v mém pojednání ve výroční zprávě c. k. vyš. realného gymnasia Táborského, 1882.

**) „Svazku“ Srovnej F. Tilšer, přednášky o organické geometrii formy.

$\overline{XZ}$ má racionálné křivky stupně třetího. Křivka, příslušná rovině $zn = \pm 2r^2$ skládá se ze známé přímky $\overline{U}$ nebo $\overline{V}$ a z křivky kruhové.

Pro první plochy polárné, jichž poly jsou v ose $\overline{Z}$, je-li $R = r$, obdržíme výsledky, předešlým obdobné. Třeba jen za y psáti z a naopak.

Pro první plochy polárné, jichž poly jsou v ose $\overline{X}$ shledáme, je-li $R = r$: *Každá z těchto ploch skládá se z roviny* $\overline{YZ}$ *a z plochy kulové se středem v ose* $\overline{X}$.

Rovnice této plochy jest:

$$x^2 m + y^2 m + z^2 m - 2r^2 x - 2r^2 m = 0.$$

5. Přistupme nyní ku druhé *ploše polárné*.

Rovnice její pro pol (m, n, p), transformována na střed plochy posouvání, jakožto počátek soustavy, zní:

$$\begin{aligned} x^2 (R^2 + r^2 - 3m^2 - n^2 - p^2) + y^2 (R^2 - r^2 - m^2 - 3n^2 + p^2) \\ + z^2 (- R^2 + r^2 - m^2 + n^2 - 3p^2) - 4mnxy - 4mpxz \\ + 4npyz + 4mx(R^2 + r^2) + 4ny(R^2 - r^2) - 4pz(R^2 - r^2) \\ + m^2 (R^2 + r^2) + n^2 (R^2 - r^2) - p^2 (R^2 - r^2) \\ - 3(R^2 - r^2)^2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Pro $m = n = p = 0$ obdržíme:

$$\frac{x^2 (R^2 + r^2)}{3(R^2 - r^2)^2} + \frac{y^2}{3(R^2 - r^2)} - \frac{z^2}{3(R^2 - r^2)} = 1,$$

což praví: druhá plocha polárná středu plochy kruho-kruhové jakožto polu jest *hyperboloid jednodílný*, soustředný a homothetický s hyperboloidem při první ploše polárné uvedeným.

Vyšetřme, pro které poly tato druhá plocha polárná jest kuželová.

Označíce součinitele v rovnici (9) obvyklým spůsobem, máme podmínku, aby plocha rovnicí tou vyjádřená byla plochou kuželovou, vyjádřenu determinantem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Dosadíme-li za veličiny ty známé hodnoty z rovnice oné a považujíce m, n, p za plynulé souřadnice, píšeme za ně dle obyčeje x, y, z, obdržíme takto rovnici žádaného geometrického místa. *Jest to Hessiana*) plochy kruho-kruhové.*

Plocha ta jest stupně osmého**.)

Nehodláme se, majíce omezenost místa na zřeteli, pouštěti v obšírnější rozbor této plochy, i uvedeme jen nejnápadnější vlastnosti její.

Plocha ta soustředná jest s plochou kruho-kruhovou, rovinami $\overline{YX}$, $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$ souměrně jsouc dělena. Křivky její v těchto rovinách jsou tudíž *křivkami minimálnými****). Vyšetřme je:

Rovnici křivky v rovině $\overline{YZ}$ obdržíme, vložíce do (10) $m = 0$. Jest pak, jak na pohled zřejmo,

$$a_{12} = a_{13} = a_1 = 0,$$

načež zbývá:

$$\overset{m=0}{/ \, a_{11} \; A_{11}} = 0,$$

při čemž A_{11} znamená subdeterminant ku prvku a_{11} přináležející, znaménko substituční pak připomíná, že prvky v rovnici té se vyskytující vesměs upraveny jsou vzhledem ku $m = 0$.

Z rovnice této vychází bezprostředně:

$$a_{11} = 0, \quad A_{11} = 0.$$

První rovnice praví, píšeme-li na místě m, n, p do výsledku — pro snažší přehled — obvyklé x, y, z, že jednou částí proniku jest kruhová křivka

$$y^2 + z^2 - R^2 - r^2 = 0, \qquad (11)$$

druhá pak po vyčíslení subdeterminantu, náležité redukci a přiměřeném rozložení nabývá tvaru následujícího:

$$(R^2 - r^2)(y^2 - z^2 - R^2 + r^2)^3 = 0.$$

Hessiana plochy kruho-kruhové má tudíž v rovině $\overline{YZ}$ (rovině středem normálné k rovinám křivek kruhových obou soustav)

---

*) Srovnej Cremona-Curtze: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen, pag. 137.

**) Tamže pag. 137. Rovnici její viz ve výroční zprávě c. k. realného gymnasia Táborského, 1882.

***) Srovnej Schlömilch: Zeitschrift für Mathematik, Über Minimalcurven.

křivku kruhovou soustřednou s hyperbolou dvojnou plochy posouvání, kterážto hyperbola jest tu křivkou trojnásobnou.

Podobně obdrží se rovnice křivky v rovině $\overline{XZ}$, zavedeme-li do (10) $n = o$.

Vychází tu

$$a_{12} = a_{23} = a_2 = 0,$$

Pročež nabudeme tvaru jednoduššího:

$$\int^{n=o} a_{22}\, A_{22} = 0.$$

Z rovnice té plyne:

$$a_{22} = 0,\ A_{22} = 0.$$

První z těchto rovnic praví, že jednou částí hledaného proniku Hessiany jest hyperbola stejnoramenná

$$x^2 - z^2 - R^2 + r^2 = 0 \qquad (12)$$

(patrně shodná s hyperbolou dvojnou).

Druhá rovnice představuje, jak snadně se přesvědčíme, centrickou křivku stupně šestého, k osám $\overline{X}$, $\overline{Z}$ orthogonálně souměrnou, již blíže vyšetřovati nám se nevidí.

Konečně plyne pro $p = 0$

$$a_{13} = a_{23} = a_3 = 0,$$

tehdy

$$\int^{p=0} a_{33}\, A_{33} = 0,$$

z kteréž podmínky vychází

$$a_{33} = 0, \quad A_{33} = 0.$$

První z rovnic těch praví, že jednou částí proniku hledaného jest hyperbola stejnoramenná

$$y^2 - x^2 - R^2 + r^2 = 0 \qquad (13)$$

shodná s hyperbolou dvojnou; druhá znamená centrickou křivku stupně šestého, ku $\overline{Y}$ a $\overline{X}$ orthogonalně souměrnou.

Dále ještě lze poznati, že determinant (10) uvedený stane se nulou, položíme-li

$$p = \pm r, \quad m^2 + n^2 = R^2.$$

Jeť tu $a_1 = a_2 = a = 0$; $a_3 = \mp 6\, rm^2$, dále pak též, jak snadně se pozná, i

$$a_3\, A_3 = 0.$$

Podobně, jestliže

$$n = \pm R, \quad m^2 + p^2 = r^2,$$

determinant stane se nulou, z čehož obého jde:

Hessiana má v rovinách od $\overline{XY}$ *o* r a $-r$ *vzdálených po křivce kruhové poloměru* R, *v rovinách od* $\overline{XZ}$ *o* R a $-R$ *vzdálených po křivce kruhové poloměru* r.

Tyto výsledky nepřekvapují, připomeneme-li si, že křivky kruhové tu zmíněné jsou křivky bodů parabolických.

Pohledněme ještě ku *křivce smíru Hessiany.*

Zavedeme-li do rovnice plochy té čtvrtou souřadnici stejnoměrnou v a položíme-li po uspořádání $v = o$*), obdržíme jakožto rovnici křivky smíru po přiměřeném upravení:

$$x^8 (R^2 + r^2) - y^8 (R^2 - r^2) + z^8 (R^2 - r^2) + 2R^2x^6y^2 + 2r^2x^6z^2$$
$$+ 2 (R^2 - r^2) y^6z^2 - 2R^2x^2y^6 - 2r^2x^2z^6 - 2 (R^2 - r^2) y^2z^6$$
$$- 2x^4y^4r^2 - 2R^2x^4z^4 - 6x^4y^2z^2 (R^2 + r^2) - 2x^2y^4z^2 (2R^2 - 3r^2$$
$$- 2x^2y^2z^4 (2r^2 - 3R^2) = 0,$$

z čehož zřejmo, tato křivka smíru v rovině $\overline{XY}$ má *dva realné body smíru*, určené přímkami $y^2 - x^2 = 0$, v rovině $\overline{XZ}$ *čtyři realné body* určené přímkami

$$z^2 - x^2 = 0,\ x^2 (R^2 + r^2) - z^2 (R^2 - r^2) = 0$$

a v rovině $\overline{YZ}$ pak *dva trojnásobné realné body.* (Body smíru hyperboly (4), jež zastupuje křivku stupně šestého.)

(Dokončení.)

Příspěvky k integralnímu počtu.

Napsal

prof. Dr. F. J. Studnička.

Že theoretická stránka mnohých výzkumů mathematických jest zajímavější a důležitější než-li praktická, pozná zajisté brzy každý, kdo v rozmanitých oborech analyse mathematické se poohledl a zejmena seznal proměnlivost příslušných výrazů aneb, abych užil slova případnějšího, *plastičnost* mathematické mluvy. Týž vyšší pojem vyjádřiti tu možná často velmi rozmanitými tvary mathematickými, takže na přechodu od podoby jedné k jiné vypadá jako báječný Proteus. A právě v této mnohotvárnosti a plastičnosti výrazů takovýchto spočívá nemalý půvab, zvláště když se přihlíží ku podobnostem a protivám formálním, takže se tu mnohdy vystopovati dá i zřejmý moment rythmický, ba poetický.

---

*) Srovnej: Dr. Em. Weyr, Časopis pro pěst. math. a fysiky, II. pag. 115.