Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Martin Pokorný

Důchod invalidní. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 3, 111--120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121143

Důchod invalidní.

Napsal

Martin Pokorný.

(Pokračování.)

Spisovatelé oborů národohospodářských vesměs uznali za nutnou podmínku k rozřešení otázky socialní zvláště také zabezpečení důchodu pro stáří všem třídám výdělkovým. Má-li tu rozhodovati ve smysle theorie Schultze-Delitschovy svépomoc, nebo dle theorie Lassalovy pomoc státní — této otázky principialní nechceme se zde dotýkati, nemajíce k tomu ani dostatečné příčiny.

K účelům našeho rozboru stačí nám konstatovati, že hlavní těžisko otázky socialní spočívá na zabezpečení výživy každého pracujícího člověka pro jeho stáří. Kdo se o to postará, zda-li jednotlivec či stát, není předmětem našeho rozjímání.

Zajisté záleží každému státu na tom, aby blahobyt občanů jeho byl zabezpečen jak možno nejlépe a zvláště aby vzbuzovala se chuť jejich ke spoření s úmyslem, by takto oni sami dopomáhali si k dostatečnému opatření ve stáří.

To vedlo u nás vládu v posledních letech k založení spořitelen poštovních, to již dříve vedlo ve Francouzsku k založení pokladen pro stáří (caisses de retraite), atd.

Také pojišťovny chopily se úkolu, opatřiti pojištěncům důchod pro stáří. Pokud nám známo, nedaří se jim však, alespoň u nás, právě tento druh pojišťování, jak by toho zajisté zasluhoval a pátrajíce po příčinách, snadno je najdeme v této okolnosti:

Aby sobě někdo opatřil důchod pro stáří, bude zřídka moci to učiniti složením náležité sumy najednou, nýbrž bude skládati jakous částku ročně až do té doby, kdy podle smlouvy má počíti vyplácení důchodu. Rozumí se, že roční splátka do pokladny pojišťovací bude tím větší, čím kratší lhůtu si pojištující k početí důchodu ustanoví. Obyčejně jest pojišťujícímu částka pro krátkou jakous lhůtu přílišná a nabídne-li mu pojišťovna lhůtu značně pozdější, nastává v něm pochybnost jiného způsobu, totiž bude-li mu možno tak dlouho v pravidelném placení ročních částek setrvati, zvláště je-li ten, kdo se pojišťuje, úředníkem na stálý roční plat vázaný, řemeslníkem nebo dělníkem, poněvadž kdyby z jakékoli příčiny stal se ku práci nespůsobilým a příjmy jeho zanikly, nemohl by smlouvě své s pojišťovnou nadále dostáti a byl by donucen spokojiti se s nepatrným často důchodem z dosavadních splátek plynoucím nebo jiným odbytným, je-li jinak pojišťovna solidní (při nesolidních pochodil by teprve zle).

Tyto okolnosti vedly k poznání, že pojištění důchodu pro stáří nabývá teprve pak opravdové praktičnosti, je-li do smlouvy přijata podmínka, že *placení ročních částek pojišťovně přestane a důchod započne, jakmile se pojištěný stane nespůsobilým ku práci.* —

Důležitost, kterou má tato věc pro budoucnost, zvláště pro rozřešení nejpalčivějších otázek socialních, dala podnět k této malé práci theoretické.

První, jenž podal do veřejnosti práci o *důchodu pro invalidy*, t. j. pro ty, kdo se stali ku práci neschopnými, byl dr. *K. Heym* r. 1855.*)

Jeho práce měla mimo jiné tu velikou zásluhu, že spůsobila živý ruch mezi theoretiky pojišťovacími a rovněž i dala podnět ke sbírání materiálu statistického v tomto směru.

K řešení otázek sem náležejících jest nejprve nutno míti před sebou:

1. obyčejnou tabulku úmrtní, t. j. tabulku ukazující, kolik osob určitého věku během příštího roku z určitého počtu žijících zemře, nebo kolik z nich příští rok přežije;

2. tabulku, která by ukazovala pravděpodobnosti pro každý věk, že osoba toho věku stane se průběhem příštího roku invalidní;

3. tabulku pravděpodobností, že osoba určitého věku, která již jest invalidní, během příštího roku zemře (nebo příští rok přežije);

---

*) V Masiusově „Rundschau des Versicherungswesens.“

4. tabulku pravděpodobností, že osoba určitého věku, která není invalidní (č. která jest ještě aktivní) během příštího roku zemře (nebo příští rok přežije).

Heym neměl po ruce při první práci své nižádnou z tabulek pod 2—4. jmenovaných, i učinil zvláštní hypothesu ve příčině pravděpodobnosti, že osoba určitého věku během roku stane se invalidní, z níž postavil mathematický vzorec a sestrojil jím tabellu sub 2. jmenovanou. Jakkoli předpokládání své založil na důmyslném použití zcela nedostatečného základu statistického, přece tabulka jeho neobyčejně skvěle obstála, jak dosvědčuje vážený mathematik Wiegand ze statistického materialu o úřednících železničních za leta 1868 a 1869,*) tak že ani novější tabelly založené na skutečném pozorování dosud nejsou s to, aby Heymovu tabellu úplně vytlačily. R. 1869 podal dr. *Zeuner***) tabellu invalidity na základě statistického materiálu čerpaného ze saského dělnictva hornického, která ovšem ku všeobecnému použití málo se hodí, jednak poněvadž jest pro stav hornický snad případná, ale nikoli pro společnosti jiné, jednak i pro to, že dle jeho vlastního doznání založena jest na materiále příliš skrovném a nedosti podrobném.

Do roku 1876. byli theoretikové nuceni, vzíti za vděk s tabulkami sub 1. a 2. jmenovanými a předpokládati, že úmrtnost invalidů jest táž, jako úmrtnost všeobecná z tabelly 1. plynoucí.

Že to není správné, poznávali všickni, neboť jest zajisté nepochybno, že lidé aktivní, tedy ku práci schopní, mají větší fond zdraví a tudy větší naději na delší život, než lidé invalidní, jejichž organismus dojista byl značně porušen, když se stali nadále ku práci neschopnými.

Roku jmenovaného, 1876., vydal *G. Behm* spis o poměrech úmrtnosti, invalidnosti atd. při úřednících železničních v Německu, v němž zároveň uveřejnil tabulku invalidnosti a tabulku úmrtnosti invalidních z poměrů těchto vypočtené. Berouce s tím za vděk, máme pak tedy již tabulky sub 1—3. jmenované. Nikdo však do té chvíle ještě se nepokusil o tabulku sub 4. uvedenou.

---

*) V „Journal des Collegiums für Lebensversicherungs-Wissenschaft zu Berlin", 1871.

**) Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Leipzig, 1869.

Jest samozřejmo, že úmrtnost osob vůbec dle tabelly sub 1. musí býti menší, než úmrtnost invalidů, což tabella Behmova veskrz potvrzuje, tím samým pak musí býti úmrtnost osob vůbec větší než úmrtnost aktivních.

Beróu-li tedy mathematikové pojišťovní v praxi úmrtnost aktivních z nouze za stejnou s úmrtností vůbec dle tabelly sub 1., dopouštějí se zajisté chyby nemalé.

Uvidíme dole, že s tabulkami 1—3. můžeme zde dokonale vystačiti, že tedy tabulky sub 4. nebude potřebí, ano že bychom ji po případě mohli z prvních tří konstruovati. Že tomu tak musí býti, snadno se nahlédne, uváží-li se, že aktivnost a invalidnost jsou pojmy kontradiktorické, spojené v pojmu žijících vůbec, tak že, víme-li kolik z určitého počtu lidí jest aktivních, víme, že ostatní jsou neaktivní t. j. invalidní. Jsou-li tedy tabulky 1., 2., 3. spolehlivé, obsahuje první úmrtnost obecnou, 3. úmrtnost invalidů, i musí býti možno, vypočísti z obou, zná-li se dle 2. zároveň přechod z aktivnosti v invalidnost, úmrtnost aktivních.

V následujících výpočtech bude znamenati:

L_n počet lidí $n$letých vůbec (tabulka odst. 1.),

z_n pravděpodobnost, že osoba $n$letá během roku nezemře,

t_n „ „ „ „ „ „ zemře,

p_n pravděpodobnost, že $n$letý aktivní člověk během roku se stane invalidním (tabulka odst. 2.),

u_n pravděpodobnost, že $n$letý invalidní člověk během roku zemře (tabulka odst. 3.), —

A_n počet aktivních $n$letých,

i_n počet invalidních, kteří z A_{n-1} aktivních během roku povstali, a konce roku se dožili,

J_n počet invalidů vůbec od nejnižšího věku až do n-tého roku povstalých a v tom věku ještě žijících,

w_n pravděpodobnost, že $n$letý aktivní během roku zemře,

r_n „ „ „ „ „ „ nezemře,

s_n „ „ „ invalidní „ „ „

při čemž patrně $r_n = 1 - w_n$, $s_n = 1 - u_n$, $z_n = 1 - t_n$.

Čísla L_n, p_n, u_n a ovšem i s_n jsou čísla známá; pomocí těch pak jde nejprve o vypočítání tabulek, obsahujících čísla A_n, i_n a J_n pro všecka čísla stáří n.

Nejprv sluší míti na zřeteli, že tabulka pravděpodobného povstání invalidnosti počíná se teprv od určitého věku vůbec, dle jedněch dosažením 20., dle jiných 25. roku. Před tím tedy všickni lidé považují se za aktivní. Uvidíme později, že nejpřípadnější jest, vzíti za základ počet žijících vůbec (ač počet aktivních pro nejnižší věk jest ovšem zcela libovolný), t. j. je-li nejnižším věkem v tabelle p_n rok $r$tý:

$$A_r = L_r.$$

Zároveň jest zřejmo, že v tom věku není ještě invalidů, tedy

$$i_r = J_r = 0.$$

Dále sluší povšimnouti si těchto vztahů:

a) V obyčejné tabulce úmrtní znamená L_n počet žijících lidí $n$letých, L_{n+1} počet žijících $(n+1)$letých. Rozdíl $L_n - L_{n+1}$ nemůže zde znamenati patrně nic jiného než počet těch, kteří z L_n $n$letých během roku zemřeli. — Pravděpodobnost, že osoba $n$letá během příštího roku zemře, jest tedy

$$\frac{L_n - L_{n+1}}{L_n} = 1 - \frac{L_{n+1}}{L_n} = t_n,$$

zároveň tedy jest pravděpodobnost, že osoba $n$letá příští rok přežije:

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = z_n.$$

b) Jinak má se věc s čísly A_n. Značí-li r_n pravděpodobnost, že $n$letý aktivní člověk během roku příštího nezemře, dožije se z A_n aktivních $n$letých příštího roku

$$A_n \,.\, r_n,$$

avšak toto číslo nelze položiti $= A_{n+1}$, jak by se snad soudilo dle obdoby s odstavcem *a*); neboť A_{n+1} znnmená arci počet žijících aktivních $(n+1)$letých, avšak po vyloučení těch, kteří v aktivnosti zemřeli, *i těch, kteří se stali invalidními*, pročež zajisté

$$A_{n+1} < A_n \, r_n.$$

c) Značí-li p_n pravděpodobnost, že $n$letý aktivní stane se během roku invalidním, jest počet takových invalidů patrně

$$A_n \, p_n,$$

z nichž však mnohý ještě během téhož roku zemře, tak že také zde

$$i_{n+1} < A_n p_n .$$

d) Je-li s_n pravděpodobnost, že *n*letý invalidní příštího roku se dožije a je-li invalidních *n*letých i_n, bude z nich za rok ještě na živě

$$i_n s_n ,$$

kterýžto počet není ani i_{n+1}, ani nemůže býti J_{n+1}.

I.

1. Položme si nyní nejprve úkol, vypočísti počet těch invalidů, kteří z A_n osob *n*letých aktivních během jednoho roku povstali a konce tohoto roku se dožili, t. j. počet i_{n+1}.

Pravděpodobnost, že osoba *n*letá aktivní stane se během roku invalidní, jest známa a $= p_n$. Během roku povstane tedy ze všech A_n aktivních celkem $A_n . p_n$ invalidů. Kdyby tito invalidi byli povstali všickni hned počátkem roku, zemřelo by jich (ježto pravděpodobnost úmrtí invalidů *n*letých jest u_n) do konce roku $A_n . p_n . u_n$; kdyby však byli povstali teprve na konci roku, nebylo by z nich žádných zemřelých.

Poněvadž ani jedno ani druhé není možné, nutno rozděliti všechen ten děj na celý rok, a tu možno zajisté beze zvláštní patrné chyby předpokládati, že v *m*tém díle roku povstane z A_n aktivních

$$A_n . \frac{p_n}{m} \tag{1}$$

invalidních.

Podobně i úmrtnost osob každé kategorie možno přijmouti za stejnoměrnou po celý rok, tak že, je-li osob určité kategorie *n*letých l_n a po roce z nich žije ještě l_{n+1}, zemřelo jich v každé *m*tině roku $\frac{l_n - l_{n+1}}{m}$. Tážíce se, kolik osob v několikáté *m*tině roku ještě žije, máme patrně obecně, je-li $l_{n+\frac{x-1}{m}}$ počet žijících na konci $(x-1)$ní *m*tiny, $l_{n+\frac{x}{m}}$ na konci *x*té *m*tiny roku:

$$l_{n+\frac{x}{m}} = l_{n+\frac{x-1}{m}} - \frac{l_n - l_{n+1}}{m} ;$$

tedy posloupně

na konci 1. $m$tiny $\quad l_{n+\frac{1}{m}} = l_n - \dfrac{l_n - l_{n+1}}{m} = \dfrac{(m-1)\, l_n + l_{n+1}}{m}$

na konci 2. $m$tiny

$$l_{n+\frac{2}{m}} = \frac{(m-1)\, l_n + l_{n+1}}{m} - \frac{l_n - l_{n+1}}{m} = \frac{(m-2)\, l_n + 2\, l_{n+1}}{m}$$

. . . .

na konci $(x-1)$. $m$tiny $\quad l_{n+\frac{x-1}{m}} = \dfrac{(m-x+1)\, l_n + (x-1)\, l_{n+1}}{m}$

" " x. " $\quad l_{n+\frac{x}{m}} = \dfrac{(m-x)\, l_n + x\, l_{n+1}}{m}$

. . . .

" " $(m-1)$. $m$tiny $\quad l_{n+\frac{m-1}{m}} = \dfrac{l_n + (m-1)\, l_{n+1}}{m}$

" " m. " $\quad l_{n+\frac{m}{n}} = l_{n+1}$.

Z toho jde pravděpodobnost, že osoba přeživší $(x-1)$ní $m$tinu roku přežije také $x$tou, patrně tato:

$$\frac{(m-x)\, l_n + x\, l_{n+1}}{(m-x+1)\, l_n + (x-1)\, l_{n+1}}$$

čili

$$\frac{m - x + x \cdot \dfrac{l_{n+1}}{l_n}}{m - x + 1 + (x-1)\, \dfrac{l_{n+1}}{l_n}}, \tag{2}$$

kdež $\dfrac{l_{n+1}}{l_n}$ jest pravděpodobnost, že osoba $n$letá příští rok přežije, a jest buď obecná $= \dfrac{L_{n+1}}{L_n} = z_n$, nebo pro aktivní osoby $= r_n$, nebo pro invalidy $= s_n$.

Žije-li nyní na počátku roku A_n aktivních $n$letých, stane se z nich v 1. $m$tině roku invalidních dle (1)

$$A_n \frac{p_n}{m};$$

z těch dožije se konce 1. $m$tiny (poněvadž zde pravděpodobnost dožití celého roku jest s_n) dle (2)

$$A_n \frac{p_n}{m} \cdot \frac{m - 1 + s_n}{m}.$$

K těm přibude během 2. $m$tiny roku opět $A_n \dfrac{p_n}{m}$, z úhrnu toho pak dožije se tedy konce 2. $m$tiny:

$$\left(A_n \frac{p_n}{m} \cdot \frac{m-1+s_n}{m} + A_n \frac{p_n}{m}\right) \cdot \frac{m-2+2\,s_n}{m-1+s_n};$$

podobně bude invalidů na konci 3. $m$tiny:

$$\left[\left(A_n \frac{p_n}{m} \cdot \frac{m-1+s_n}{m} + A_n \frac{p_n}{m}\right) \cdot \frac{m-2+2\,s_n}{m-1+s_n} + A_n \frac{p_n}{m}\right] \cdot \frac{m-3+3\,s_n}{m-2+2\,s_n};$$

po uplynutí tedy vůbec $m$té $m$tiny, čili za celý rok jest

$$i_{n+1} = \Big\{ \ldots \left[\left(A_n \frac{p_n}{m} \cdot \frac{m-1+s_n}{m} + A_n \frac{p_n}{m}\right) \cdot \frac{m-2+2\,s_n}{m-1+s_n} + A_n \frac{p_n}{m}\right] \cdot \frac{m-3+3\,s_n}{m-2+2\,s_n} + \ldots \Big\} \cdot \frac{m\,s_n}{m-(m-1)+(m-1)\,s_n},$$

čili, zavedeme-li $u_n = 1 - s_n$:

$$i_{n+1} = \Big\{ \ldots \left[\left(A_n \frac{p_n}{m} \cdot \frac{m-u_n}{m} + A_n \frac{p_n}{m}\right) \cdot \frac{m-2\,u_n}{m-u_n} + A_n \frac{p_n}{m}\right] \cdot \frac{m-3\,u_n}{m-2\,u_n} + \ldots \Big\} \cdot \frac{m-m\,u_n}{m-(m-1)\,u_n},$$

a provedeme-li násobení:

$$i_{n+1} = A_n\,p_n\,(1-u_n)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-u_n} + \frac{1}{m-2\,u_n} + \ldots + \frac{1}{m-(m-1)\,u_n}\right). \qquad (3)$$

Členy řady v závorce nahradíme řadami dle vzorce

$$\frac{1}{m-\alpha\,u_n} = \frac{1}{m} + \frac{\alpha\,u_n}{m^2} + \frac{\alpha^2\,u_n^2}{m^3} + \ldots \text{in inf.},$$

i bude

$$i_{n+1} = A_n\,p_n \,.\, (1-u_n) \cdot \frac{1}{m}\Bigg[\begin{array}{l} 1 \\ +1+\frac{u_n}{m}+\left(\frac{u_n}{m}\right)^2+\left(\frac{u_n}{m}\right)^3+\ldots \text{in inf.} \\ +1+\frac{2\,u_n}{m}+\left(\frac{2\,u_n}{m}\right)^2+\left(\frac{2\,u_n}{m}\right)^3+\ldots \text{in inf.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1+\frac{\{m-1\}\,u_n}{m}+\left(\frac{\{m-1\}\,u_n}{m}\right)^2+\left(\frac{\{m-1\}\,u_n}{m}\right)^3 \\ \qquad +\ldots \text{in inf.}\end{array}\Bigg].$$

Sečtouce zde členy těchto řad dle mocnin a nazvouce vůbec

$$\left(\frac{u_n}{m}\right)^x+\left(\frac{2\,u_n}{m}\right)^x+\left(\frac{3\,u_n}{m}\right)^x+\ldots+\left(\frac{\{m-1\}\,u_n}{m}\right)^x$$
$$=\left(\frac{u_n}{m}\right)^x\cdot\sum_1^{m-1}(m-1)^x,$$

obdržíme

$$i_{n+1}=\mathrm{A}_n\,p_n\,(1-u_n)\,.\,\frac{1}{m}\Bigg[m+\frac{u_n}{m}\sum_1^{m-1}(m-1)$$
$$\left(\frac{u_n}{m}\right)^2\sum_1^{m-1}(m-1)^2+\ldots\Bigg]$$

čili

$$i_{n+1}=\mathrm{A}_n\,p_n\,(1-u_n)\Bigg[1+\frac{u_n}{m^2}\sum_1^{m-1}(m-1)$$
$$+\frac{u_n^2}{m^3}\sum_1^{m-1}(m-1)^2+\ldots\Bigg]. \qquad (4)$$

Ježto $\sum\limits_1^{m-1}(m-1)^x$ znamená řadu mocninovou, jest její součet, jak známo *), tento:

$$\sum_1^{m-1}(m-1)^x=\frac{(m-1)^{x+1}}{x+1}+\frac{(m-1)^x}{2}+\frac{1}{2}\binom{x}{1}\mathrm{B}_1\,(m-1)^{x-1}$$
$$-\frac{1}{4}\binom{x}{3}\mathrm{B}_3\,(m-1)^{x-3}+\ldots,$$

kdež $\mathrm{B}_1=\frac{1}{6}$, $\mathrm{B}_3=\frac{1}{30}$ atd. (čísla Bernoulliova); tedy

$$\frac{u_n^x}{m^{x+1}}\cdot\sum_1^{m-1}(m-1)^x=\frac{u_n^x}{x+1}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{x+1}+\frac{u_n^x}{2\,m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^x$$
$$+\frac{1}{2}\binom{x}{1}\mathrm{B}_1\,\frac{u_n^x}{m^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{x-1}-\frac{1}{4}\binom{x}{3}\mathrm{B}_3\,.\,\frac{u_n^x}{m^4}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{x-2}+\ldots$$

Nežli hodnotu tu do výrazu pro i_{n+1} vložíme, přejdeme hned k hodnotám krajním. Jest totiž zřejmo, že hodnota pro i_{n+1} bude tím přesnější, čím menší jsou díly roku, v nichž pozorujeme přechod aktivních v invaliditu, t. j. čím větší jest m.

Položíce tedy lim $m=\infty$, obdržíme patrně:

---

*) Viz: Baltzera, Základové mathematiky, I. díl, přel. M. Pokorný; str. 145.

$$\lim \frac{u_n^x}{m^{x+1}} \sum_1^{m-1} (m-1)^x = \frac{u_n^x}{x+1}, \tag{5}$$

poněvadž všecky ostatní členy mají zde mez $= 0$.

Ze vzorce (4) obdržíme pak hodnotami součtů mezných dle (5):

$$i_{n+1} = A_n p_n (1-u_n)\left(1 + \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^3}{4} + \ldots\right)$$

čili

$$i_{n+1} = A_n p_n (1-u_n) \cdot \frac{1}{u_n}\left[u_n + \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + \frac{u_n^4}{4} + \ldots\right].$$

Řada $u_n + \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + \frac{u_n^4}{4} + \ldots$ jest patrně řadou logarithmickou a rovná se*):

$$-l(1-u_n),$$

z čehož konečně:

$$i_{n+1} = -A_n p_n \frac{1-u_n}{u_n} l(1-u_n), \tag{6}$$

čili zavedením $1 - u_n = s_n$, také

$$i_{n+1} = -A_n p_n \frac{s_n \cdot l\, s_n}{1-s_n}. \tag{6'}$$

(Pokračování.)

O způsobu Tesánkově, jak rozkládati možná čísla celistvá v činitele jednotlivé.

Pro žáky středních škol napsal

Dr. F. J. Studnička.

§. 1.

Celistvá čísla jsou, jakož obecně známo, buď *sudá* nebo *lichá*, sudá obsahují činitele 2, lichá pak buď činitele liché nebo žádné — 1 se tu za činitele nepovažuje —, a slují tu čísla *kmenná*, v onom pak případě čísla *složená*, při čemž jedině 2 jakožto číslo sudé jest zároveň číslem kmenným a to nejmenším.

*) Tamže, str. 169.