Antonín Kostěnec

Jak lze řešiti některé číselné rovnice pouhým odmocňováním

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 4, 159--170

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121174

Jak lze řešiti některé číselné rovnice pouhým odmocňováním.

Pro žáky středních škol napsal

Ant. Kostěnec,
professor městské střední školy v Praze.

Vypočítáme-li pouze celky A druhé neb třetí odmocniny celého čísla N, tak že jest

$$A < \sqrt{N} < A + 1 \text{ neb } A < \sqrt[3]{N} < A + 1,$$

pravíme, že jsme ji určili přesně na 1 a zároveň obdržíme všeobecně zbytek R, spojený s čísly A a N rovnicemi

$$N = A^2 + R \text{ neb } N = A^3 + R.$$

Na př. druhá odmocnina ze 23 přesná na 1 jest 4 a zbytek 7.

Touž celistvou 2. odmocninu A mají patrně všecka čísla obsažená v mezích A^2 a $(A+1)^2$, tedy, přihlédneme-li prozatím toliko k číslům celistvým:

$$A^2, A^2+1, A^2+2, \ldots, (A+1)^2 - 1 = A^2 + 2A,$$

k nimž náležejí v témž pořádku zbytky 0, 1, 2,...., 2A.

Největší celistvé číslo N, které dá ještě A za 2. odmocninu přesnou na 1, jest tedy svrchní mez čísel těchto zmenšená o 1, t. j. $N = (A+1)^2 - 1 = A^2 + 2A$, a k číslu tomuto náleží též největší zbytek, kterýž obdržíme z rovnice $R = N - A^2$, dosadíme-li do ní $A^2 + 2A$ za N, tedy $R = 2A$ t. j. *zbytek tento jest nejvýše tak velký jako dvojnásobná 2. odmocnina A.*

Na př. všecka čísla mezi 16 a 25 mají 2. odmocninu na 1 přesnou $= 4$; největší z čísel těchto jest $25 - 1 = 24$ a k němu náleží největší zbytek $24 - 16 = 2 . 4 = 8$.

Že jest 2A největší hodnotou zbytku 2. odmocniny celého čísla N přesné na 1, poznati jest ostatně snadno z rovnice $N = A^2 + R$, kteráž za $R = 2A + 1$ by přešla v $N = (A+1)^2$, což by však odporovalo podmínce, že 2. odmocnina má býti $= A$.

Z celistvých čísel N, která mají A za 3. odmocninu přesnou na 1, jest největší $N = (A+1)^3 - 1 = A^3 + 3A^2 + 3A$ a největší zbytek k číslu tomuto náležející jest dle rovnice $R = N - A^3$ za uvedenou největší hodnotu N

$$R = 3A^2 + 3A = 3A(A+1)$$

t. j. *zbytek 3. odmocniny celého čísla přesné na 1 rovná se nejvýše trojnásobné odmocnině této znásobené číslem o 1 větším.*

Též z rovnice $N = A^3 + R$ vysvítá, že největší zbytek 3. odmocniny jest $R = 3A^2 + 3A$, neboť rovnice ta přešla by za $R = 3A^2 + 3A + 1$ v rovnici $N = (A + 1)^3$, což však jest na odpor podmínce.*)

Při 4. odmocnině celého čísla přesné na 1 jest, podržíme-li posavadní označení, $N = A^4 + R$ a největší hodnota zbytku $R = (A + 1)^4 - 1 - A^4 = 4A^3 + 6A^2 + 4A$; podobně jest při 5. odmocnině za stejných podmínek $N = A^5 + R$ a nejv. zbytek $R = (A + 1)^5 - 1 - A^5 = 5A^4 + 10A^3 + 10A^2 + 5A$.

Vůbec jest tedy při n odmocnině A celého čísla N přesné na 1 $N = A^n + R$ a nejv. zbytek roven rozdílu obou mezních hodnot odmocněnce, zmenšenému o 1, a má tudíž všeobecně tvar

$$R = \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \ldots + \binom{n}{2} A^2 + \binom{n}{1} A.$$

Naopak tedy zase soudíme vždy ze dvou následujících k sobě náležitých relac podoby

$$N = A^2 + R,\ R \leqq 2A;\ N = A^3 + R,\ R \leqq 3A(A+1);$$
$$N = A^4 + R,\ R \leqq 4A^3 + 6A^2 + 4A;\ \ldots\ldots;$$
$$N = A^n + R,\ R \leqq \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \ldots + \binom{n}{2} A^2 + \binom{n}{1} A,$$

že A jest vztažně 2., 3., 4., ..., $n$tou odmocninou celého čísla N přesnou na 1 a R příslušný zbytek.

Má se to tu patrně jako při dělení, kdež z obou relac $A = BQ + R$, $R < B$ uzavíráme, že A jest dělenec, B dělitel, Q podíl a R zbytek.

Tohoto zákona o vzájemném vztahu odmocněnce N, odmocniny A přesné na 1 a zbytku R lze užíti k řešení některých číselných rovnic, zejmena o jedné neznámé 2., 3. a vyšších stupňů pouhým odmocňováním, což objasníme na tomto příkladě: V rovnici 3. stupně

$$x^3 + ax^2 + bx = m,$$

v níž všecky veličiny za čísla celistvá pokládány buďtež, jest

*) **Rozumí se, že možno užíti pravidla o maximalní hodnotě zbytku 2. a 3. odmocniny ke zkoušce, nebyla-li při určování odmocniny toho neb onoho stupně zvolena číslice menší než měla býti, což se pozná z toho, že zbytek přesahuje v případě tom dovolenou mez.**

x třetí odmocninou absolutního členu m přesnou na 1, nepřesahuje-li součet $ax^2 + bx$, jejž za zbytek odmocniny této míti dlužno, známé již maximalní hodnoty zbytku, je-li totiž

$$ax^2 + bx \leqq 3x(x+1).$$

Především tedy třeba se přesvědčiti, je-li splněna tato podmínka, načež se určí kořen rovnice, odmocní-li se číslo m třemi přesně na 1. Způsobem tímto najdeme ovšem jen jeden (positivný a celistvý) kořen, ale tím řešení toto nepozbývá ceny, protože jest mnoho úloh, zejmena praktických, jimž vyhovuje pouze takovýto kořen, což doložíme později některými příklady.

V úvaze této budeme se zabývati hlavně jen rovnicemi 2. a 3. stupně.

Z obou relac $N = A^2 + R$, $R \leqq 2A$ jakož i z podmínky, že mají součinitelé rovnic býti čísla celistvá, jde, že budeme moci řešiti z úplných rovnic kvadratických především toliko oba tvary

$$(1) \qquad x^2 + x = a,$$

$$(2) \qquad x^2 + 2x = a$$

pouhým odmocněním dvěma absolutního členu a přesně na 1. Jak se samo sebou rozumí, budou se řešiti rovněž tak i ony vyšší rovnice, které lze uvésti na oba tvary tyto.

Rovnice 1) a 2) lze též psáti

$$x(x+1) = a, \quad x(x+2) = a,$$

z čehož poznáváme, že a jest v prvním případě součin dvou po sobě jdoucích čísel celistvých, v druhém pak součin dvou celistvých čísel o 2 od sebe se lišících. Je-li tedy naopak dán součin dvou takových čísel, vypočítá se menší z nich, odmocníme-li jej dvěma přesně na 1.

Na př.: Najdi dvě po sobě jdoucí čísla celistvá, je-li rozdíl jich trojmocí 1261. Bude tedy

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x(x+1) + 1 = 1261 \text{ neb } x(x+1) = 420,$$

$$\text{tudíž } x = 20, \text{ protože } 20 < \sqrt{420} < 21.$$

Čísla hledaná jsou tedy 20 a 21.

Je-li na př. počet kombinac 2. třídy s opakováním 21, kolik prvků bylo tu kombinováno?

Je-li x počet prvků, bude dle známého vzorce

$$\frac{x(x+1)}{2} = 21, \quad x(x+1) = 42,$$

odkudž jest $x = 6$, ježto $6 < \sqrt{42} < 7$.

Na př.: V rovnici $x + \sqrt{x} = 6$

jest $\sqrt{x} = 2$, protože $2 < \sqrt{6} < 3$,

tedy $x = 4$.

Na př.: Z rovnice

$$\left(\sqrt[3]{x} + 2\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x} + 2\right) = 20$$

dostaneme

$$\sqrt[3]{x} + 2 = 4, \text{ ježto } 4 < \sqrt{20} < 5, \text{ tedy } x = 8.$$

Mimo uvedené hlavní dva tvary úplných rovnic kvadratických možno řešiti způsobem tímto ještě některé jiné rovnice kvadratické, při nichž součinitel první mocniny neznámé jest větší než 2. Jak si tu počínati třeba, ukážeme na těchto příkladech:

a) Rovnici podoby

$$x^2 + 3x = a$$

rozřešíme uvážíce, že jest

$$(x + 1)^2 < x^2 + 3x = a < (x + 2)^2,$$

z kteréžto nerovnosti následuje, že $x + 1$ jest 2. odmocninou čísla a přesnou na 1.

Na př.: Rovnice

$$x^2 + 3x = 28$$

dá $x + 1 = 5$, neboť $x + 1 < \sqrt{28} < x + 2$,

tedy $x = 4$.

Na př.: V rovnici

$$x^4 + 3x^2 = 28$$

jest $x^2 + 1 = 5$, neboť $x^2 + 1 < \sqrt{28} < x^2 + 2$,

tedy $x = \pm 2$.

Na př.: Z rovnice

$$\sqrt[3]{(y^2 + 2y - 7)^2} + 3\sqrt[3]{y^2 + 2y - 7} = 10$$

obdržíme

$$\sqrt[3]{y^2 + 2y - 7} + 1 = 3, \text{ ježto } 3 < \sqrt{10} < 4,$$

neb $y^2 + 2y = 15$,

tedy $y = 3$, protože $3 < \sqrt{15} < 4$.

b) Rovnice podoby

$$x^2 + 4x = a$$

rozřeší se právě tak jako v případě předešlém, neboť jest
$$(x+1)^2 < x^2+4x = a < (x+2)^2.$$
Na př.: Rovnice
$$x^2+4x=45$$
dá $x+1=6$, tedy $x=5$.

c) Při rovnici
$$x^2+5x=a$$
jest nerovnost $(x+1)^2 < x^2+5x = a < (x+2)^2$ v platnosti jen potud, pokud $x<4$, jak z nerovnosti $x^2+5x<(x+2)^2$ vyplývá. Pro větší x bude tedy dlužno položiti
$$(x+2)^2 < x^2+5x = a < (x+3)^2.$$
Na př.:
$$x^2+5x=14.$$
Zde jest $x+1=3$, ježto $x+1<\sqrt{14}<x+2$, tedy $x=2$.

Na př.: Rovnice
$$x^2+5x=66$$
dá $x+2=8$, protože $x+2<\sqrt{66}<x+3$, tedy $x=6$.

d) Rovnice tvaru
$$x^2+6x=a$$
rozřeší se na základě nerovnosti
$$(x+2)^2 < x^2+6x = a < (x+3)^2,$$
platné pro $x>2$, jak následuje z nerovnosti
$$(x+2)^2 < x^2+6x.$$

Na př.: Z rovnice
$$x^2+6x=216$$
dostaneme
$$x+2=14, \text{ ježto } x+2<\sqrt{216}<x+3,$$
tedy $x=12$.

Tak bychom mohli ještě dále pokračovati, při čemž však vymezení neznámé stává se čím dále tím více složitějším a výpočet tudíž méně praktickým.

Podobně možno řešiti též některé úplné rovnice kvadratické pouhým odmocňováním, je-li součinitel 1. mocniny neznámé negativní. Probereme po řadě 4 tvary takovýchto rovnic, v nichž řečený součinitel má hodnotu prvních čtyř čísel celistvých.

α) Z rovnice

$$x^2 - x = a \quad \text{neb} \quad x(x-1) = a$$

jest viděti, že a jest součin dvou po sobě jdoucích čísel celistvých, tudíž obdržíme menší obou $(x-1)$ tak jako při rovnici podoby $x^2 + x = a$ neb $x(x+1) = a$.

Rovnici α) uvedeme na tvar rovnice poslední, položíme-li v ní $x - 1 = y$, tedy $x = y + 1$, neboť pak obdržíme

$$y(y+1) = a \quad \text{neb} \quad y^2 + y = a.$$

Samostatně rozřešíme rovnici tuto, omezíme-li ji čtverci dvou příslušných po sobě jdoucích čísel celistvých, načež obdržíme

$$(x-1)^2 < x^2 - x = a < x^2,$$

z kteréžto nerovnosti vyplývá, že $x - 1$ jest 2. odmocninou čísla a přesnou na 1.

Na př.: Kolik přímek protíná se v 66 bodech?

Je-li počet přímek těchto x, bude

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \quad \text{neb} \quad x(x-1) = 132,$$

odkudž jest

$$x - 1 = 11, \text{ tedy } x = 12.$$

Z vyšších rovnic, jež lze na tvar tento uvésti, budiž řešena rovnice

$$\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 20,$$

v níž jest

$$\sqrt[4]{x} - 1 = 4 \quad \text{neb} \quad \sqrt[4]{x} = 5,$$
$$\text{tedy } x = 625.$$

β) V rovnici

$$x^2 - 2x = a \quad \text{neb} \quad x(x-2) = a$$

jest a součin dvou celistvých čísel o 2 od sebe se lišících a tudíž obdržíme menší obou $(x-2)$ právě tak jako při rovnici

$$x^2 + 2x = a \quad \text{neb} \quad x(x+2) = a.$$

Rovnice β) převede se na tvar rovnice poslední, položíme-li v ní $x - 2 = y$, tedy $x = y + 2$, načež obdržíme $y(y+2) = a$ neb $y^2 + 2y = a$.

Též nerovnost $(x-2)^2 < x^2 - 2x = a < (x-1)^2$ ukazuje, že $x - 2$ rovná se 2. odmocnině z a přesné na 1.

Na př.: Z rovnice

$$x^2 - 2x = 48$$

jde, že

$$x - 2 = 6, \text{ tedy } x = 8.$$

γ) Rovnici

$$x^2 - 3x = a \text{ neb } x(x - 3) = a$$

rozřešíme, položíme-li v ní buď $x - 3 = y$, tedy $x = y + 3$, načež obdržíme řešenou již rovnici $y^2 + 3y = a$ neb sevřeme-li rovnici danou náležitými mezemi, totiž

$$(x - 2)^2 < x^2 - 3x = a < (x - 1)^2, \text{ kdež } x > 4.$$

Na př.: Který mnohoúhelník má 20 úhlopříčen?

Označíme-li počet stran mnohoúhelníka hledaného písmenem x, bude, jak povědomo,

$$\frac{x(x - 3)}{2} = 20 \text{ neb } x(x - 3) = 40,$$

odkudž jest

$$x - 2 = 6, \text{ tedy } x = 8,$$

Dvacet úhlopříčen má tedy osmiúhelník.

Na př.: Rovnice

$$x^6 - 3x^3 = 40$$

$$\text{dá } x^3 - 2 = 6, \; x^3 = 8, \; x = 2.$$

δ) Rovnice

$$x^2 - 4x = a \text{ neb } x(x - 4) = a$$

buď se převede známou již substitucí na rovnici dříve řešenou $y^2 + 4y = a$ neb se náležitě omezí, takže pak jest

$$(x - 3)^2 < x^2 - 4x = a < (x - 2)^2,$$

z kteréžto nerovnosti poznáváme, že $x - 3$ jest 2. odmocninou čísla a přesnou na 1.

Na př.:

$$x^2 - 4x = 45.$$

Zde jest

$$x - 3 = 6, \text{ tedy } x = 9.$$

Na př.: Z rovnice

$$(\sqrt{x} + 3)^2 - 4(\sqrt{x} + 3) = 5$$

obdržíme

$$\sqrt{x} + 3 - 3 = 2, \; \sqrt{x} = 2, \; x = 4.$$

Poznámka. Též známé rovnice 2. stupně o dvou neznámých $x^2 + y = 11$, $x + y^2 = 7$ lze rozřešiti pouhým odmocněním dvěma čísel 11 a 7 přesně na 1, protože v první z nich $y < 2x$, v druhé pak $x < 2y$, jak se řešením způsobem tímto přesvědčiti můžeme.

Odmocníme-li v 1. rovnici číslo 11 dvěma, bude odmocnina 3, zbytek 2, tudíž $x = 3$, $y = 2$. V rovnici druhé jest 2. odmocnina ze 7 rovna 2, zbytek 3, tedy jest $y = 2$, $x = 3$. Z každé obou rovnic dostali jsme tedy oba kořeny.

Jak již dříve bylo naznačeno, rozřeší se rovnice 3. stupně

$$x^3 + ax^2 + bx = m,$$

v níž veličiny a, b, m, x jsou všeobecně čísla celistvá (a positivná), odmocněním absolutního členu m třemi přesně na 1, vyhovuje-li součet členů 2. a 1. stupně podmínce

$$ax^2 + bx \leqq 3x^2 + 3x.$$

Ze součinitelů a, b může míti dle nerovnosti této každý čtyři hodnoty a to 0, 1, 2, 3 a ježto dvě řady o 4 prvcích dají 16 obměn (variac) 2. třídy, obdrželi bychom 16 rozličných tvarů rovnic kubických řešitelných pouhým odmocněním třemi; vyloučíme-li však obměnu 00, zbude nám pouze 15 takových tvarů. Má-li zbytek 3. odmocniny čísla m přesné na 1 neb vlastně součet $ax^2 + bx$ zůstati positivním, nemohou oba součinitelé a, b býti současně negativními, nýbrž vždy toliko jeden z nich. Chceme-li však řešiti způsobem tímto i takové rovnice kubické, v nichž buď $ax^2 + bx > 3x^2 + 3x$ neb $ax^2 + bx < 0$, třeba hodnotu m náležitě omezíti trojmocemi dvou příslušných po sobě jdoucích čísel podobně jako jsme to učinili při rovnicích kvadratických.

K objasnění toho stůjtež zde příklady tyto:

Na př.: Kolikátým členem jest číslo 936 v arithmetické řadě 3. stupně 1, 6, 18, 40, 75, ...

Obecný člen řady této jest

$$a_n = \frac{n^2(n+1)}{2},$$

tudíž jest v příkladě našem

$$\frac{n^2(n+1)}{2} = 936 \text{ neb } n^3 + n^2 = 1872,$$

odkudž jde, že

$$n = 12, \text{ neboť } 12 < \sqrt[3]{1872} < 13.$$

Na př.: Kolikátým členem jest 220 v řadě čísel trojbokých jehlanců 1, 4, 10, 20, 35, 56. ...., jejíž obecný člen

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}?$$

Zde jest

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 220 \text{ neb } n^3 + 3n^2 + 2n = 1320$$

$$\text{a } n = 10, \text{ ježto } 10 < \sqrt[3]{1320} < 11.$$

Na př.: Ve čtyrčlenné geom. posloupnosti jest první člen $a_1 = 1$, součet $s_4 = 85$; jak velký jest podíl řady této?

Z obecného vzorce součtu prvních n členů posloupnosti geometrické

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

obdržíme pro příklad náš

$$\frac{q^4 - 1}{q - 1} = 85 \text{ neb } q^3 + q^2 + q = 84,$$

odkudž obdržíme

$$q = 4, \text{ neboť } 4 < \sqrt[3]{84} < 5.$$

Na př.: Rovnici

$$x^3 + 5x^2 + 4x = 160$$

lze omeziti tak, že jest

$$(x+1)^3 < x^3 + 5x^2 + 4x = 160 < (x+2)^3,$$

z níž plyne, že

$$x + 1 = 5, \text{ protože } 5 < \sqrt[3]{160} < 6,$$

$$\text{tedy } x = 4.$$

Na př.: utvoří-li n protínajících se přímek

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

trojúhelníků, kolik takových přímek utvoří 56 trojúhelníků? Zde máme tedy

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 56$$

neb $(n-2)^3 < n^3 - 3n^2 + 2n = 336 < (n-1)^3$,

tudíž

$$n - 2 = 6, \; n = 8, \text{ ježto } 6 < \sqrt[3]{336} < 7.$$

Na př.: Rovnici

$$x^3 - 4x^2 - 3x = 54$$

možno omeziti:

$$(x-3)^3 < x^3 - 4x^2 - 3x = 54 < (x-2)^3,$$

odkudž jde, že $x - 3 = 3$, tedy $x = 6$.

Protože omezení rovnice, v níž součinitelé členů 2. a 1. stupně jsou negativní, jest obtížné, nehodí se způsob náš k řešení takových rovnic.

V rovnici 4. stupně $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = m$, v kteréž se opět všecky veličiny za čísla celistvá přijímají, bude x 4. odmocninou absolutního členu m přesnou na 1, pokud jest součet $ax^3 + bx^2 + cx$, jejž za zbytek odmocniny této pokládati dlužno, $\leqq 4x^3 + 6x^2 + 4x$. Z té příčiny budou součinitelé $a \leqq 4$, $b \leqq 6$, $c \leqq 4$. Ježto rozličné hodnoty součinitelů těchto, jichž má na př. a i c patero, totiž 0, 1, 2, 3, 4, dají

$$(4+1)(6+1)(4+1) = 175$$

obměn, bylo by tvarů rovnic 4. stupně pouhým odmocněním řešitelných 175 neb vlastně jen 174, protože obměnu 000 vyloučiti dlužno.

Na př.: Kolik ztrojmocněných (kubických) čísel přirozené řady třeba sečísti, by součet byl 3025?

Součtový vzorec řady této jest

$$s_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \; {}^{*)},$$

tudíž bude

$$n^4 + 2n^3 + n^2 = 12100.$$

Protože zde $2n^3 + n^2 < 4n^3 + 6n^2 + 4n$, bude n rovno 4. odmocnině čísla 12100 přesné na 1 a ta jest 10, jak se snadno přesvědčíme, tudíž jest $n = 10$.

Řešitelných tvarů rovnic 5. stupně bylo by za týchž okolností $(5+1)(10+1)(10+1)(5+1) - 1 = 4355$.

Ustanovujíce počet tento, měli jsme na zřeteli jen takové tvary rovnic, při nichž na první pohled poznati jest, že podmínce řešitelnosti pouhým odmocňováním jest vyhověno; kdybychom však omezení tohoto nedbali, dostali bychom sice mnohem větší počet tvarů rovnic určitého stupně řešitelných pouhým odmocňováním, protože podmínce řešitelnosti lze vyho-

---

*) Viz článek prof. J. Slavíka: Součet k-tých mocnin čísel řady přirozené v čís. III, roč. XVI., p. 151. časopisu tohoto.

věti i jinými ještě hodnotami součinitelů a, b, c, ... nežli jaké v článku tomto přijaty byly; pak ale jest nezbytno, přesvědčiti se vždy z předu zkouškou, zda-li jest podmínce řešitelnosti vyhověno čili nic.

Z toho viděti, že čím vyšší stupeň rovnice, tím více též rovnic odmocněním řešitelných. Počet rovnic těchto by se ovšem ještě valně zvětšil, kdybychom přihlíželi též k součinitelům negativním a lomeným.

Na konec zmíníme se ještě krátce o řešení rovnic se součiniteli lomenými.

Podmínce, by měla celistvou $n$tou odmocninu A, vyhovují, jak patrno, nejen všecka čísla celistvá, nýbrž i lomená (smíšená), obsažená v mezích A^n a $(A+1)^n$. Že pak k lomenému odmocněnci náleží i lomený zbytek, rozumí se samo sebou. Největšího odmocněnce a tedy i největší zbytek nelze tu určitě udati, leč toliko svrchní mez jich, kteráž jest při odmocněnci $(A+1)^n$ a při zbytku $(A+1)^n - A^n$. Při 2. odmocnině jest tedy zbytek $R < 2A + 1$, při 3. odmocnině $R < 3A^2 + 3A + 1$ atd.

Vůbec jest tu největší zbytek větší než byl při celistvém N o pravý zlomek, který se blíží mezi (limitě) 1.

Poněvadž při lomeném N a R meze zbytku se o 1 rozšířily a zároveň R, jsouc zlomkem, neurčitý počet rozličných hodnot míti může, bude lze řešiti větší počet rovnic pouhým odmocněním, budou-li součinitelé dané rovnice buď vesměs neb z části čísla lomená, nežli tomu bylo při součinitelích veskrze celistvých. Též jest zjevno, že odmocnina přesná na 1 z čísla smíšeného (celého a pravého zlomku) jest rovna odmocnině z jeho části celistvé; na př. $24\frac{4}{5}$ i 24 mají 4 za 2. odmocninu přesnou na 1.

Z toho následuje, že i rovnice, které mají za součinitele čísla lomená, budou se řešiti právě tak jako kdyby měly součinitele celistvé, pokud součet oněch členů, jejž pokládati dlužno za zbytek příslušné odmocniny absolutního členu přesné na 1, nepřesahuje maximalní hodnoty zbytku.

Na př.: Rovnice

$$3x^2 + 5x = 68 \text{ čili } x^2 + \frac{5}{3}x = 22\frac{2}{3}$$

má patrně kořen $x = 4$, protože $\frac{5}{3}x < 2x$ a $4 < \sqrt{22} < 5$.

Na př. Je-li číslo soustavy desítkové 190 napsáno v jiné soustavě číslicemi 276, jaký základ (x) má soustava tato?

Zde jest řešiti rovnici

$$2x^2 + 7x + 6 = 190 \text{ čili } x^2 + \frac{7}{2}x = 92,$$

z kteréž náležitě omezené

$$(x+1)^2 < x^2 + \frac{7}{2}x = 92 < (x+2)^2$$

poznáme, že $x + 1 = 9$ a tedy $x = 8$.

Na př.: Z rovnice

$$x^3 + \frac{4}{5}x^2 = 76\frac{4}{5}$$

obdržíme $x = 4$.

Na př.: Je-li součet členů řady čísel kvadratických 650, kolik členů bylo tu sečteno?

Součtový vzorec řady této jest

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

tedy zde

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 650$$

neb

$$2n^3 + 3n^2 + n = 3900$$

čili

$$n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = 1950,$$

odkudž dostaneme

$$n = 12, \text{ protože } 12 < \sqrt[3]{1930} < 13.$$

O dvou místech geometrických.

Pojednal

V. Jeřábek, professor v Brně.

Dvěma vrcholy A, B rovnoramenného trojúhelníka ABC (AC = BC) prochází proměnlivá parabola P, jejíž přímka řídící otáčí se kolem třetího vrcholu C. Hledejme: 1. geom. místo ohniska paraboly, jeho tečnu a asymptoty; 2. geom. místo krajního bodu průměru paraboly, který středem strany AB prochází.