křivce v ploše zvolené (při isofotách třeba jen jednu křivku přiřaditi, srov. Jarolímek, Centrál. osvětlení str. 29 a Procházka, Vybrané statě, 1913, odst. 132.) můžeme sestrojiti isofengy jakékoli plochy vůbec; případné konstrukce ponecháváme do dalšího článku.

Poznámka ku křivosti a problému normál kuželoseček středových.

Napsal dr. **Jos. Kounovský.**

1. Kuželosečka středová, elipsa nebo hyperbola, protata jest, jak známo, rovnostrannou hyperbolou Apolloniovou, procházející jejím středem a úběžnými body jejích os, obecně ve čtyřech bodech, jichž normály mají na hyperbole Apolloniově společný průsečík. Dotýká-li se specielně Apolloniova hyperbola kuželosečky uvažované, stanou se dvě normály soumeznými a jich průsečík středem křivosti kuželosečky pro bod dotyčný. Tímto způsobem sestrojil poprvé středy křivosti kuželoseček p. prof. dr. *J. Sobotka* v práci „Die Krümmungs-Halbmesser-Eigenschaften der Kegelschnitte".*)

Naskýtá se tu otázka geometrického místa středů Apolloniových hyperbol dané kuželosečky se dotýkajících.

Budiž dána (obr. 1) elipsa k_2 o poloosách $a = SU = SU_1$, $b = SV = SV_1$. Uvažujme o Apolloniově hyperbole dotýkající se elipsy v bodě B. Sestrojíme-li pravoúhlé průměty B_1, B_2 bodu B do os elipsy k_2, nachází se střed C hyperboly na spojnici $B_1 B_2$, při čemž BC svírá s osami elipsy, t. j. s asymptotami hyperboly týž úhel jako tečna elipsy v bodě B.

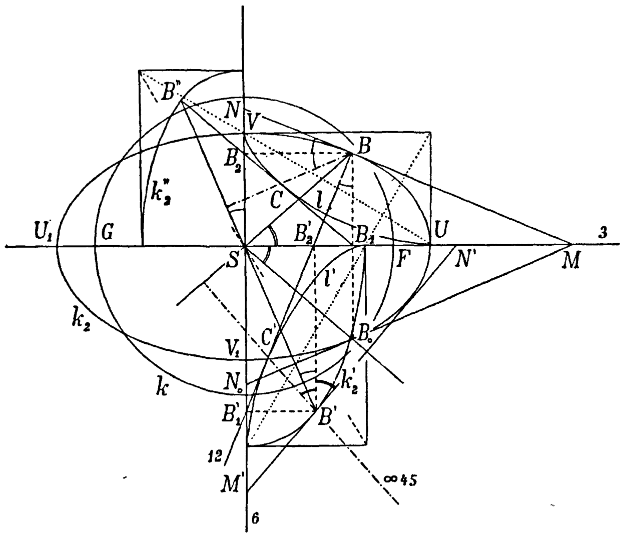
Za účelem stanovení geometrického místa l středu C sestrojme nejprve evolutu l' elipsy k_2 jako geometrické místo středů křivosti C' jejích bodů B. Střed křivosti C' určíme pomocí Steinerovy paraboly, dotýkající se os dané elipsy k_2, a její tečny a normály v bodě B, jako dotyčný bod na této normále; při tom jest SB řídicí přímkou paraboly. Označme normálu 12,

---

*) Věstník Král. čes. společnosti nauk, Praha 1894.

velkou osu elipsy 3, malou 6 a úběžnou tečnu paraboly s bodem dotyčným ∞ 45 ve směru na BS kolmém; i obdržíme Brianchonův bod B' jako společný bod přímek $\overline{2.3}\ \overline{5.6}$ a $\overline{3.4}\ \overline{6.1}$, $B'C' \perp BS$.

Označme ještě body $2.3 \equiv B'_2$, $6.1 \equiv B'_1$, průsečíky tečny elipsy k_2 v bodě B s jejími osami M, N a učiňme $SN_0 = SN$, takže MN_0 jest tečnou elipsy k_2 v bodě B_0, souměrném s B dle velké osy.



Obr. 1.

Vzhledem k involuci bodové, jejíž dvojiny tvoří průsečíky tečny a normály v bodech elipsy k_2 s její osou a jejímiž dvojnými body jsou ohniska F a G elipsy, jest přímka $B'B_2'$ polárou bodu M ke kružnici k, opsané ze středu S poloměrem rovným lineární výstřednosti elipsy $e = SF = SG$; a obdobně jest $B'B_1'$ polárou bodu N_0 (zmíněná involuce jest tu eliptická) vzhledem ku k. Z toho ihned plyne, že geometrickým místem bodu B' jest reciproká polára elipsy k_2 vzhledem ke kružnici k; jest to elipsa k_2' o poloosách

$$\frac{e^2}{a} = a - \frac{b^2}{a}, \ \frac{e^2}{b} = \frac{a^2}{b} - b,$$

tedy elipsa s danou podobná, jejími vrcholy jsou hlavní středy křivosti elipsy k_2; i jest z podobné polohy o pravý úhel vytočena.

Tečna $M'N'$ elipsy k_2' v bodu B' jest dle základních vztahů reciprokých polár polárou bodu B_0 vzhledem ku k, t. j. $M'N' \perp SB_0$; i jest tečna $B'N'$ souměrna s přímkou $B'C'$ dle osy $B'B_2'$, ježto i přímka SB_0 souměrna s přímkou SB dle osy SB_2'.

Ježto konstrukce bodu C' eliptické evoluty l' k elipse k_2' jest totožna s konstrukcí bodu C z elipsy k_2, jest geometrickým místem l bodu C rovněž eliptická evoluta, a to té elipsy k_2'', která má své hlavní středy křivosti ve vrcholech UU_1, VV_1 elipsy k_2; poloosy elipsy k_2'' jsou $\frac{ab^2}{a^2-b^2}$, $\frac{a^2b}{a^2-b^2}$, tedy $k_2 \sim k_2' \sim k_2''$, k_2' a k_2'' jsou homothetické.

Bod B'' elipsy k_2'' na její normále B_1B_2 obdržíme jako její průsečík s přímkou SB', ježto $BC \perp SB'$. $BC \perp SB''$. Omezení os docílíme konstruktivně sestrojením vrcholu opsaného obdélníka jako průsečíku spojnice UV a spojnice středu S s přiřazeným vrcholem obdélníka opsaného homothetické elipse k'_2, jak patrno z obrazce. Tím ukázáno:

Geometrickým místem středů Apolloniových hyperbol, dotýkajících se dané elipsy a určujících na normálách bodů dotyčných její středy křivosti, jest křivka šestého řádu a čtvrté třídy, souměrná dle os i středu elipsy, mající osy elipsy (a úběžnou přímku roviny) za dvojné tečny a ve vrcholech elipsy body úvratu; jest to evoluta jiné elipsy s danou podobné a možno ji sestrojiti jako obalovou křivku spojnic dvojin pravoúhlých průmětů bodů elipsy na její osy.

2. Dotyčné hyperboly Apolloniovy tvoří přechod mezi hyperbolami poskytujícími čtyři reálné normály a hyperbolami, které protínají danou elipsu jen ve dvou bodech reálných.

A. Desboves zkoumal ve svých analytických studiích*) zvláště geometrické místo pólu spojnice pat obou prostých nor-

---

*) Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques, Paříž 1861. Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre. Paříž 1862. (Kapitola první pojednává o normálách kuželoseček.)

mál, které poskytuje dotyčná hyperbola Apolloniova vedle normály dvojné, vzhledem ke kuželosečce uvažované. Křivka ta jest reciprokou polárou geometrického místa středů dotyčných Apolloniových hyperbol vzhledem k dané elipse, což dá se čistě geometricky snadno ukázati.

Desboves nazývá průsečík normál kuželosečky *bod normálně sdružený* k pólu spojnice jich pat vzhledem ke kuželosečce. Ježto bodem procházejí na elipsu k_2 obecně čtyři normály, jest každý bod v rovině elipsy k_2 normálně sdružen s třemi dvojinami protějších vrcholů čtyřstranu vytvořeného tečnami elipsy k_2 v patách příslušné čtveřiny normál. Ten zoveme *čtyřstran normálně opsaný*, paty normál tvoří *čtyrroh normálně vepsaný* dané k_2 (dle Desbovesa).

Apolloniova hyperbola tvoří s danou elipsou k_2 o poloosách a, b dvě kuželosečky svazku. Kuželosečky svazku vytínají na libovolné přímce dvojiny bodové involuce. Uvažujme ji zvláště na osách elipsy a označme I_a resp. I_b. Takovými dvojinami jsou průsečíky protějších stran čtyrrohu normálně vepsaného (jakožto zvrhlých kuželoseček svazku), střed a úběžný bod (jakožto průsečíky s hyperbolou Apolloniovou) a oba vrcholy elipsy. I jsou I_a a I_b patrně elliptické, mají střed ve středu elipsy a potenci $-a^2$ resp. $-b^2$, tedy zápornou s potencí hyperbolické involuce, stanovené na k_2 sdruženými póly na příslušné ose. Uvažujeme-li jinou Apolloniovu hyperbolu, obdržíme jiný svazek, nicméně I_a a I_b jsou tytéž jako v případě předešlém.

Strany čtyřstranu normálně opsaného jsou tečnami Steinerovy paraboly, která jest reciprokou polárou příslušné Apolloniovy hyperboly vzhledem ku k_2. Jedna taková parabola tvoří s elipsou řadu kuželoseček. Tečny sestrojené libovolným bodem na kuželosečky řady jsou dvojinami paprskové involuce. Sestrojíme-li na kuželosečky řady tečny úběžným bodem jedné osy, jsou dvojinami této involuce tato osa s přímkou úběžnou (tečny Steinerovy paraboly), tečny ve vrcholech na druhé ose elipsy a spojnice s dvojinami protějších vrcholů čtyřstranu normálně opsaného, kteréž dvojiny jsou zvrhlými kuželosečkami řady. Tato involuce zůstává tedy táž pro všecky zmíněné Steinerovy paraboly a protata jest druhou osou v bodové involuci eliptické, patrně I_a resp. I_b. I možno vysloviti větu:

Průsečíky protějších stran čtyřrohů dané elipse normálně vepsaných s její osou a pravoúhlé průměty protějších vrcholů čtyřstranů elipse normálně opsaných na tuto osu jsou dvojinami téže bodové involuce, jejímž středem jest střed elipsy a potencí záporně vzatý čtverec příslušné poloosy.

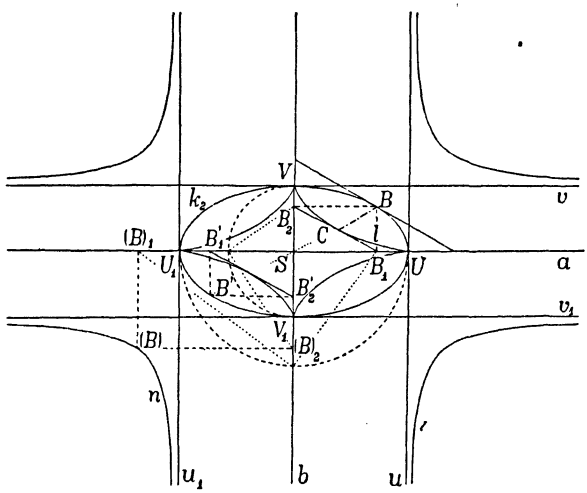
Dle této věty, kterou A. Desboves připisuje *A. Mannheimovi*, možno ihned sestrojiti protější vrchol čtyřstranu normálně opsaného, je-li jeden vrchol dán, a jest ovšem reálný, i když strany čtyřstranu v něm se protínající nebo příslušné vrcholy čtyřrohu normálně vepsaného jsou imaginárné. Součin vzdáleností obou bodů $B(B)$ dvojiny od os dané elipsy jest $-a_2$ resp. $-b^2$, t. j. nachází-li se B mezi osou a vrcholovou tečnou, nachází se (B) za vrcholovou tečnou protější. Nachází-li se B v poli mezi čtvrtinou elipsy a oběma jejími příslušnými vrcholovými tečnami, procházejí bodem B i sdruženým (B) na elipsu reálné tečny, i jest normálně sdružený bod takového rázu, že procházejí jím na elipsu čtyři reálné normály. Při tom mají druhá a třetí dvojina protějších vrcholů $D(D)$, $E(E)$ tu polohu, že D a E nacházejí se v pásu vrcholových tečen uu_1 a mimo pás vrcholových tečen vv_1, body (D) a (E) obráceně (obr. 2). Dvojina druhu $D(D)$ zaručuje ovšem zase dvojinu druhu $B(B)$. V těchto případech jest bod normálně sdružený jakožto průsečík dvou tečen téže čtvrtiny evoluty dané k_2 vnitřním bodem plochy této evoluty, jak již Joachimsthal vyslovil podmínkou čtyř reálných řešení.

Probíhá-li B vrcholovou tečnu u nebo v, probíhá (B) tečnu u_1 resp. v_1 a bod normálně sdružený osu a resp. b.

Uvažujme nyní o Appolloniových hyperbolách, jež se dané k_2 dotýkají, a o dvojinách $B(B)$ protějších vrcholů čtyřstranů normálně opsaných, kde B jest dotyčný bod hyperboly na k_2 (obr. 2). Označíme-li pravoúhlé jich průměty do os elipsy B_1, B_2 resp. $(B)_1$, (B_2), sestrojíme snadno (B) pro zvolený B na k_2 ze vztahů $SB_1 \,.\, S(B)_1 = -a^2$, $SB_2 \,.\, S(B)_2 = -b^2$. Nebo sestrojíme body $(B)_1$ a $(B)_2$ jako sdružené póly bodů B'_1 resp. B'_2 vzhledem ku k_2, jsou-li B_1' a B_2' pravoúhlé průměty bodu B', s bodem B na k_2 protějšího, do jejích os.

Bod (B) jest pólem spojnice $B_1'B_2'$ nebo antipólem spojnice B_1B_2 vzhledem ku k_2. Probíhá-li bod B danou k_2, opisuje bod (B) křivku n antipolárně reciprokou s křivkou l, která jest obalovou křivkou spojnic $B_1 B_2$, vzhledem k základní kuželosečce k_2. I docházíme hned k výsledku:

Geometrickým místem pólu spojnice pat obou prostých normál, které poskytuje dotyčná hyperbola Apolloniova, vzhledem k dané elipse, jest křivka čtvrtého řádu a šesté třídy, souměrná dle os i středu elipsy, mající v úběžných bodech os



Obr. 2.

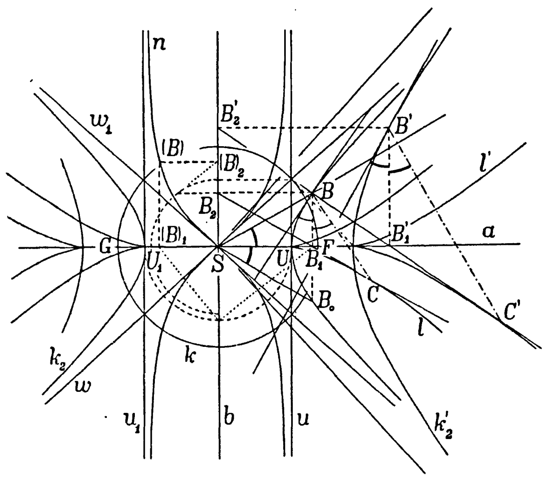
elipsy dvojné body; vrcholové tečny elipsy jsou tečnami obratu křivky v těchto úběžných bodech dvojných. Jest reciprokou polárou geometrického místa středů dotyčných hyperbol Apolloniových vzhledem k elipse dané.

Nachází-li se obráceně jeden vrchol čtyřstranu normálně opsaného na křivce n, nachází se protější vrchol na k_2, t. j. Apolloniova hyperbola dotýká se k_2.

Nachází-li se (B) v poli mezi k_2 a n, nachází se v témž poli i sdružený B a příslušná hyperbola Apolloniova skýtá čtyři řešení reálná. Při tom střed hyperboly C leží uvnitř křivky l.

Nachází-li se (B) v kterémkoli kvadrantu mimo křivku n, jest B vnitřním bodem k_2, i jsou jen dvě řešení reálná. Při tom C leží mimo plochu křivky l.

3. Je-li uvažovaná kuželosečka k_2 hyperbola, nezmění se provedené úvahy podstatně, jen involuce I_b na vedlejší její ose jest hyperbolická. Křivka l (obr. 3) jest *hyperbolickou evolutou*, jak dá se opět ukázati pomocí evoluty l' dané hyperboly k_2 a hyperboly k_2', reciproké poláry s k_2 vzhledem k základní k. Vrcholové tečny uu_1 a asymptoty ww_1 hyperboly k_2 jsou tečnami obratu křivky n v dvojných jejích bodech.



Obr. 3.

4. Křivky n jsou specielní křivky čtvrtého řádu s třemi dvojnými body s tečnami obratu, jak vidno z reciprokého jich vztahu s evolutami l, majícími tři dvojné tečny s body úvratu v bodech dotyčných (osy a úběžná přímka roviny). Poprvé studoval je analyticky *J. De la Gournerie* *), syntheticky *P. H. Schoute* **) a současně *C. Beyel* ***).

*) Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symmétriques, Paříž 1867.

**) »Über die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten«, Grunert-Hoppe, Archiv der Math. u. Phys., 2. řada, 2., 3., 4. a 6. svazek. Lipsko 1885—1888. — Analyticky v článku »Les quartiques à trois points doubles d'inflexion«, Jornal de sciencias mathem. e astron., XIII. vol. Coimbra 1897.

***) »Die Curven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten«, Schlömilch-Kahl-Cantor, Zeitschrift f. Math u. Phys., 30. roč., Lipsko 1885.

Gournerie nazývá křivku n harmonická trinodála, křivku l harmonická trilaterála (s ohledem na plochy kvadrispinální, při jichž studiu k nim dochází), Schoute zove trinodálu eliptickou „Kreuzkurve“ a hyperbolickou „Kohlenspitzenkurve“ *) Harmonické trinodály vzniknou jako centrálné průměty obecných křivek čtvrtého řádu s třemi dvojnými body, volíme-li jen náležitě střed promítání i průmětnu; při tom jedna strana základního trojúhelníku jest úběžná, ostatní dvě mohou býti kosé, specielně vzájemně kolmé. Střed trinodály eliptické jest pak jejím dvojným bodem isolovaným, právě tak úběžný bod hlavní osy základní hyperboly pro trinodálu hyperbolickou.

Naším úkolem bylo ukázati jen na význam obou duálních křivek vzhledem k základní kuželosečce středové při posuzování reálnosti problému jejích normál, při čemž dá se trinodála snadno z evoluty odvoditi.

O konstituci látky a poměru hmoty a energie.

Dr. Václav Posejpal.

(Pokračování.)

§ 3. Stanovení čísla N z pohybu tělísek Brownových.

Popis mathematický pohybů Brownových podal na základě theorie kinetické Einstein r. 1905 a 1906. Skoro současně s ním, ale přece později a méně úplně řešil touž úlohu Smoluchovski. Perrin vyzkoušel, částečně za pomoci svých žáků, správnost theorie Einsteinovy jak na translačních, tak i na rotačních pohybech tělísek, i na zákonech diffuse těchto tělísek v různých emulsích, jež rovněž z Einsteinovy theorie vyplývají. Omezím se zde na podrobnější zmínku o měření z pohybů translačních, jež přivedlo k hodnotě N téměř identické s hodnotou nalezenou z rozdělení tělísek do výšky, totiž $68{\cdot}8 \,.\, 10^{22}$ proti $68{\cdot}3 \,.\, 10^{22}$.

*) Poznámka. Je-li

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ rovnicí k_2, jest $\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 1$ rovnicí křivky n; tu uvádí poprvé Terquem v »Nouv. annales de mathém.« (tome 6, Paříž 1847), mylně však jako polárně reciprokou křivku s k_2 vzhledem k základní kružnici $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.