Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

J. S. Vaněček

Opravy chybných rčení při transformaci pomocí reciprokých provodičů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 2, 67--72

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121433

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1885

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Opravy chybných rčení při transformaci pomocí reciprokých provodičů.

Napsal

J. S. Vaněček, professor v Jičíně.

1. Při geometrických výzkumech užívá se dosti často transformace pomocí reciprokých provodičů*) a to i s chybami, které se do této transformace vloudily. Hlavní příčinou těchto chyb jest ta, že se ku transformaci této nepřihlíželo se stanoviska čistě geometrického.

V článku tomto chci opraviti chybná rčení, jak jsem je při svých výzkumech v tomto oboru seznal.

K transformaci pomocí reciprokých provodičů jak v rovině tak v prostoru dospěl jsem cestou čistě geometrickou.

Pro všeobecnou inversi v rovině jest následující poučka poučkou základní:

Pohybuje-li se polárný trojúhelník vzhledem k základní kuželosečce K *v rovině této křivky tak, že jeho dva vrcholy* l_1, l_2 *probíhají pořadem křivky* L, M *řádů* l, m, *pak popisuje jeho třetí vrchol* l_3 *křivku* (l_3) *řádu* 2lm-*tého.*

Jestliže jedna z křivek L, M přejde v přímku, obdržíme transformaci Hirstovu, a stane-li se ještě k tomu úběžnou přímkou roviny kuželosečky K, která je kružnicí, tedy přejde všeobecná inverse v transformaci pomocí reciprokých provodičů.

2. Nechme jednu z křivek L, M přejíti v přímku; pak obdržíme tři body zvláště význačné, totiž: základní body *a, b* přímky M, ve kterých tato přímka protíná kuželosečku K, a pak její pól *m.*

Pozorujme kterýkoliv bod l_1 přímky M jakožto bod útvaru L, který se má transformovati. Jeho polára λ_1 protíná M v bodu l_2, jehož polára λ_2 protíná λ_1 v bodu *m,* který je tudíž odvozeným bodem. Z toho je patrno, že *každý bod přímky* M *přetvoří se v pól této přímky.*

*) Ponechal jsem zde pojmenování, jakéž zavedl J. Liouville, a kterého nyní Francouzové užívají, poněvadž se mi zdá býti případnějším názvem pro tento zvláštní případ všeobecné inverse než pouhé pojmenování „inverse“.

Přijde-li bod l_1 do polohy a, tedy se obě přímky λ_1, λ_2 sjednocují a to v tečně v tomto bodu ku K vedené, a tečna ta A se může považovati za odvozený útvar bodu a. Z toho následuje, že *kterýkoliv základní bod přímky* M *transformuje se v tečnu v tomto bodu ku křivce* K *vedenou.*

Třetí vrchol polárného trojúhelníku příslušného některému bodu tečny A nalézá se stále v bodu a. Tedy: *Každý bod, vyjma body* a, m *tečny* A *ku křivce* K *v bodu* a *vedené přetvoří se v bod* a.

Poněvadž se polára bodu m sjednocuje s přímkou M, tedy můžeme říci: *pólu* m *přímky* M *odpovídá tato přímka.*

Nazveme-li body a, b, m základními body a přímky, které je spojují, základními přímkami transformace, pak můžeme všecky předešlé výsledky shrnouti v tuto poučku:

každému základnímu bodu transformace odpovídá jeho polára. Každá základní přímka se transformuje v poláry základních bodů, které na ní leží.

3. V transformaci pomocí reciprokých provodičů jest kuželosečka K kružnicí, a přímka M je úběžnou přímkou její roviny. Body a, b přejdou v kruhové body, jež jsou úběžné a pomyslné, a bod m přijde ležeti do středu kružnice K.

Poslední poučka předešlého odstavce podává se obyčejně takto: *přímce* ab *odpovídá střed inverse; přímce* am *odpovídá bod* a *a přímce* bm *bod* b.

Z předešlých úvah vysvítá patrně, že toto rčení není správným, neboť pomyslné přímky am, bm náleží taktéž k odvozenému obrazci.

4. Jakákoliv přímka L transformuje se v křivku (l_3) druhého řádu. Prochází-li L bodem a neb bodem b, tedy se kuželosečka (l_3) rozpadá ve dvě přímky, totiž v tečnu v bodu a nebo b ke kuželosečce K a pak v přímku, která spojuje druhý průsečný bod přímky L a kuželosečky K s bodem b neb a.

Prochází-li přímka L bodem m, tedy se transformuje v samu sebe a v přímku M. Z toho plyne: *přímka procházející některým základním bodem transformace transformuje se ve dvě přímky, z nichž jedna je polárou tohoto základního bodu.*

Dle posavádního pojmu se druhá část rozpadlé kuželosečky (l_3) neuvádí, neboť se pravívá: přímce procházející středem inverse odpovídá *přímka;* a dále: přímka může se považovati za kružnici mající svůj střed v nekonečnu, což je nesprávné, poněvadž k řečené přímce náleží ještě *úběžná přímka.*

5. Jakákoliv kuželosečka L transformuje se všeobecně v křivku čtvrtého řádu, která prochází průsečnými body přímek L, M s K, při čemž základní body na M jsou dvojnými body křivky odvozené.

Je-li kuželosečka L kružnicí, jakož i K, pak prochází kruhovými body a, b kružnice K. Tyto body jsou základními body transformace, a následovně křivka (l_3) se rozpadá ve dvě isotropické přímky vycházející z bodu m, který je středem inverse, a pak v kuželosečku, která prochází body a, b; z toho následuje, že jest kružnicí.

Tu pak se obyčejně pravívá: kružnici odpovídá opět kružnice v transformaci pomocí reciprokých provodičů. Jak patrno, vynechávají se ony isotropické přímky, které se v reálném bodu protínají a druhou část odvozené křivky tvoří.

6. Jednomu bodu roviny, ve které se nalézá kuželosečka základní K, odpovídá všeobecně jeden aneb více bodů odvozeného útvaru při transformaci všeobecné. Daný bod i jeho odvozený jsou vrcholy polárného trojúhelníku. Z toho následuje, že bodu ležícímu zevnitř kuželosečky K odpovídá opět bod, který leží zevnitř K, jakmile druhý vrchol trojúhelníku polárného leží uvnitř křivky K.

V případu transformace pomocí reciprokých provodičů nalézá se přímka M, jež je místem druhých vrcholů trojúhelníka $l_1 l_2 l_3$, v nekonečnu a základní kuželosečka je kružnicí; za tou příčinou odpovídá vždy zevnitřnímu bodu l_1 bod l_3 uvnitř K ležící, a naopak.

Při této příležitosti jest záhodno poukázati na nesrovnalosť, jaké se dopustil Geiser, když uvažoval o tomto vzájemném si odpovídání bodu daného a bodu odvozeného. *)

Dovoluji si uvésti doslovně dotyčnou stať:

„Im Allgemeinen gehört zu jedem beliebigen Punkte p stets ein und nur ein Punkt p', welchem umgekehrt wiederum der Punkt p zugeordnet ist. Eine Ausnahme macht der Punkt M, denn ihm entspricht, da für ihn die Richtung Mp (M zna-

---

*) Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie, p. 160.

mená střed inverse) unbestimmt wird, jeder beliebige Punkt im Unendlichen, während jedem Punkte, der im Unendlichen liegt, der Punkt M zugeordnet ist. Will man also dem im Allgemeinen richtigen Satze, dass nach der aufgestellten Beziehung zwischen den Punktenpaaren p und p' zu irgend einem Punkte p der Ebene stets ein und nur ein Punkt p' gehöre, nicht eine Ausnahme beifügen, für den Fall, dass p im Unendlichen liegt, so muss man annehmen, dass vom Gesichtspunkte der Beziehung aus die sämmtlichen unendlich entfernten Punkte der Ebene so angesehen werden können und müssen, als ob sie sich in einen einzigen vereinigten, *den unendlich entfernten Punkt der Ebene,* was im Widerspruche steht mit dem Begriffe der unendlich entfernten Geraden der Ebene. Es zeigt dies, dass man sich also jedesmal bei Einführung derartigen Begriffe genau darüber klar sein muss, unter welchen Bedingungen dieselben ihre Giltigkeit haben."

Avšak Geiser sám v této stati praví: „každý libovolný bod v nekonečnu," což dokazuje, že připouští více než jeden úběžný bod roviny.

Proč dále dí: „jednomu bodu p odpovídá, *všeobecně,* vždy jediný bod p'," když nechce připustiti výjimku?

Tuto Geiserovu nejistotu můžeme si vysvětliti tím, že nezpozoroval, že transformuje úběžnou přímku roviny vzhledem k ní samé.

V článku uveřejněném v zasedacích zprávách Mnichovské Akademie věd ze dne 3. června 1882 jsem dokázal, že křivka M řádu m-tého se transformuje vzhledem k sobě v křivku $m(m-1)$-ho řádu.

Je-li M přímkou, či křivkou prvního řádu, pak obdržíme, že odvozená křivka je nultého řádu, či jinými slovy, že jest bod, to jest pól přímky M. Poněvadž jest přímka M v nekonečnu, tedy se transformuje ve střed základní kuželosečky.

7. Při transformaci roviny pomocí reciprokých provodičů se praví, že se transformuje v plochu kulovou, která prochází středem inverse.

Při tom zůstaly nepovšimnuty ještě dvě roviny, které procházejí středem základní plochy kulové a dotýkají se této v průsečných jejích bodech s přímkou M. Roviny ty jsou při transformaci pomocí reciprokých provodičů vždy pomyslnými.

8. Dále se obyčejně praví, že kulové ploše, která neprochází středem inverse, odpovídá jiná kulová plocha.

Avšak plocha druhého stupně transformuje se v plochu osmého řádu. Při transformaci pomocí reciprokých provodičů leží přímka M v rovině P, a plocha odvozená se rozpadá ve dvě dvojnásobné tečné roviny ku ploše základní v základních bodech přímky M a pak v plochu čtvrtého řádu.

Úběžná pomyslná kruhová čára I základní plochy kulové jest dvojnásobnou čarou této plochy čtvrtého řádu. Poněvadž jest čára I společnou plochám L, P a K, tedy se transformuje v isotropickou kuželovou plochu 2. řádu, která má svůj střed ve středu p plochy základní, kterýžto bod je pólem roviny P.

Z toho vidíme, že se druhá část odvozené plochy osmého řádu opět rozpadá a sice v onu kuželovou plochu isotropickou a pak v plochu druhého řádu.

Poněvadž pak tato plocha prochází kruhovou čarou I, tedy jest kulovou plochou, která prochází průsečnicí plochy kulové L s plochou základní.

Prochází-li plocha kulová L středem základní plochy kulové, pak se ona část odvozené plochy, kterážto část je plochou kulovou, opět rozpadá a sice v úběžnou rovinu a v rovinu průsečnice plochy L s plochou základní. Ostatní části rozpadlé plochy odvozené jsou tytéž jako bylo uvedeno.

9. Kruhová čára L, která prochází středem plochy základní, transformuje se v jinou kruhovou čáru, poněvadž prochází průsečnými body křivky L s plochou základní a dva z nich jsou kruhové body; dále se transformuje ve dvě isotropické přímky procházející středem plochy základní a kruhovými body křivky L; a konečně transformuje se ještě ve čtyry přímky pomyslné, jež se dotýkají plochy základní v jejích průsečných bodech s přímkou M.

10. Transformace roviny úběžné jest zvláštní případ, poněvadž se tu transformuje tato rovina vzhledem k sobě samé a k přímce M, která v ní leží.

Obdržíme isotropickou plochu kuželovou druhého řádu mající svůj střed ve středu plochy základní a dvě pomyslné roviny tečné v průsečných bodech přímky M s plochou základní k této ploše.

Až posud všímali si geometrové pouze reálného středu plochy isotropické.

O přístroji ku zkoumání proudů v induktorech elektrodynamických strojů.

Podává

Josef Vocásek,
professor v Hradci Králové.

Chci tuto popsati přístroj, kterýž jsem původně smyslil hlavně k tomu účelu, abych zkusmo dovodil, že návodné proudy v závitech otáčejícího se induktoru nějakého elektrodynamického stroje — a sice v jeho polovicích indifferentními místy oddělených — mají směry opačné.

Základní pokus k vysvětlení strojů elektrodynamických dá se provésti — ovšem ale nepřímo — tak, že svitek isolovaného drátu, jehož konce spojeny jsou s galvanoměrem, pošine se jednou přes jednu a pak přes druhou polovici kotouče ze železných drátů složeného, jenž jest mezi různými poly magnetu umístěn. Při tom, jak známo, odkloňuje se magnetka galvanoměru různým směrem. Mně zdá se však, že pokus, provedený s induktorem elektrodynamického stroje *skutečně se otáčejícím,* pozorovatele více uspokojuje, ježto se takto přímo přesvědčuje o pravosti výsledku, podmíněného známými zákony proudů návodných. Mimo to shledáme, že ještě jiné zajímavé pokusy s tímže přístrojem provésti se dají, kteréž nemálo princip strojů elektrodynamických objasňují.

Mysleme si, že se otáčí induktor stroje elektrodynamického, na př. Grammeův kruh, v poli magnetickém, totiž mezi různými magnetickými poly průměrně protilehlými, při čemž jsou stále vodivě spojena indifferentní místa, ta totiž, která od magnetických polů o 90^0 odstávají a z nichž jedno tvoří kladný, druhý pak záporný pol induktoru.

Tehdy proudí vnějším vodičem galvanický proud od kladného polu k zápornému. Návodné proudy, vzniklé v různých