František Kadeřávek

Příspěvek k theorii hyperboly rovnoosé

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 4-5, 411--415

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121504

b) Průsečná křivka plochy S^4 s průmětnou π a některé konstrukce této křivky.

c) Dvojná křivka plochy S^4.

5. Svazek hyperbolických paraboloidů, v němž obsažené jednotlivé hyperbolické paraboloidy jsou naplněny asymptotami kuželoseček na ploše S^3 ležících, jež náleží do lineární kongruence tečen plochy podél přímky u_∞ a nacházejí se v rovinách jdoucích určitou přímkou plochy S^3.

6. Geometrické místo středů kuželoseček, v nichž protíná plochu S^3 svazek rovin mající za osu libovolnou povrchovou přímku této plochy.

7. Rovnostranný hyperbolický paraboloid jakožto geom. místo středů všech kuželoseček na ploše S^3 ležících.

8. Vztah mezi hyperbolickým paraboloidem oskulačním podél přímky u_∞ plochy S^3 a hyperbolickým paraboloidem naplněným středy kuželoseček plochy S^3.

9. Zdánlivé obrysy plochy S^3.

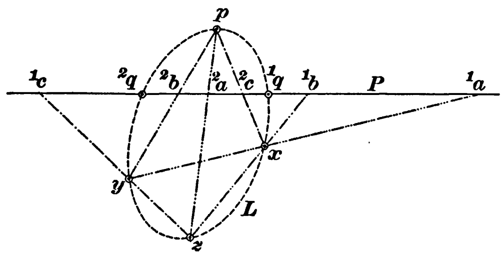
Příspěvek k theorii hyperboly rovnoosé.

Doc. Dr. **Fr. Kadeřávek.**

Kuželosečka K (obr. 1.) buď dána trojúhelníkem polárným xyz, přímkou P a jejím pólem p, mimo to vytkněme v přímce P dva harmonické póly ^1q, ^2q křivky K. Libovolně je nesmíme vytknouti, neboť křivka K indukuje v přímce P involuci ^1a, ^2a; ^1b, ^2b; ^1c, ^2c — bodům $^1a \equiv (P, \overline{xy})$, $^1b \equiv (P, \overline{xz})$, $^1c \equiv (P, \overline{yz})$ náležejí totiž poláry $\overline{pz}$, $\overline{py}$, $\overline{px}$, protínající přímku P v bodech ^2a, ^2b, ^2c — a k této involuci musí příslušeti i vytčená dvojina ^1q, ^2q. Proložíme-li body $x, y, z, {}^1q, {}^2q$ kuželosečku L, prochází tato též bodem p, neboť kuželosečky L; $\overline{xy}, \overline{pz}$; $\overline{xz}, \overline{py}$; $\overline{yz}, \overline{px}$ body xyz a dvojinami involuce v přímce P určené tvoří svazek a procházejí proto vesměs ještě 4tým základním bodem p. Je z toho patrno, že:

a) Dán-li polárný trojúhelník xyz a v přímce P dva harmonické póly ^1q, ^2q kuželosečky K, tu pól přímky P je obsažen v kuželosečce L, určené body $x, y, z, {}^1q, {}^2q$.

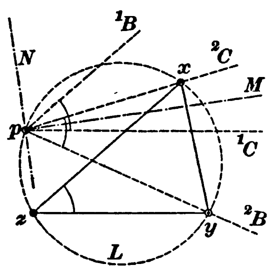
b) Střed kuželosečky dané polárným trojúhelníkem xyz a směry ${}^1Q'$, ${}^2Q'$ dvou sdružených průměrů leží v kuželosečce určené body x, y, z a směry asymptot ${}^1Q'$, ${}^2Q'$.



Obr. 1.

c) Střed hyperboly rovnoosé, dané polárným trojúhelníkem xyz, leží na kružnici L trojúhelníku xyz opsané.

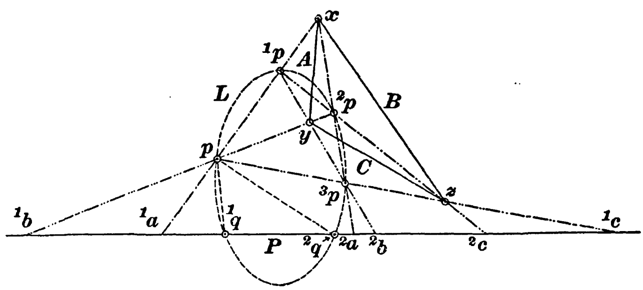
Poslední větu lze též přímo dokázati (obr. 2.): Vytkněme v kružnici L body x, y, z, p a hledejme asymptoty křivky 2^0



Obr. 2.

středem p a polárným trojúhelníkem xyz určené. K průměru ${}^2B \equiv \overline{py}$ sdružený ${}^1B$ je rovnoběžný s $\overline{xz}$ a k ${}^2C \equiv \overline{px}$ je sdružen ${}^1C \parallel \overline{zy}$. Úhel ${}^1B\,{}^1C$ je roven úhlu xzy a ten úhlu ${}^2B\,{}^2C$ s ním nad týmž obloukem $\widehat{xy}$ stojícímu a proto i $\sphericalangle\, {}^1B\,{}^2C = \sphericalangle\, {}^1C\,{}^2B$. Jsou tudíž symetrály úhlů ${}^1B\,{}^2B$ též symetrálami M, N úhlů ${}^1C\,{}^2C$ a tudíž samodružnými paprsky involuce průměrů ${}^1B\,{}^2B$; ${}^1C\,{}^2C$. Je proto křivka, polárným trojúhelníkem xyz a středem p v kružnici xyz položeným určená, rovnoosou hyperbolou.

Věty *c*) možno užiti k vyšetření středu hyperboly rovnoosé, dané 4mi tečnami (reálnými neb i imaginárnými[1])). V osnově kuželoseček danými tečnami stanovené určeme přímku S středovou a společný trojúhelník polárný, jemuž opišme kružnici L. Průsečíky (S, L) jsou žádané středy dvou danými tečnami určených hyperbol rovnoosých.



Obr. 3.

Dán-li svazek kuželoseček základními body p, ${}^1p$, ${}^2p$, ${}^3p$ (obr. 3.), sestrojme společný polárný trojúhelník xyz a obecnou křivku L svazku, jejíž průsečíky s danou přímkou P buďtež ${}^1q$, ${}^2q$. Tyto body náležejí do involuce, z níž v obraze vytčeny dvojiny ${}^1a$, ${}^2a$; ${}^1b$, ${}^2b$; ${}^1c$, ${}^2c$. Stanovme nyní kuželosečku K určenou bodem p, příslušnou polárou P, v níž znejme involuci harm. polů ${}^1a$, ${}^2a$; ${}^1b$, ${}^2b$ . . . a tečnou A. K bodu ${}^2a$ přináleží tu polára $\overline{p\,{}^1a}$, protínající A v bodě x. Stanovíme-li k paprskům $\overline{{}^1ax}$, $\overline{{}^2ax}$, A čtvrtý harmonický, je to vzhledem k čtyřúhelníku p, ${}^1p$, ${}^2p$, ${}^3p$ přímka B, určili jsme tím další tečnu křivky K. Podobně pomocí pólu ${}^2b$ a poláry $\overline{p\,{}^1b}$ dokážeme, že i C je tečnou křivky K. Proto:

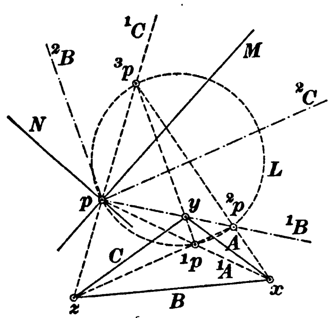
d) Jsou-li dány tři tečny $\overline{xy}$, $\overline{yz}$, $\overline{zx}$ a v přímce P dva harmonické póly ${}^1q$, ${}^2q$ kuželosečky K, tu pól přímky P leží v kuželosečce jdoucí body ${}^1q$, ${}^2q$ a mající v trojúhelníku xyz trojúhelník polárný.

---

1) Řešení hyperboly rovnoosé ze 4 imag. tečen podal p. dv. rada V. Jarolímek (Rozpravy České akademie císaře Františka Josefa, roč. XXIV., tř. II., č. 11.).

e) Kružnice L, pro niž tři tečny hyperboly rovnoosé K jsou stranami polárného trojúhelníka, prochází středem křivky K[1]).

Výsledku tohoto můžeme opět použiti k řešení hyperboly rovnoosé, dané 4mi tečnami. Větu *e*) lze opět přímo dokázati (obr. 4.): Vytkneme-li střed p kuželosečky, dané tečnami ABC v kružnici L, pro niž $\triangle ABC$ je polárným, tu sestrojme na paprscích $\overline{px}$, $\overline{py}$, $\overline{pz}$ body ${}^1p$, ${}^2p$, ${}^3p$, čtvrté harmonické k bodu p vzhledem k polárnému trojúhelníku xyz a dostáváme další body křivky L. Průměru ${}^1C \equiv \overline{pz}$ křivky K bude sdružen průměr ${}^2C$, rovnoběžný s přímkou $\overline{z\,{}^1p\,{}^2p}$ jakožto čtvrtou harmonickou k průměru ${}^1C$ vzhledem k tečnám B, C; podobně k průměru ${}^1B \equiv \overline{py\,{}^2p}$ sdružený ${}^2B \parallel \overline{{}^3p\,y\,{}^1p}$, z čehož patrno, že v bodě p



Obr. 4.

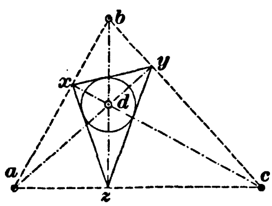
určená involuce průměrů sdružených dána je dvojinami ${}^1B$, ${}^2B$; ${}^1C$, ${}^2C$; jež vznikly spojením vrcholů trojúhelníka ${}^1p\,{}^2p\,{}^3p$, do kružnice L vepsaného, s bodem p a vedením rovnoběžek s jednotlivými jeho stranami, opět bodem p. Je to tedy týž případ, jako v obr. 2. Samodružné paprsky, asymptoty M, N dané křivky K i zde tvoří úhel pravý.

Povšimněme si ještě obrazu čís. 5. Buď dán svazek hyperbol rovnoosých o základních bodech a, b, c; čtvrtý d je průsečíkem výšek trojúhelníka abc, jejichž patami x, y, z určen jest společný polárný trojúhelník svazku. Čtveřina $\overline{axb}$, $\overline{xdc}$, $\overline{xy}$, $\overline{xz}$ jest harmonickou a jedna dvojina v ní, $ab \perp xc$, jest orthogonální, jest

[1]) Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, I., 1, 1906, p. 309.

tedy $\sphericalangle zxc = \sphericalangle cxy$. Jsou tedy body a, b, c, d středy kružnic do trojúhelníka xyz vepsaných. Z toho patrno:

f) Hyperbola rovnoosá prochází středy a, b, c, d kružnic, do polárného trojúhelníka xyz vepsaných.



Obr. 5.

Jsou-li tudíž dány 4 tečny hyperboly rovnoosé, možno po sestrojení polárného trojúhelníka sestrojiti 4 body žádané křivky a provésti řešení větou Desargues-ovou.

I tuto větu možno vysloviti pro kuželosečky obecné a z odvozených vět další získati principem duality.

Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kružnic.

(Důkazy vět, uveřejněných Steinerem v Crelleově Journalu sv. XLV. str. 189—211, Gesammelte Werke d. II. str. 445—468.)

Dr. O. Vetter.

I.

§ 1. V pojednání „Über einige neue Bestimmungsarten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven“ uveřejnil Steiner bez důkazů řadu vět o kuželosečkách, které se dvojnásobně dotýkají dvou daných kružnic.

Z prací, jež důkazy těchto vět podávají, uvádím zvláště tři: Sporer, „Über Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren“ (Zeitschr. f. Math. u. Phys, sv. XLI. str. 210—220), Schüssler, Über Kreise, welche Kegelschnitte doppelt berühren“