Karel Petr

Několik poznámek o determinantech

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 4, 311--321

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121607

t. j. differenciální poměr skaláru v dle vektoru $\mathbf{r}$ ve směru $\mathbf{s}$ jest vektor téhož běhu $\mathbf{s}$, jehož skalární částí jest $\frac{dv}{ds}$.

(Pokračování.)

Několik poznámek o determinantech.

Napsal **K. Petr.**

I.

Nejprve chci poukázati na zcela jednoduchý a pokud mi známo dosud nepovšimnutý způsob, jak lze odvoditi vztahy mezi determinanty utvořenými z elementů matice určité hodnosti μ. Říkáme, že matice

$$a_{ik}\,; \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

jest hodnosti μ, jsou-li všecky determinanty $|a_{rs}|$ stupně vyššího nežli μ-tého rovny nulle a je-li aspoň jeden determinant $|a_{rs}|$ stupně μ od nully různý.

Vyšetřujme, jaké jsou vztahy mezi determinanty stupně μ-tého. Za tím účelem vezmeme v úvahu tento determinant:

$$D = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1}, & a_{i_1 j_2}, & \ldots & a_{i_1 j_\mu}, & x_1 a_{i_1 k_1}, & x_2 a_{i_1 k_2}, & \ldots & x_\mu a_{i_1 k_\mu} \\ a_{i_2 j_1}, & a_{i_2 j_2}, & \ldots & a_{i_2 j_\mu}, & x_1 a_{i_2 k_1}, & x_2 a_{i_2 k_2} & \ldots & x_\mu a_{i_2 k_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\mu j_1}, & a_{i_\mu j_2}, & \ldots & a_{i_\mu j_\mu}, & x_1 a_{i_\mu k_1}, & x_2 a_{i_\mu k_2}, & \ldots & x_\mu a_{i_\mu k_\mu} \\ a_{l_1 j_1}, & a_{l_1 j_2}, & \ldots & a_{l_1 j_\mu}, & y a_{l_1 k_1}, & y a_{l_1 k_2}, & \ldots & y a_{l_1 k_\mu} \\ a_{l_2 j_1}, & a_{l_2 j_2}, & \ldots & a_{l_2 j_\mu}, & y a_{l_2 k_1}, & y a_{l_2 k_2}, & \ldots & y a_{l_2 k_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l_\mu j_1}, & a_{l_\mu j_2}, & \ldots & a_{l_\mu j_\mu}, & y a_{l_\mu k_1}, & y a_{l_\mu k_2}, & \ldots & y a_{l_\mu k_\mu} \end{vmatrix}$$

Tento determinant na základě supposice, že matice a_{ik} jest hodnosti μ, a vzhledem ku Laplace-ově větě rozkladné jest rovný nulle, když $y = x_1$. Ze stejných příčin jest rovný nulle i pro $y = x_k$. Poněvadž pak jest to polynom μ-tého stupně, jest nutně

$$D = A(y - x_1)(y - x_2) \ldots (y - x_\mu),$$

kde A jest na y (a rovněž na $x_1, \ldots, x_\mu$, jak snadno nahlédnouti) nezávislé.

Vypočteme-li tudíž součinitele, jimiž v daném determinantu jsou násobeny různé výrazy $(-1)^{\mu-k} y^k x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_{\mu-k}}$, ($r_1$, $r_2, \dots$ různá čísla z řady $1, 2, \dots \mu$), dostaneme pro tyto součinitele výrazy vesměs sobě rovné a obdržíme tak řadu vztahů mezi determinanty stupně μ z dané matice. Nejjednodušší a také nejdůležitější vztah plyne ze srovnání koefficientů čísel y^μ a $(-1)^\mu x_1 x_2 \dots x_\mu$. Dostáváme tak, zavedeme-li pro stručnost označení

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots i_\mu \\ j_1, j_2, \dots j_\mu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1}, & a_{i_1 j_2}, & \dots & a_{i_1 j_\mu} \\ a_{i_2 j_1}, & a_{i_2 j_2}, & \dots & a_{i_2 j_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\mu j_1}, & a_{i_\mu j_1}, & \dots & a_{i_\mu i_\mu} \end{vmatrix},$$

tento známý vztah

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots i_\mu \\ j_1, j_2, \dots j_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots l_\mu \\ k_1, k_2, \dots k_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots i_\mu \\ k_1, k_2, \dots k_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots l_\mu \\ j_1, j_2, \dots j_\mu \end{pmatrix}.\ ^{*})$$

Vztahy ostatní z porovnání koefficientů čísel y^u, $-y^{\mu-1}x_1$, $y^{\mu-2}x_1 x_2, \dots$ plynoucí lze psáti v tomto tvaru

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots i_\mu \\ j_1, j_2, \dots j_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots l_\mu \\ k_1, k_2, \dots k_\mu \end{pmatrix}$$

$$= \sum_r \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots i_r, \dots i_\mu \\ j_1, j_2, \dots k_1 \dots j_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots l_\mu \\ j_r, k_2, \dots k_\mu \end{pmatrix}; \quad r = 1, 2, \dots \mu$$

$$= \sum_{r,s} \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots i_r, \dots i_s, \dots i_\mu \\ j_1, j_2, \dots k_1, \dots k_2, \dots j_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1, l_2, l_3, \dots l_\mu \\ j_r, j_s, k_3, \dots k_\mu \end{pmatrix};$$

$$r, s = 1, 2, \dots \mu; \ r \gtrless s$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

---

*) Jestliže daná matice jest *symmetrickou*, t. j. jestliže $a_{ik} = a_{ki}$, máme ihned specialisováním

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots i_\mu \\ i_1, i_2, \dots i_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots l_\mu \\ l_1, l_2, \dots l_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots i_\mu \\ l_1, l_2, \dots l_\mu \end{pmatrix}^2; \quad (p)$$

pro symmetrické matice jest totiž, jak bezprostředně jasno,

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots i_\mu \\ l_1, l_2, \dots l_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots l_\mu \\ i_1, i_2, \dots i_\mu \end{pmatrix}.$$

Z (p) pak následuje pro formy kvadratické důležitá věta, že hlavní subdeterminanty stupně μ u matice hodnosti μ jsou, pokud jsou od nully různy, vesměs stejného znaménka (při reálních a_{ik}).

Jest jasno, že téže methody, jako bylo právě užito k odvození bilineárních vztahů mezi determinanty stupňů μ-tých, lze použíti k odvození bilineárních vztahů mezi determinanty stupně μ_1 a determinanty stupně μ_2, jestliže jenom $\mu_1 + \mu_2 > \mu$.

II.

Na druhém místě hodlám ukázati, jak lze zevšeobecniti jistou větu determinantní uveřejněnou od G. Radose *). Zevšeobecnění toto jest však zároveň jejím zjednodušením.

Nejprve dokáži větu Radosovu poněkud jiným způsobem. Budu se opírati při tom o některé známé a zcela elementární věty o lineárních substitucích, jež ihned vyložím. Lineární transformaci

$$y_k = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{kn} x_n; \quad k = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

budu značiti zkrátka

$$y = A(x).$$

Při tom budu o této substituci předpokládati, že determinant její $|a_{ik}|$ jest od nully různý a tento předpoklad nechť platí o všech lineárních substitucích, jichž v následujícím budu užívati. Užiji-li na proměnné y_k novou lineární substituci

$$z = B(y), \tag{2}$$

aneb jinak psáno:

$$z_k = b_{k1} y_1 + \ldots + b_{kn} y_n; \ k = 1, 2, \ldots n$$

a dosadíme-li za y_k z (1), vidíme, že jest mezi z_k a x_k vztah

$$z = C(x), \quad z_k = c_{k1} x_1 + \ldots + c_{kn} x_n, \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{3}$$

kde

$$c_{kl} = b_{k1} a_{1l} + b_{k2} a_{2l} + \ldots + b_{kn} a_{nl}, \ k, l = 1, 2, \ldots n. \tag{4}$$

Při tom platí pro determinanty z koefficientů c_{kl}, b_{kl}, a_{kl} relace $|c_{kl}| = |b_{kl}| \, |a_{kl}|$; tento vztah s pomocí (4) ať také stanoví způsob, jak dojdeme k součinu dvou determinantů; forma

*) G. Rados, Zur Theorie der adjungierten Substitutionen, Math. Annalen 48. sv., str. 417. Srovnej též: W. H. Metzler, Compound Determinants, Americ. Journal of Math., Vol. XVI. str. 131.

součinu nechť v následujícím vždy jen rovnicemi (4) jest určena, při čemž ovšem jest forma výsledku závisla též na pořádku činitelů. O substituci C říkáme rovněž, že jest součinem substitucí B a A píšíce $C = BA$.

Zavedením nových proměnných do (1) substitucí

$$\begin{array}{ll} x = T(x') & \left\{ \begin{array}{l} x_k = t_{k1} x'_1 + \ldots + t_{kn} x'_n \\ y_k = t_{k1} y'_1 + \ldots + t_{kn} x'_n \end{array} \right. \end{array} \quad k = 1, 2, \ldots n \qquad (5)$$
$$y = T(y')$$

dostaneme snadným počtem vztah mezi y' a x', který lze na základě přijatého označení psáti ve tvaru

$$y' = T^{-1} AT(x'). \qquad (6)$$

A tu platí, jsou-li kořeny $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, rovnice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - x, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$

anebo jinak psáno, rovnice

$$| a_{ik} - \delta_{ik} x | = 0, \quad \begin{array}{l} \delta_{ik} = 0, \text{ pro } i \gtrless k, \\ \delta_{ik} = 1, \text{ pro } i = k, \end{array}$$

čísla vesměs různá, že substituci (6) lze dáti vždy tento tvar

$$y'_k = \mu_k x'_k; \quad k = 1, 2, \ldots n.^{*)} \qquad (8)$$

Větu tuto lze vysloviti též tak, že k determinantu $|A|$ lze udati za uvedeného předpokladu dva determinanty $|T|$, $|T^{-1}|$ takové, že součin $|T^{-1}| \,.\, |A| \,.\, |T|$ utvořený podle přijatého předpisu má prvky, nacházející se mimo hlavní diagonálu, vesměs rovny nulle.

Mimo substituci tvaru (1) vezměme v úvahu (s Radosem) ještě substituce k (1) přidružené. Tyto dostaneme z (1), uvažujeme-li m řad čísel ($m \leq n$):

$y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots y_k^{(m)}$ a zároveň $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots x_k^{(m)}$, $k = 1, 2, \ldots n$;
kde vesměs $y_k^{(l)}$ a $x_k^{(l)}$, $k = 1, 2, \ldots m$ souvisí týmiž vztahy

*) **Důkaz této věty jest zcela snadný, viz ku př. Jordan, Cours d'Analyse, 2. vyd. sv. III. str. 170 a násl.**

jako y_k s x_k v (1). Sestavme všecky kombinace m-té třídy z n čísel 1, 2, ... n v řadu (libovolně) a označme jednotlivé kombinace řadovými číslovkami 1., 2., ... N-tá $= \binom{n}{m}$-tá. Budiž e-tá z těchto kombinací $r_1\ r_2 \ldots r_m$ a položme

$$X_e^{(m)} = \begin{vmatrix} x_{r_1}^{(1)}, & x_{r_2}^{(1)}, & \ldots & x_{r_m}^{(1)} \\ x_{r_1}^{(2)}, & x_{r_2}^{(2)}, & \ldots & x_{r_m}^{(2)} \\ x_{r_1}^{(m)}, & x_{r_2}^{(m)}, & \ldots & x_{r_m}^{(m)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

a podobně definujme $Y_e^{(m)}$. Pak plyne ihned z Binet-Cauchy-ovy věty o subdeterminantech determinantu utvořeného jako součin dvou determinantů

$$Y_e^{(m)} = a_{e1}^{(m)} X_1^{(m)} + a_{e2}^{(m)} X_2^{(m)} + \ldots + a_{eN}^{(m)} X_N^{(m)}, \quad e = 1, 2, \ldots N, \tag{10}$$

při čemž jest

$$a_{ef}^{(m)} = \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1}, & a_{r_1 s_2}, & \ldots & a_{r_1 s_m} \\ a_{r_2 s_1}, & a_{r_2 s_2}, & \ldots & a_{r_2 s_m} \\ a_{r_m s_1}, & a_{r_m s_2}, & \ldots & a_{r_m s_m} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

je-li f-tá kombinace $s_1\ s_2 \ldots s_m$.

Substituci určenou rovnicemi (10) budeme psáti takto

$$Y^{(m)} = A^{(m)}(X^{(m)}); \tag{12}$$

značí pak ovšem $A^{(1)}$ substituci A samu. Sestrojíme-li podobně substituci $B^{(m)}$ přidruženou ku (2), dostáváme bezprostředně jako důsledek Binet-Cauchy-ovy věty svrchu již užité tento pro nás fundamentální výsledek

$$(BA)^{(m)} = B^{(m)} A^{(m)}. \tag{13}$$

Nechť značí nyní T substituci tak volenou, aby vztah (6) byl tvaru (8), pak dle vztahu (13) právě dokázaného bude $(T^{-1})^{(m)} . A^{(m)} . T^{(m)}$ přidruženou substitucí k substituci (8) a bude tudíž tato substituce míti tvar

$$Y_e^{(m)} = \mu_e^{(m)} X_e^{(m)}; \quad e = 1, 2, \ldots N, \tag{14}$$

při čemž

$$\mu_e^{(m)} = \mu_{r_1} \mu_{r_2} \ldots \mu_{r_m}, \tag{14'}$$

jakž dosazením do výrazu pro $Y_e^{(m)}$ přímo plyne; jest tedy substituce přidružená k (8) téhož tvaru jako (8). Z významu však čísel μ_k, $\mu_e^{(m)}$ plyne však ihned věta:

Jsou-li kořeny rovnice

$$| a_{ik} - \delta_{ik} x | = 0 \quad i, k = 1, 2, \ldots n, \quad \begin{matrix} \delta_{ik} = 0, & \text{pro } i \gtrless k; \\ \delta_{ik} = 1, & \text{pro } i = k \end{matrix} \tag{15}$$

různá čísla $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$,

jsou kořeny rovnice

$$| a_{ef}^{(m)} - \delta_{ef} x | = 0 \quad e, f = 1, 2, \ldots N; \quad \begin{matrix} \delta_{ef} = 0, & \text{pro } e \gtrless f, \\ \delta_{ef} = 1, & \text{pro } e = f \end{matrix} \tag{16}$$

čísla $\mu_1^{(m)}, \mu_2^{(m)}, \ldots \mu_N^{(m)}$.

Tím jest věta Radosova dokázána. Způsob však, jímž jsme důkaz provedli, umožňuje nám zcela snadně zevšeobecnění. Nejprve lze ji rozšířiti na rovnice tvaru

$$| a_{ik} - b_{ik} x | = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots n, \quad \begin{matrix} b_{ik} = 0, & \text{pro } i \gtrless k; \\ b_{kk} = \nu_k \gtrless 0. & \end{matrix} \tag{17}$$

Tuto rovnici přeměníme ihned na rovnici tvaru (15), dělíme-li elementy k-tého sloupce $\nu_k = b_{kk}$. Tím obdržíme rovnici

$$| a'_{ik} - \delta_{ik} x | = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots n \quad \begin{matrix} \delta_{ik} = 0 & \text{pro } i \gtrless k, \\ \delta_{ik} = 1 & \text{pro } i = k, \end{matrix} \tag{18}$$

kde $a'_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{\nu_k}$.

Užijeme-li na tuto rovnici (za potřebných supposic pro čísla a'_{ik}) věty Radosovy, známe ihned kořeny rovnice

$$| a'^{(m)}_{ef} - \delta_{ef} x | = 0, \quad e, f = 1, 2, \ldots N \quad \begin{matrix} \delta_{ef} = 0 & \text{pro } e \gtrless f \\ \delta_{ef} = 1 & \text{pro } e = f. \end{matrix} \tag{19}$$

Násobíme-li však f-tý sloupec v determinantu na levé straně této rovnice číslem $\nu_{s_1} . \nu_{s_2} \ldots \nu_{s_m} = \nu_f^{(m)}$, nezměníme kořeny rovnice, rovnice pak dostane tvar

$$| a_{ef}^{(m)} - b_{ef}^{(m)} x | = 0, \quad e, f = 1, 2, \ldots N \quad \begin{matrix} b_{ef}^{(m)} = 0 & \text{pro } e \gtrless f \\ b_{ee}^{(m)} = \nu_e^{(m)}, & \end{matrix} \tag{20}$$

a má-li tudíž rovnice (17), resp. (18) kořeny $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, má rovnice (20) kořeny $\mu_1^{(m)}, \mu_2^{(m)}, \ldots \mu_N^{(m)}$, (při čemž se předpokládá, že $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ jsou čísla různá).

Mějmež nyní rovnici

$$|a_{ik} - b_{ik}x| = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots n; \tag{21}$$

kde pro čísla a_{ik}, b_{ik} není žádného omezení, vyjma to, že kořeny této rovnice jsou mezi sebou různy a rovněž kořeny rovnice

$$|b_{ik} - \delta_{ik}x| = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots n, \quad \begin{matrix} \delta_{ik} = 0 & \text{pro } i < k \\ \delta_{ik} = 1 & \text{pro } i = k \end{matrix} \tag{22}$$

jsou mezi sebou (a od nully) různy. Pak dle předcházejícího lze nalézti dva determinanty $|T^{-1}|$, $|T|$ (patřící k jisté substituci a k substituci reciproké), jichž elementy jsou závislé pouze na b_{ik}, že součin determinantů

$$|T^{-1}| \,.\, |a_{ik} - b_{ik}x| \,.\, |T|, \quad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{23}$$

bude determinant, jehož elementy budou rovněž lineární výrazy v x, avšak koefficienty čísla x vyjma u elementů v hlavní diagonále vesměs budou rovny nulle a podobné výraz

$$|(T^{-1})^{(m)}| \,.\, |a_{ef}^{(m)} - b_{ef}^{(m)}x| \,.\, |T^{(m)}|, \quad e, f = 1, 2, \ldots N \tag{24}$$

obdrží současně tvar levé strany rovnice (20) vzhledem ku vztahům vytčeným rovnicí (14) a (8). Poněvadž pak rovnice (21) a rovnice

$$|a_{ef}^{(m)} - b_{ef}^{(m)}x| = 0, \quad e, f = 1, 2, \ldots N \tag{25}$$

mají tytéž kořeny, jako rovnice, které dostaneme, položíme-li výraz (23), resp. (24) rovný nulle a poněvadž tyto rovnice mají k sobě vztah rovnic (17) a (20), jakož i jejich tvar, platí pro kořeny rovnic (21) a (25) totéž, co platí pro kořeny rovnic (17) a (20, totiž: *Má-li rovnice* (22) *kořeny vesměs různé* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, *má rovnice* (25) *kořeny* $\mu_1^{(m)}, \mu_2^{(m)}, \ldots \mu_N^{(m)}$. Věta tato jest omezena ještě požadavkem, že kořeny rovnice (22) mají býti mezi sebou a od nully různy.

Avšak toto omezení i druhé, jež podobně týká se různosti kořenů rovnice (21), jest zbytečné a lze je odstranit, jak ihned seznáme, a vyslovíme větu odvozenou v tomto definitivním tvaru:

Jestliže

$$|a_{ik}x + b_{ik}y| = \prod_l (\alpha_l x + \beta_l y); \quad i, k, l = 1, 2, \ldots n, \qquad (26)$$

jest

$$|a_{ef}^{(m)} x + b_{ef}^{(m)} y| = \prod_g (\alpha_g^{(m)} x + \beta_g^{(m)} y); \quad e, f, g = 1, 2, \ldots N. \quad (27)$$

Při tom nechť ustanovují ukazatelé e, f, g tyto tři kombinace m-té třídy z čísel $1, 2, \ldots n$: $r_1 r_2 \ldots r_m$, $s_1 s_2 \ldots s_m$, $t_1 t_2 \ldots t_m$. Číslo $a_{ef}^{(m)}$ určeno pak jest rovnicí (11) a zcela podobnou číslo $b_{ef}^{(m)}$. Pro $\alpha_g^{(m)}$, $\beta_g^{(m)}$ pak jest

$$\alpha_g^{(m)} = \alpha_{t_1} \alpha_{t_2} \ldots \alpha_{t_m}, \quad \beta_g^{(m)} = \beta_{t_1} \beta_{t_2} \ldots \beta_{t_m}. \qquad (28)$$

Věta právě vyslovená jest zcela jednoduchá přeměna zevšeobecněné věty Radosovy, i domnívám se, že není třeba touto přeměnou obšírněji se zabývat. Levé strany rovnic (26) a (27) jsou formy stupně n, resp. N. Aby mezi těmito formami byly vztahy vyjádřené pravými stranami rovnic (26) a (27) při obecných hodnotách čísel a_{ik}, b_{ik} (t. j. při hodnotách a_{ik}, b_{ik}, pro něž nenastávají jisté svrchu vyjmuté případy rovnosti kořenů atd.), k tomu jest nutno, aby mezi koefficienty těch forem stupně n, resp. N byly splněny jisté vztahy. Tyto vztahy jsou nutně vztahy identické *), zůstávají tudíž správnými, i když nabudou koefficienty a_{ik}, b_{ik} dosud nepřipouštěných hodnot a *věta výsledná zůstává pro každý systém hodnot a_{ik}, b_{ik} správnou.*

III.

Vět předcházejícího odstavce lze různým způsobem použíti k odvození četných vět o determinantech. Podám některé příklady.

1. Buďtež dány dvě formy

$$|a_{ik}x + b_{ik}y| = \prod_l (\alpha_l x + \beta_l y) \quad i, k, l = 1, 2, \ldots n \qquad (29)$$

$$|c_{i'_1 k'_1} x + d_{i'_1 k'_1} y| = \prod_{l'} (\gamma_{l'_1} x + \delta_{l'_1} y) \quad i'_1, k'_1, l'_1 = 1', 2', \ldots n'_1 \qquad (29')$$

*) To jest, dosadíme-li do těchto vztahů za $a_{ik}^{(m)}$, $b_{ik}^{(m)}$ a provedeme-li potřebné operace, dostaneme identitu.

a utvořme determinant

$$\left|\begin{array}{c:c} \text{Mat.}\ (a_{ik}x+b_{ik}y) & \text{Nully}\\ \hdashline \text{Nully} & \text{Mat.}\ (c_{i'_1k'_1}x+d_{i'_1k'_1}y)\end{array}\right| \qquad (30)$$

Tento determinant rovná se součinu levých stran v (29) a (29′). Užijme na determinant onen věty předcházejícího odstavce pro $m=2$. Kombinace druhé třídy z čísel $1, 2, \ldots n, 1', 2' \ldots n'_1$ sestavme v toto pořadí

a) všecky kombinace druhé třídy čísel $1, 2, \ldots n$,

b) všecky kombinace druhé třídy čísel $1', 2', \ldots n'_1$,

c) všecky kombinace druhé třídy takové, že první prvek jest jedno z čísel $1, 2, \ldots n$, druhý pak prvek jedno z čísel $1', 2', \ldots n'_1$.

Pak, jak snadno seznati, determinant přidružený ku (30) pro $m=2$ nabývá tohoto tvaru:

$$\begin{array}{ll} \text{řádků} & \begin{array}{l} (n)_2\{ \\ (n'_1)_2\{ \\ nn'_1\{ \end{array} \left|\begin{array}{c:c:c} \text{Mat.}\ (a^{(2)}_{ef}x+b^{(2)}_{ef}y) & & \text{Nully} \\ \hdashline & \text{Mat.}\ (c^{(2)}_{e'_1f'_1}x+d^{(2)}_{e'_1f'_1}y) & \\ \hdashline \text{Nully} & & \text{Mat.}\ (a_{ik}c_{i'_1k'_1}x+b_{ik}d_{i'_1k'_1}y) \end{array}\right| \\ \text{sloupců} & \qquad\quad \underbrace{\qquad\qquad}_{(n)_2} \qquad\quad \underbrace{\qquad\qquad}_{(n'_1)_2} \qquad\quad \underbrace{\qquad\qquad}_{nn'_1} \end{array} \qquad (31)$$

Determinant tento však rovný jest součinu tří determinantů a opětným použitím věty odstavce předcházejícího nabýváme věty, že

$$|\, a_{ik}c_{i'_1k'_1}x + b_{ik}d_{i'_1k'_1}y \,| = \prod_{l,\,l'} (\alpha_l\gamma_{l'_1}x + \beta_l\delta_{l'_1}y)\,;$$

$$i, k, l = 1, 2, \ldots n;\ i'_1, k'_1, l'_1 = 1', 2', \ldots n'_1. \qquad (32)$$

Při sestavování determinantu na levé straně jest o to pečovati, aby všecky elementy téhož řádku patřily k téže dvojici (i, i'_1) a elementy téhož sloupce k téže dvojici (k, k'_1); pak aby pořadí dvojic (i, i'_1) přiřaděných k řádkům 1., 2., $\ldots n \, . \, n'_1$-tému bylo totožno s pořadím dvojic (k, k'_1) přiřaděných ke sloupcům 1., 2., . . . $n . n'_1$-tému.

Z rovnice (32) ku př. plyne srovnáním koefficientu mocniny $x^{nn'_1}$ na obou stranách, se zřetelem ku koefficientům x^n, resp. x^{n_1} v rovnicích (29) a (29′) vztah

$$|a_{ik} c_{i'_1 k'_1}| = |a_{ik}|^{n'_1} . |c_{i'_1 k'_1}|^n; \quad \begin{array}{l} i, k = 1, 2, \ldots n, \\ i'_1 . k'_1 = 1', 2' \ldots n'_1; \end{array}$$

věta to Kroneckrova.*)

2. Srovnáním koefficientů různých mocnin x na obou stranách rovnic (26) a (27) plynou podobně různé věty determinantní. Zvolme si ku př. $b_{ik} = 0$, jestliže $k > q$; $(q < n, q \leqq m)$. Uspořádejme pak kombinace m-té třídy z čísel 1, 2 . . . n, že nejprve seřadíme všecky kombinace z čísel 1, 2, . . . q a potom všecky kombinace ostatní. Pak $b_{ef}^{(m)} = 0$, jestliže $f > (q)_m$. Součinitel výrazu $x^{N-(q)_m} y^{(q)_m}$ na levé straně rovnice (27) jest tedy determinant

$$|A_{ef}|, \quad e, f = 1, 2, \ldots N,$$

kde $A_{ef} = b_{ef}^{(m)}$, když $f < (q)_m$, $A_{ef} = a_{ef}^{(m)}$, když $f \geqq (q)_m$.

Uvážíme-li ještě, že forma (26) obsahuje jako činitel x^{n-q} a že tudíž můžeme klásti $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-q} = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = . \;\; . = \alpha_{n-q} = 1$, dostaneme po snadném počtu vztah

$$|A_{ef}| = \begin{vmatrix} b_{11} & . & b_{1q}, & a_{1,q+1} & . . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & . . . & b_{nq}, & a_{n,q+1} & . . . & a_{nn} \end{vmatrix}^{(q-1)_{m-1}} . |a_{ik}|^{(n-1)_{m-1} - (q-1)_{m-1}};$$

$$e, f = 1, 2, \ldots N, \quad i, k = 1, 2, \ldots n.$$

*) Citát dle Encyklopaedie der math. Wiss. I. A 2, § 22, str. 40; franc. vydání str. 99.

Důležitost, jaká se na tomto místě větě Kroneckrově přikládá, zdá se mi ostatně neoprávněnou; vskutku není Kroneckrova věta než zcela zvláštní případ věty Frankeovy. Tato jest, užijeme-li označení textu,

$$|a_{ef}^{(m)}| = |a_{ik}|^{(n-1)_{m-1}}; \quad \begin{array}{l} i, k = 1, 2, \ldots n; \\ e, f = 1, 2, \ldots N. \end{array}$$

Z této věty (kterou snadno dostáváme za (26) a (27) porovnáním koefficientů u x^n a x^N na obou stranách) obdržíme Kroneckrovu týmž postupem jako jsme dostali (32) z (26) a (27).

Z této věty specialisováním bychom dostali snadno různé známé věty o determinantech z determinantů.

3. Použijeme-li konečně věty odstavce předcházejícího pro $m = n - 1$, dostáváme, označíme-li minory v determinantu $|a_{ik}|$ příslušné ku a_{ik} a dělené determinantem $|a_{ik}|$ značkou α_{ik} a minory v determinantu $|b_{ik}|$ dělené $|b_{ik}|$ podobně β_{ik}, téměř bezprostředně

$$|x a_{ik} + y b_{ik}| = |a_{ik}| \,.\, |b_{ik}| \,.\, |x \beta_{ik} + y \alpha_{ik}|; \quad i, k = 1, 2, \ldots n,$$

což jest známá relace Siacciova*), který jí použil na odvození věty pro determinanty orthogonální (zevšeobecniv známou větu Brioschiovu).

O thermodynamice dějů nepřevratných.

Napsal Dr. **Jos. Theurer**, professor montanistické vysoké školy v Příbrami.

(Dokončení.)

9. Pojem entropie vůbec.

Pojem *entropie*, jejž zavedl ve vědě R. Clausius na základě studia dějů *převratných*, zaveden byl jako pojem čistě mathematický. V thermodynamice dějů *převratných* ukázalo se, že veličina dQ není úplným differenciálem, nýbrž že $\int_1^2 dQ$ závisí na cestě, kterou pracující hmota se z počátečného stavu „1“ do konečného stavu „2“ dostane. Úplným differenciálem jest však veličina $\frac{dQ}{T}$, kdež T značí absolutní teplotu, při níž pracující hmota přijala (neb odevzdala) množství tepla dQ; proto $\int \frac{dQ}{T}$, pokud se týče děje neuzavřeného, závisí pouze na stavu počátečném a konečném, nikoli však na cestě, kterou děj se konal. Z téže příčiny týž integrál, vzat pro *převratný* děj uzavřený (kruhový), rovná se nulle. Veličinu, jejíž differenciálem jest výraz

*) Atti Accad. Torino 7. p. 772, Annali mat. pura appl. (2), 5 (1871/3); cit. dle franc. vyd. Encyclop. I. 1 str. 117.