Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Miloslav Pelíšek

O racionalních relacích v rovnostranném trojúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 2-3, 181--190

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121612

Stanovení tvrdosti methodou Auerbachovou lze ovšem užíti jen u těles průhledných a proto jsou pozoruhodny práce týkající se těles neprůhledných, založené ovšem na myšlence úplně jiné, ale téhož cíle — měření absolutního — dosahující.

V tomto směru vynikají práce, které provedli *Strouhal* a *Barus*,*) jimiž položen základ velmi spolehlivý pro míru tvrdosti oceli a příbuzných druhů železa. Ukázali totiž, že specifický odpor galvanický ocelového drátu, thermoelektrická jeho mohutnost a permanentní jeho magnetismus jest velmi přesnou a spolehlivou mírou jeho tvrdosti. První z těchto veličin lze zvláště velmi citlivě a při tom snadno a pohodlně měřiti — *specifický odpor galvanický* hodí se za *absolutní míru tvrdosti oceli a železa.*

Objevy Strouhal-Barusovy mají pak tím značnou cenu všeobecnou, poněvadž ocel jest materialem jak v praxi tak i v laboratořích vědeckých velmi užívaným a otázka po její tvrdosti jest otázkou denního života.

O racionalních relacích v rovnostranném trojúhelníku.

Napsal

Miloslav Pelíšek,
professor v Plzni.

Při vyšetřování všeobecných metrických relací transversál ke kuželosečkám jakož i ke čtyřúhelníkům a trojúhelníkům dospěl jsem specialisováním pro rovnostranný trojúhelník k četné skupině zajímavých *racionalních vztahů*, jejichž direktní odvození tuto podávám. *Opíšeme-li kružnici* (*obr. 1.*), *jejíž průměrem jest výška rovnostranného trojúhelníka*, *dělí tato kružnice obě ramena v poměru* $1:3$.

Buďtež e, f průsečíky kružnice k opsané na výšce cd rovnostranného trojúhelníka abc jako průměru s rameny ac, bc; vedeme-li přímku ed, jež jest patrně kolmá k ab, jest:

*) Viz. „Ocel a její vlastnosti galvanické i magnetické“. Sepsali Dr. V. Strouhal a Dr. C. Barus. V Praze 1892.

$$\triangle\, aed \sim acd$$

a tudíž

$$ae : ad = ad : ac.$$

Zavedeme-li označení $ac = s$ a tedy $ad = \frac{s}{2}$, obdržíme z předcházející úměry:

(1a) $$ae = \frac{1}{4} s,$$

z čehož následuje

(1b) $$ce = \frac{3}{4} s.$$

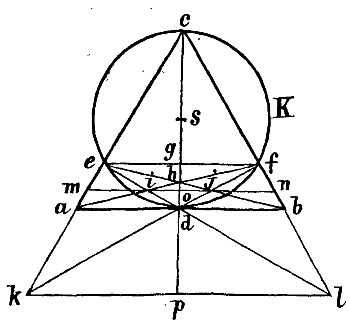
Rovněž tak obdržíme

(1c) $$bf = \frac{1}{4} s$$

a

(1d) $$cf = \frac{3}{4} s.$$

Úsečky ae, bf obnášejí tedy *čtvrtinu*, úsečky ec, fc *tři čtvrtiny* strany daného trojúhelníka.



Jsou tedy též správné úměry:

(2a) $$ae : ec = bf : fc = 1 : 3,$$
(2b) $$ec : ac = fc : bc = 3 : 4,$$
(2c) $$ae : ac = bf : bc = 1 : 4.$$

Z těchto úměr následuje $ef \parallel ab$ jakož i úměra:

(3a) $$ef : ab = 3 : 4$$
aneb

(3b) $$ef = \frac{3}{4} s .$$

Úsečka ef obnáší tedy též *tři čtvtiny* strany trojúhelníka.

Podobně lze dokázati, označíme-li g průsečík výšky cd s úsečkou ef:

(4a) $$cg : cd = 3 : 4,$$

(4b) $$dg = \frac{1}{4} cd,$$

(4c) $$cg = \frac{3}{4} cd.$$

Jest tedy dg *čtvrtina* a cg *tři čtvrtiny* výšky.

Vedeme-li příčky eb, af, jež se protínají v bodě h, který, jak vyplývá z ohledu na souměrnost, leží na výšce cd, jest pak

$$\triangle efh \sim abh ,$$

z čehož následuje:

(5a) $$eh : hb = fh : hb = ef : ab = 3 : 4 \text{ aneb}$$

(5b) $$eh = \frac{3}{4} hb , \qquad hf = \frac{3}{4} ah ,$$

(5c) $$eh = \frac{3}{7} eb , \qquad hf = \frac{3}{7} af ,$$

(5d) $$ah = \frac{4}{7} af , \qquad hb = \frac{4}{7} eb.$$

Jsou tedy úsečky eh a hf *tři čtvrtiny* úseček bh, ah, avšak *tři sedminy* úseček eb, af; úsečky ah, bh jsou *čtyři sedminy* úseček af, bf.

Podobně lze též dokázati

(6a) $$gh : hd = 3 : 4$$
aneb

(6b) $$gh = \frac{3}{4} hd ,$$

(6c) $$gh = \frac{3}{7} dg ,$$

(6d) $$hd = \frac{4}{7} dg.$$

Průsečík h dělí tedy čtvrtinu výšky v poměru 3 : 4; úsečka gh jest *tři čtvrtiny* úsečky hd, avšak *tři sedminy* úsečky dg; úsečka hd obnáší *čtyři sedminy* úsečky dg.

Srovnáním rovnic (4b) a (6d) obdržíme:

$$dh = \frac{1}{7} cd \,, \tag{7a}$$

$$ch = \frac{6}{7} cd \,, \tag{7b}$$

$$dh = \frac{1}{6} ch \,. \tag{7c}$$

Úsečka dh obnáší tedy *šestinu* úsečky ch, avšak *sedminu* celé výšky; úsečka ch obnáší *šest sedmin* celé výšky.

Označíme-li krátce výšku $cd = v$, následuje z rovnic (4c) a (7b)

$$cg : ch = \frac{3}{4} v : \frac{6}{7} v = 7 : 8 \tag{8a}$$

aneb

$$cg = \frac{7}{8} hc, \qquad hg = \frac{1}{8} ch, \qquad hg = \frac{1}{7} cg . \tag{8b}$$

Srovnáme-li ještě rovnici (4c) s (8c), obdržíme:

$$hg = \frac{3}{28} v \,. \tag{9}$$

Úsečka hg obnáší tedy *sedminu* úsečky cg, *osminu* úsečky ch a *tři osmadvacetiny* celé výšky; úsečka cg obnáší *sedm osmin* úsečky hc.

Budiž dále k průsečík přímky df s ac a podobně l průsečík přímky de s přímkou bc.

Trojúhelník cfk jest pravoúhlý, $\sphericalangle c = 60^0$, $\sphericalangle k = 30^0$; jest tedy:

$$ck = 2ce = \frac{3}{2} s \tag{10a}$$

a podobně

$$cl = 2cf = \frac{3}{2} s \,. \tag{10b}$$

Strana trojúhelníka obnáší *dvě třetiny* úseček ck a cl;

úsečky ak, bl jsou tedy *tři poloviny* strany trojúhelníka; úsečky ae, bf jsou *poloviny* úseček ak a bl, *třetiny* úseček ek, fl a *šestiny* úseček ck a cl; úsečky ak, bl obnášejí *dvě třetiny* úseček ck a cl.

Rovněž tak lze dokázati:

Úsečka dg jest *polovina* úsečky dp, *třetina* úsečky gp a *šestina* úsečky cp; úsečka dp jest *dvě třetiny* úsečky gp.

Máme tedy rovnost následujících poměrů:

$$ce : ck = cf : cl = cg : cp = 1 : 2, \tag{11a}$$
$$ac : ck = bc : cl = cd : cp = 2 : 3, \tag{11b}$$
$$ak : ac = bl : bc = pd : dc = 1 : 2, \tag{11c}$$
$$ae : ak = bf : bl = dg : dp = 1 : 2, \tag{11d}$$
$$ae : ek = bf : fl = dg : gp = 1 : 3, \tag{11e}$$
$$ae : ck = bf : cl = dg : cp = 1 : 6, \tag{11f}$$
$$ak : ec = bl : cf = dp : gc = 2 : 3. \tag{11g}$$

Z první a čtvrté těchto úměr jde na jevo, že body a, c dělí vzdálenost ek v témže poměru $1 : 2$; *body ceak a rovněž tak body cfbl jakož i cgdp jsou harmonické.*

Máme tedy rovnost *dvojpoměrů*:

$$(acek) = (bcfl) = (dcgp) = -1. \tag{12}$$

Z toho seznáváme, že jsou též následující *svazky paprsků harmonické*, neboť mají k předcházejícím bodovým řadám perspektivickou polohu:

$$fa,\ fc,\ fe,\ fk;\quad da,\ dc,\ de,\ dk;\quad eb,\ ec,\ ef,\ el;\quad db,\ dc,\ df,\ dl.$$

Seznáváme tedy rovnost dvojpoměrů:

$$f\,(acek) = d\,(acek) = e\,(bcfl) = -1. \tag{13}$$

Budiž i průsečík přímek af, el a podobně j průsečík příček be, fk; seznáme pak snadno, že bodové řady

$$i, l, e, d;\quad h, b, e, j;\quad j, k, f\ d;\quad h, a, f, i$$

jsou v perspektivické poloze k předcházejícím harmonickým paprskům, *jsou tedy též harmonické,* což ještě uvidíme direktně.

Platí tedy rovnost *dvojpoměrů*:

$$(iled) = (hbej) = (jkfd) = (hafi) = -1. \tag{14}$$

Pozorujme nyní poměry úseček na příčkách el, fk; z úměry (11a) následuje $kl \parallel ab$. Seznáváme tedy podobnost těchto trojúhelníků:

$$\triangle ead \sim ekl, \qquad \triangle fdb \sim fkl, \qquad \triangle efd \sim dkl,$$

z čehož plyne rovnost poměrů:

$$\text{(15a)} \qquad ed : dl = fd : dk = ef : kl = gd : dp = 1 : 2,$$
$$\text{(15b)} \qquad ed : el = ad : hl = fd : fk = db : kl = 1 : 3.$$

Jsou tedy úsečky ed, df, ad, db *poloviny* úseček dl, dk a kl, kdežto úsečky ed, df, ef jsou *třetiny* úseček el, fk, kl.

Srovnáme-li úměry (3a), (15a), obdržíme ještě:

$$\text{(16)} \qquad kl : ab \parallel 3 : 2.$$

Úsečka kl obnáší tedy *tři poloviny* strany trojúhelníka.

Dále jsou tyto trojúhelníky podobné:

$$\triangle adi \sim efi, \quad \triangle dbj \sim efj, \quad \triangle dij \sim def, \quad \triangle emi \sim ead,$$
$$\triangle fjn \sim fdb,$$

z čehož plyne rovnost poměrů:

$$\text{(17a)} \qquad di : ei = ai : if = ad : ef = 2 : 3,$$
$$\text{(17b)} \qquad dj : jf = bj : je = db : ef = 2 : 3,$$
$$\text{(17c)} \qquad di : de = dj : df = ij : ef = 2 : 5,$$
$$\text{(17d)} \qquad ei : ed = fj : fd = mi : ad = nj : db = 3 : 5.$$

Úsečky di a dj jsou tedy *dvě třetiny* úseček ie a jf, avšak *dvě pětiny* úseček de a df; rovněž tak jest úsečka ij *dvě pětiny* úsečky ef; úsečky ei a fj jsou *tři pětiny* úseček ed a df.

Body i a l dělí úsečku ed oba v témže poměru $2 : 3$; rovněž tak dělí body j a k úsečku df v témže poměru $2 : 3$; seznáváme tedy bezprostředně, že jsou skupiny bodů $edil$ jakož i $dfjk$ *harmonické*, což jsme už výše odůvodnili.

Z úměry (17d) a (15b) plyne:

$$ei = \frac{3}{5} ed = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} el = \frac{1}{5} el$$

a tudíž i

$$\text{(18a)} \quad ei : el = em : ek = mi : kl = fj : fk = fn : fl = jn : kl = 1 : 5,$$

(18b) $\quad ei : il = em : mk = fj : jk = fn : nl = 1 : 4.$

Jsou tedy úsečky ei, me, mi, fj, fn, nj *pětiny* úseček el, ek, kl, fk, fl a kl, kdežto úsečky ei, em, fj a fn jsou *čtvrtiny* úseček il, mk, jk a nl.

Podobně plyne z úměr (17c) a (15a):

$$di = \frac{2}{5} ed = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} dl = \frac{1}{5}$$

aneb

(19a) $\quad di : dl = ma : ak = dj : dk = nb : bl = ij : lk = 1 : 5,$

(19b) $\quad di : il = ma : mk = dj : jk = nb : nl = 1 : 6.$

Jsou tedy úsečky di, ma, dj, nb a ij *pětiny* úseček dl, ak, dk, bl, lk a tedy i *šestiny* úseček il, mk, jk a nl.

Z úměr (17c) a (15b) plyne:

$$di = \frac{2}{5} ed = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} el = \frac{2}{15} el$$

aneb též

(20) $\quad di : el = dj : fk = am : ek = bn : fl = 2 : 15.$

Úsečky di, dj, am, bn obnášejí tedy *dvě patnáctiny* úseček el, fk, ek, fl.

Z úměr (17c) a (3a) plyne:

$$ij = \frac{2}{5} ef = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} ab = \frac{3}{10} ab,$$

aneb též, uvážíme-li, že jsou též trojúhelníky $hij \sim hab$,

(21a) $\quad ij : ab = hi : ha = hj : hb = ho : hd = 3 : 10,$

(21b) $\quad hi : ai = hj : jb = ho : od = 3 : 7,$

(21c) $\quad ai : ah = bj : bh = do : dh = 7 : 10.$

Úsečky hi, ij, jh, ho obnášejí tedy *tři desetiny* úseček ha, ab, bh, hd; úsečky hi, hj, ho obnášejí *tři sedminy* úseček ai, jb, od; úsečky ai, bj, do obnášejí *sedm desetin* úseček ah, bh a dh.

Z rovnic (5c) a (21b) plyne, že body e, j dělí úsečku hb oba v témže poměru 3 : 7, rovněž tak dělí body fi úsečku ah v témže poměru 3 : 7; jsou tedy skupiny bodů $ahfi$, $bhej$ obě *harmonické*, jak jsme již výše odůvodnili.

Srovnáme-li (21a) a (7a), obdržíme:

$$oh = \frac{3}{10} hd = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{7} cd = \frac{3}{70} cd,$$

aneb

(22) $$oh : cd = 3 : 70.$$

Úsečka *oh* obnáší tedy *tři sedmdesátiny* celé výšky.

Z rovnic (21c) a (7a) plyne dále:

$$od = \frac{7}{10} dh = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{7} cd = \frac{1}{10} cd,$$

aneb

(23a) $$co : cd = cm : ca = cn : cb = mn : ab = 9 : 10,$$

(23b) $$do : dc = am : ac = bn : bc = 1 : 10,$$

(23c) $$do : oc = am : mc = bn : nc = 1 : 9.$$

Jsou tedy úsečky *am*, *bn*, *do desetiny* strany a výšky trojúhelníka a *devítiny* úseček *mc*, *nc*, *oc*; úsečky *cm*, *cn*, *mn* jsou *devět desetin* strany a úsečka *co devět desetin* výšky daného trojúhelníka.

Z rovnic (23a) a (21a) následuje:

(24) $$mi = ij = jm = \frac{1}{3} mn = \frac{3}{10} ab.$$

Úsečka mn jest tedy dělena body ij na tři stejné díly. Z podobnosti trojúhelníků $ijh \sim hef$ následuje ještě:

(25a) $$hi : hf = hj : he = 2 : 5.$$

(25b) $$hi : fi = hj : ej = 2 : 7,$$

(25c) $$eh : ej = fh : fi = 5 : 7.$$

Úsečky *hi* a *hj* obnášejí tedy *dvě pětiny* úseček *hf* a *he* avšak *dvě sedminy* úseček *fi* a *ej*, kdežto úsečky *eh* a *fk* jsou *pět sedmin* úseček *ej* a *fi*.

Též obdržíme snadno:

(26) $$hi : af = hj : eb = 6 : 35.$$

Obnášejí tudíž úsečky *hi* a *hj šest pětatřicetin* úseček *af* a *be*.

Sečteme-li výrazy (22) a (9), obdržíme:

$$og = \frac{3}{20} cd$$

aneb

(27) $$og : cd = 3 : 20.$$

Úsečka og obnáší tedy *tři dvacetiny* celé výšky.

Konečně jest patrno, že *ploské obsahy* různých trojúhelníků a čtyřúhelníků, jež se v daném obrazci vyskytují, jsou též v *racionálních poměrech* mezi sebou i s daným trojúhelníkem, ačkoliv jsou samy o sobě irracionální. Označíme-li obsah daného trojúhelníka $\triangle$, jest pak:

(28) $ecf = \frac{9}{16} \triangle$, (29) $ecg = fcg = \frac{9}{32} \triangle$,

(30) $abef = \frac{7}{16} \triangle$, (31) $adeg = dbfg = \frac{7}{32} \triangle$,

(32) $abe = abf = \frac{1}{4} \triangle$, (33) $aef = bef = \frac{3}{16} \triangle$,

(34) $abh = \frac{1}{7} \triangle$, (35) $adh = bdh = \frac{1}{14} \triangle$,

(36) $efh = \frac{9}{112} \triangle$, (37) $egh = fgh = \frac{9}{224} \triangle$,

(38) $aeh = bfh = \frac{3}{28} \triangle$, (39) $aed = bfd = \frac{1}{8} \triangle$,

(40) $efd = \frac{3}{16} \triangle$, (41) $egd = fgd = \frac{3}{32} \triangle$,

(42) $ijd = \frac{3}{100} \triangle$, (43) $edh = fdh = \frac{3}{56} \triangle$,

(44) $ihj = \frac{9}{700} \triangle$, (45) $ckl = \frac{9}{4} \triangle$,

(46) $abkl = \frac{5}{4} \triangle$, (47) $dkl = \frac{3}{4} \triangle$,

(48) $adk = bdl = \frac{1}{4} \triangle$, (49) $edk = fdl = \frac{3}{8} \triangle$.

Jest jasno, že lze výsledky ty ještě dále kombinovati. —

V pojednání na začátku zmíněném odvozuji, vycházeje od jisté relace *Hamiltonovy*, soustavným promítáním složité vztahy, jež se dají mnohonásobně specialisovati, a to nejen pro libovolný trojúhelník, na jehož výšce jakožto průměru opíšeme kružnici, k němuž vedeme různé transversály a na nichž volíme libovolné body, nýbrž i pro jisté konfigurace na kuželosečkách jakož i zvláštních křivkách třetího, čtvrtého a šestého stupně.

Poznámka redakce. Promítneme-li obrazec k tomuto pojednání připojený kolmo neb šikmo do libovolné roviny, bude průmětem trojúhelníka rovnostranného *abc* trojúhelník zcela obecný; naopak lze jakýkoli trojúhelník pokládati za průmět trojúhelníka rovnostranného.*) Jelikož pak rovnoběžným promítáním nemění se ani poměr úseček téže přímky ani poměr obsahů dvou útvarů téže roviny, zůstávají veškeré relace vyvozené v článku předcházejícím platnými nejen pro trojúhelník rovnostranný, nýbrž pro trojúhelník vůbec. Vycházejíce od mediany $\overline{cd}$ a bodů *e, f* stanovených vztahy (1a) a (1c), mohli bychom (s některými nepodstatnými změnami) celé další vyvinutí relací (2) až (49) vztahovati k trojúhelníku obecnému.

Úchylky od zákona Boyleova.

Referuje Dr. **Boh. Mašek**, s. prof. v Praze.

Stav každého tělesa, pokud hledíme jen ke stavu tepelnému, ostatní na př. magnetické a elektrické stranou nechávajíce, závisí na třech důležitých činitelích, na *temperatuře* (t), jež rozhoduje o stavu tepelném, na *objemu* (v) a na *tlaku* (p).

Veličiny tyto jsou, jak učí zkušenost, spolu spojeny tak, že změnou jedné z nich mění se určitým způsobem ostatní dvě. Známe-li naopak mathematický tvar této vzájemnosti, můžeme, dány-li dvě veličiny určiti přímo třetí jako neznámou. Takovouto souvislost veličin p, v, t, vyjádřenou mathematicky nazveme *rovnicí stavu* tělesa a symbolicky napíšeme

*) Viz *V. Jeřábek*, „O perspektivní souvislosti trojúhelníka nerovnostranného a trojúhelníka rovnostranného.“ Archiv mathematiky a fysiky, I. Praha 1876, str. 225. Od téhož „Sur un problème de perspective. Mathesis. II., 1882, str. 80.