Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 4, 258--280

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121663

Úlohy.

Úloha 1.

Ustanoviti obecný člen a součet arithmetické posloupnosti ve které

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 3\,(4n - 5).$$

Řešení. (Zaslal p. *Al. Moravec*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Položíme-li v dané rovnici podmínečné $n = 4,\ 3$, obdržíme

$$a_4 + a_3 + a_2 = 33$$
$$a_3 + a_2 + a_1 = 21\,;$$

odtud dle vzorce

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

plyne

$$3a_1 + 6d = 33$$
$$3a_1 + 3d = 21.$$

Jest tedy $d = 4$, $a_1 = 3$ a žádaná posloupnost

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots$$

$$a_n = 4n - 1, \qquad s_n = n\,(2n + 1).$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Frant. Binder*, stud. VIII. tř. r. v Karlíně.)

Užijeme-li poučky: „V řadě arithmetické jest každý člen arithmetickým průměrem členů sousedních,“ obdržíme

$$a_{n-1} = 4n - 5,$$

tudíž

$$a_n = 4\,(n + 1) - 5 = 4n - 1.$$

Úloha 2.

Jsou-li x_1, x_2 kořeny rovnice

$$x^2 + mx + n = 0,$$

při které podmínce jest $x_1^4 + x_2^4$ minimum?

Řešení. (Zaslal p. *Jan Handl*, stud. VI. tř. g. v Brně.)

Dle známých vět jest

$$x_1 + x_2 = -m, \qquad x_1 x_2 = n,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2n,$$
$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2\,(x_1^2 + x_2^2) - 6x_1^2x_2^2$$
$$= m^4 - 4m^2n + 2n^2.$$

Položíme-li

$$x_1^4 + x_2^4 = s,$$

obdržíme rovnici

$$2n^2 - 4m^2n + m^4 - s = 0,$$

z níž

$$n = \frac{1}{2}\,[2m^2 \pm \sqrt{2\,(m^4 + s)}\,].$$

Aby n bylo realným, musí býti

$$m^4 + s \geqq 0,$$

tudíž

$$s_{min} = -m^4;$$

potom jest

$$m^2 - n = 0,$$

žádaná to podmínka pro minimum součtu $x_1^4 + x_2^4$. V případě tom má rovnice

$$x^2 + mx + m^2 = 0$$

kořeny komplexní

$$x_{1,2} = -m\,\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Úloha 3.

Řešiti rovnici

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x\,(x+1)} + \frac{1}{(x+1)\,(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+n-1)(x+4)}$$
$$= \frac{3}{2n}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Rieger,* stud. VII. tř. r. v Jičíně.)

Ježto

$$\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}=\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n},$$

lze danou rovnici psáti takto:

$$\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\dots$$
$$+\left(\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n}\right)=\frac{3}{2n}$$

čili

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x+n}=\frac{3}{2n}.$$

Upravíce, obdržíme rovnici

$$3x^2+nx-4n^2=0,$$

jejíž kořeny jsou

$$x_1=n,\quad x_2=-\frac{4n}{3}.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Václav Havlíček,* stud. VII. tř. r. v Budějovicích.)

Poněvadž jest

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{2}{x(x+2)},$$

$$\frac{2}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)},$$

. . . .

jest součet celé řady na levé straně rovnice

$$\frac{1}{x}+\frac{n}{x(x+n)}=\frac{3}{2n},$$

z čehož opět

$$3x^2+nx-4n^2=0.$$

Úloha 4.

Budiž dokázáno, že číslo tvaru

$$2^{2n+3} \cdot 7^n + 3^n \cdot 5^{n+1}$$

jest dělitelno 13ti.

Řešení. (Zaslal p. *Ferdinand Šob*, stud. VI. tř. g. v Brně.)

Pišme daný výraz v podobě

$$8 \cdot 4^n \cdot 7^n + 5 \cdot 3^n \cdot 5^n = 13 \cdot 4^n 7^n - 5(28^n - 15^n).$$

Jelikož rozdíl $28^n - 15^n$ jest dělitelný rozdílem

$$28 - 15 = 13,$$

jest tedy i celý výraz 13ti dělitelen.

Jiné řešení. (Podal p. *Rudolf Hruša*, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.)

Daný výraz jest roven

$$(14^n - 1) \cdot 2^{n+3} + (15^n - 2^n) \cdot 5 + 2^{n+3} + 5 \cdot 2^n$$
$$= (14^n - 1) \cdot 2^{n+3} + (15^n - 2^n) \cdot 5 + 13 \cdot 2^n.$$

Jelikož $14^n - 1$ i $15^n - 2^n$ jest dělitelno 13ti, jest celý výraz 13ti dělitelen.

Úloha 5.

Řešiti rovnici

$$ctg\,\frac{x}{2} + cosec\,\frac{x}{2} + cosec\,\frac{x}{4} = 1.$$

Řešení. (Zaslal p. *Vilém Novák*, stud. VIII. tř. g. v Jičíně.)

Užijme vzoru

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Tím nabude rovnice daná postupně podoby

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{4}+\operatorname{cosec}\frac{x}{4}=1,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{8}=1.$$

Jest tedy

$$\frac{x}{8}=\frac{2n+1}{2}\,.\,\mathrm{R},$$

$$x=(2n+1)\,.\,4\mathrm{R}.$$

Úloha 6.

Které úhly menší než 4R vyhovují rovnici

$$5\,.\,4^{\cos x(\cos x+\sin x)}+6\,.\,4^{\sin x(\cos x-\sin x)}=13(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}?$$

Řešení. (Zaslal p. *Václav Mišan*, stud. VII. tř. g. v Budějovicích.)

Danou rovnici můžeme též psáti

$$5\,.\,2^{2\cos x(\cos x+\sin x)}+6\,.\,2^{2\sin x(\cos x-\sin x)}=13\,.\,2^{\frac{1}{2}\sqrt{6}}$$

čili

$$5\,.\,2^{\cos 2x+\sin 2x+1}+6\,.\,2^{\cos 2x+\sin 2x-1}=13\,.\,2^{\frac{1}{2}\sqrt{6}}.$$

Položíme-li

$$2^{\cos 2x+\sin 2x}=u,$$

přejde rovnice tato ve

$$13u=13\,.\,2^{\frac{1}{2}\sqrt{6}};$$

jest tedy

$$\cos 2x+\sin 2x=\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Zdvojmocněním obdržíme

$$\sin 4x=\frac{1}{2}$$

a odtud 8 hodnot hovících úloze

$$x = 7^0 30', \quad 30^0, \quad 97^0 30', \quad 120^0,$$
$$187^0 30', \quad 210^0, \quad 277^0 30', \quad 300^0.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Vilém Kloubek*, stud. VII. tř. akad. gymnasia v Praze.)

Upravme rovnici danou takto:

$$4^{\sin x \cos x}\left[5 \, . \, 4^{\cos^2 x} + 6 \, . \, 4^{-\sin^2 x}\right] = 13(\sqrt{2})^{\sqrt{6}},$$

násobme obě strany činitelem $4^{\sin^2 x}$ a zjednodušme.

Obdržíme

$$4^{\sin x (\cos x - \sin x)} = \frac{1}{2} (\sqrt{2})^{\sqrt{6}} = 2^{\frac{\sqrt{6}-2}{2}}$$

a spojením s rovnicí původně danou

$$4^{\cos x (\cos x + \sin x)} = 2 (\sqrt{2})^{\sqrt{6}} = 2^{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}.$$

Odtud vychází

$$2 \sin x (\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{6}-2}{2},$$

$$2 \cos x (\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{6}+2}{2},$$

znásobením pak jako svrchu

$$\sin 4x = \frac{1}{2} x.$$

Úloha 7.

Kterou hodnotu má výraz

$$x = \frac{\cos \alpha - \cos 5\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha}$$

a) při $\alpha = 0$, *b) při* $\alpha = 180^0$?

Řešení. (Zaslal p. *Maxm. Paďour*, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.)

Jelikož

$$\cos \alpha - \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \, . \, \sin 3\alpha,$$
$$\cos 2\alpha - \cos 6\alpha = 2 \sin 2\alpha \, . \, \sin 4\alpha,$$

jest

$$x = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 4\alpha}.$$

Dle známých vzorců vyvineme

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha \, (3 - 4 \sin^2 \alpha)$$
$$\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha \, (1 - 2 \sin^2 \alpha),$$

tedy

$$x = \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{4 \cos \alpha \, (1 - 2 \sin^2 \alpha)}.$$

Odtud obdržíme při $\alpha = 0$ hodnotu $x = \frac{3}{4}$, kdežto při $\alpha = 180^0$ bude $x = -\frac{3}{4}$.

Úloha 8.

Uprostřed silnice rovnoměrně stoupající stojí pomník výšky v; vrchol jeho z dolního kraje silnice jeví se v úhlu výstupném α, z horního konce v úhlu výstupném β. Kterou délku má silnice a které stoupání?

Řešení. (Zaslal p. *Václav Špaček,* stud. VI. tř. g. v Příbrami.)

Nazveme-li kolmice vedené z obou krajů silnice na výšku pomníku písmenem k, výstupný úhel silnice γ, bude

$$v = k \, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \gamma) = k \, (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma).$$

Odtud

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

Dále jest délka silnice

$$x = \frac{2k}{\cos \gamma},$$

aneb také

$$x = \frac{2v \cos \alpha}{\sin (\alpha - \gamma)} = \frac{2v \cos \beta}{\sin (\beta + \gamma)}.$$

Úloha 9.

Kruh rozděliti ve dvě části kružnicí soustřednou tak, aby vnitřní kruh měl se ku mezikruží jako toto ke kruhu celému.

Řešení. (Zaslala slč. *Marie Košelkova,* chov. II. ročníku ústavu učitelek v Brně.)

Označme poloměr daného kruhu r, poloměr vnitřního kruhu ϱ; pak bude

$$\varrho^2 : (r^2 - \varrho^2) = (r^2 - \varrho^2) : r^2$$

čili

$$r^2 - \varrho^2 = \pm r\varrho.$$

Odtud vypočítáme hodnoty

$$\varrho = \frac{r}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{5}),$$

z nichž

$$\varrho = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

sluší vlastnímu smyslu úlohy.

Rozdělíme-li tedy poloměr r dle zlatého řezu, znamená větší díl délku poloměru ϱ.

Úloha 10.

Na průměru $\overline{ab}$ sestrojena polokružnice, do níž vepsán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník abc. Rozpůlíme-li $\overline{bc}$ v bodě d, protíná $\overline{ad}$ polokružnici v bodě p. Dokázati jest, že vzdálenosti tohoto bodu od stran $\overline{bc}$, $\overline{ac}$ jsou v poměru 1 : 3.

Řešení. (Zaslal p. *Artur Klein,* stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.)

Označme poloměr kružnice písmenem r; potom

$$\overline{ac} = \overline{bc} = r\sqrt{2}, \quad \overline{ad} = \frac{r}{2}\sqrt{10}.$$

Délku $\overline{dp}$ vypočítáme na základě podobnosti trojúhelníků

$$\triangle\, acd \sim \triangle\, bpd;$$

jestiť

$$\overline{dp} : \overline{bd} = \overline{dc} : \overline{ad},$$

proto

$$\overline{dp} = \frac{r}{10}\sqrt{10} = \frac{1}{5}\overline{ad}.$$

Spusťme z bodu p kolmice $\overline{pm} \perp \overline{bc}$ a $\overline{pn} \perp \overline{ac}$. Z úměr

$$\overline{pm} : \overline{pd} = \overline{ac} : \overline{ad}$$
$$\overline{pn} : \overline{ap} = \overline{cd} : \overline{ad},$$

ustanovíme

$$\overline{pm} = \frac{r}{5}\sqrt{2} = \frac{1}{5}\overline{ac},$$
$$\overline{pn} = \frac{3r}{5}\sqrt{2} = \frac{3}{5}ac,$$

tudíž

$$\overline{pm} : \overline{pn} = 1 : 3.$$

Úloha 11.

Krychle o hraně a promítnuta na rovinu kolmou k její úhlopříčce. Který jest obsah průmětu?

Řešení. (Zaslal p. *Otto Šindelář,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Průmět krychle na rovinu kolmou k její úhlopříčce jest pravidelný šestiúhelník. Nazveme-li stranu jeho a_1, jest obsah jeho

$$P = \frac{3}{2} a_1^2 \sqrt{3}.$$

Jest však a_1 odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka, v němž přepona rovná se hraně a a druhá odvěsna rovna $\frac{1}{3}$ úhlopříčky krychle. Proto

$$a_1^2 = a^2 - (\frac{a}{3}\sqrt{3})^2 = \frac{2a^2}{3},$$
$$P = a^2\sqrt{3}.$$

Úloha 12.

Kužel kruhový kolmý rozdělen jest řezem rovnoběžným ku základně ve 2 části stejného povrchu i stejného obsahu. Který úhel tvoří strana jeho s osou? V kterém poměru jest obsah řezu k obsahu základny?

Řešení. (Zaslal p. *Gustav Lusk,* stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Je-li strana celého kužele s, strana horní části x, poloměr základny r a poloměr řezu ϱ, mimo to α úhel strany se základnou, platí rovnice:

$$\pi\varrho^2 + \pi\varrho x = \pi\varrho^2 + \pi r^2 + \pi (r + \varrho)(s - x),$$

$$x^3 : s^3 = 1 : 2.$$

Dosadíme-li do první rovnice hodnoty

$$\varrho = x \cos \alpha, \quad r = s \cos \alpha,$$

vypočítáme odtud

$$x = s \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = s \cos \frac{x}{2}.$$

Z rovnice druhé jde

$$x = \frac{s}{\sqrt[3]{2}},$$

pročež

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2},$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = \sqrt[3]{2} - 1.$$

Obsah řezu má se pak k obsahu základny jako

$$\varrho^2 : r^2 = x^2 : s^2 = 1 : \sqrt[3]{4}.$$

Úloha 13.

V pravidelném jehlanu tvoří dvě sousední hrany pobočné úhel 30°, dvě sousední stěny pobočné úhel 146°4′28″. Kolikaboký jest jehlan?

Řešení. (Zaslal p. *Čeněk Nevečeřal*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.)

Je-li úhel dvou sousedních hran pobočných β, a úhel dvou sousedních stěn pobočných δ, jest při pravidelném jehlanu n-bokém

$$\cos\alpha = \cos\beta \,.\, \sin\frac{\gamma}{2},$$

kdež

$$\alpha = \frac{2R}{n}.$$

Z daných podmínek vypočítáme logarithmicky

$$\alpha = 45^0,$$

pročež jehlan je 8miboký.

Úloha 14.

Vrchol čtverce má souřadnice (12, 15), úhlopříčka jím neprocházející má rovnici $5x + 12y - 71 = 0$. Které souřadnice mají ostatní tři vrcholy čtverce?

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Rumler*, stud. real. v Prostějově.)

Budiž a (x_1, y_1) daný vrchol čtverce $abcd$; úhlopříčka jím procházející má rovnici

$$y - 15 = \frac{12}{5}(x - 12)$$

čili

$$12x - 5y - 69 = 0.$$

Průsečík s obou úhlopříček, střed čtverce, určen souřadnicemi

$$x_0 = 7,\ y_0 = 3,$$

vyhovujícími rovnicím obou úhlopříček.

Jsou-li x_3, y_3 souřadnice vrcholu c proti a položeného, jest

$$x_0 = \frac{x_1 + x_3}{2},\quad y_0 = \frac{y_1 + y_3}{2},$$

z čehož vypočítáme

$$x_3 = 2,\ y_3 = -9.$$

Abychom ustanovili souřadnice vrcholů b (x_2, y_2) a d (x_4, y_4), hledejme průsečíky dané úhlopříčky s kružnicí středu s a poloměru $\overline{sa} = 13$. Rovnice křivky této jest

$$x^2 + y^2 - 14x - 6y - 111 = 0$$

a hledané souřadnice

$$x_2 = -5,\ y_2 = 8$$
$$x_4 = 19,\ y_4 = -2.$$

Úloha 15.

Bodem p (6, 3) stanoviti přímku P, která s přímkami

$$M \equiv 3x + y - 6 = 9$$
$$N \equiv x - 3y + 8 = 0$$

omezuje trojúhelník rovnoramenný.

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Kerlín*, stud VII. tř. g. v Opavě.)

Bodem p procházejí dvě takové přímky P_1, P_2 rovnoběžně k osám O_1, O_2 půlícím úhly daných přímek M, N. Předpokládáme-li rovnice přímek těchto ve tvaru normálném, jsou rovnice os

$$O_{1,2} \equiv M \pm N = 0,$$

čili v daném případě

$$O_1 \equiv 2x - y + 1 = 0$$
$$O_2 \equiv x + 2y - 7 = 0.$$

Přímky žádané jsou pak

$$P_1 \equiv x + 2y - 12 = 0$$
$$P_2 \equiv 2x - y - 9 = 0.$$

Úloha 16.

Jsou-li A_1, A_2, A_3 směrnice tří přímek, z nichž každé dvě tvoří spolu úhel 60^0, dokažte, že

$$\frac{A_1 + A_2}{A_3} + \frac{A_2 + A_3}{A_1} + \frac{A_3 + A_1}{A_2} = 6.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jan Kapras*, stud. VII. tř. g. v Brně.) O směrnicích daných platny jsou vzorce

$$\frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2} = \frac{A_2 - A_3}{1 + A_2 A_3} = \frac{A_3 - A_1}{1 + A_3 A_1} = \sqrt{3}.$$

Z nichž obdržíme rovnice

$$A_2 - A_3 = \sqrt{3} + A_2 A_3 \sqrt{3}$$
$$A_3 - A_1 = \sqrt{3} + A_1 A_3 \sqrt{3}\ ;$$

odečtouce pak druhou od první a dělíce hodnotu A_2, nalezneme vztah

$$\frac{A_1 + A_2}{A_3} = 2 - (A_1 - A_2)\sqrt{3}\cdot$$

Dle obdoby jest

$$\frac{A_2 + A_3}{A_1} = 2 - (A_2 - A_3)\sqrt{3}$$
$$\frac{A_3 + A_1}{A_2} = 2 - (A_3 - A_1)\sqrt{3},$$

z čehož sečtením vychází relace daná.

Úloha 17.

Podati jest důkaz, že rovnici

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = c$$

lze graficky řešiti takto: Sestrojme v pravoúhlé soustavě bod p *(a, b) a kružnici $x^2 + y^2 = c^2$; vedeme-li bodem p tečnu dotýkající se v bodě m, tvoří poloměr $\overline{om}$ s osou X žádaný úhel α.*

Řešení. (Zaslal p. *Viktor Kidles,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Jsou-li x_1, y_1 souřadnice dotyčného bodu, jest

$$x_1 = c\cos\alpha, \quad y_1 = c\sin\alpha$$

a rovnice tečny

$$x_1 x + y_1 y = c^2$$

čili

$$x\cos x + y\sin\alpha = c.$$

Jelikož tečna jde bodem (a, b), jest

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = c,$$

což bylo dokázati.

Úloha 18.

Která jest číselná výstřednost ellipsy, jejíž parametr jeví se z jednoho vrcholu v úhlu α, ze druhého v úhlu β?

Řešení. (Zaslal p. *Otto Ottis*, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.)

Jsou-li poloosy ellipsy a, b, jest parametr

$$p = \frac{b^2}{a},$$

délková výstřednost

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

a číselná výstřednost

$$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Dle podmínek úlohy jest

$$\frac{p}{a - e} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{a}{a + e} = \operatorname{tg}\beta,$$

tudíž

$$\frac{a + e}{a - e} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Odtud ustanovíme

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$$

čili

$$\varepsilon = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Úloha 19.

Ohniskem hyperboly, jejíž poloosy jsou a, b, prochází sečna kolmá k asymptotě. Jak dlouhou tětivu obsahuje?

Řešení. (Zaslal p. *Methoděj Nečas*, stud. VII. tř. gymn. v Brně.)

Rovnice dané hyperboly budiž

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2;$$

potom jest rovnice úlohou stanovené sečny

$$y = -\frac{a}{b}(x - e),$$

kdež

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

jest výstřednost hyperboly. Průsečíky dané sečny s hyperbolou mají souřadnice

$$x_{1,2} = \frac{a(a^3 \pm b^3)}{e(a^2 - b^2)}$$

$$y_{1,2} = \frac{ab^2}{e(b \mp a)}.$$

Jelikož pak

$$x_2 - x_1 = \frac{2ab^3}{e(a^2 - b^2)}$$

$$y_2 - y_1 = -\frac{2a^2b^2}{e(a^2 - b^2)},$$

jest délka hledané tětivy

$$t = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{2ab^2}{a^2 - b^2}.$$

Úloha 20.

Dělová koule o hmotě 15 kg jest vystřelena rychlostí 500 m z děla 3 m dlouhého. Kolik megadyn obnáší střední síla prachu působící na kouli?

Řešení. (Zaslal p. *František Košelka,* stud. VII. tř. g. ve Vel. Meziříčí.)

Síla působí zde na dráze $s = 300$ *cm*, konečná rychlost $v = 50000$ *cm*, hmota koule $m = 15000$ *g*. Koule v dělu vykonala pohyb rovnoměrně zrychlený v čase t a s urychlením a; pročež

$$\frac{at^2}{2} = 300$$

$$at = 50000$$

$$a = \frac{12500000}{2}.$$

Střední síla

$$P = am = 62500000000 \text{ dyn}$$
$$= 62500 \text{ megadyn}.$$

Úloha 21.

Na hmotu rychlostí 4 m se pohybující přestane působiti síla a hmota pohybuje se pak ještě 18 vteřin; jak velký jest koefficient tření?

Řešení. Zaslal (p. *Jan Vojtěch,* stud. VII. tř. g. v Uher. Hradišti.)

Velikost tření T vyjádřena jest rovnicí

$$T = ma,$$

kdež m značí hmotu, a zpoždění.

Jest však také

$$T = kmg,$$

při čemž k jest koefficient tření, mg váha tělesa. Zpoždění určíme z rovnice pro konečnou rychlost

$$v = at$$

a bude tedy

$$k = \frac{a}{g} = \frac{v}{gt} = 0{\cdot}0226\ldots$$

Úloha 22.

Řešiti rovnici

$$\sqrt{4x^2+3} = \sqrt[3]{8x^3+9x}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Břetislav Hromádko*, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.)

Zmocníme-li obě strany rovnice 6ti, nabude tvaru racionálného

$$(4x^2+3)^3 = (8x^3+9x)^2$$

a po vykonané redukci

$$27x^2+27=0.$$

Jest tedy

$$x = \pm i.$$

Úloha 23.

Řešiti soustavu rovnic

$$2^x(4^x-5)+3^y(9^y-5)=4700$$
$$2^x(4^x-9)+3^y(9^y-9)=4600.$$

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hýbner*, stud. VII. tř. gymn. v Opavě.)

Položíme-li

$$2^x = u,\quad 3^y = v,$$

obdržíme soustavu rovnic

$$u^3+v^3-5(u+v)=4700$$
$$u^3+v^3-9(u+v)=4600,$$

ze které vyvodíme

$$u^3+v^3=4825$$
$$u+v=25.$$

Odtud známým spůsobem najdeme

$$u_1 = 16, \quad u_2 = 9$$
$$v_1 = 9, \quad v_2 = 16;$$

přejdeme-li k původním neznámým, bude

$$2^{x_1} = 16, \quad 3^{y_1} = 9$$
$$x_1 = 4, \quad y_1 = 2;$$
$$2^{x_2} = 9, \quad 3^{y_2} = 16.$$

$$x_2 = \frac{\lg 9}{\lg 2} = 3{\cdot}164 \ldots$$

$$y_2 = \frac{\lg 16}{\lg 3} = 2{\cdot}523 \ldots$$

Správné řešení úloh zaslali pp.:

Jan Bartuněk, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 2., 4., 5., 7., 9.

Bohdan Bartošek, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 5. až 14.

František Binder, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1., 5., 8. až 20.

František Borkovec, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 4. až 11., 14., 15., 17., 18.

Josef Čapek, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 2., 3., 5., 6., 7., 9., 10., 11., 13., 15., 17., 18., 20.

Oldřich Fiala, studující v Pardubicích, úl. 10.

Josef Franc, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 9., 10., 11., 13., 14., 15., 17., 18.

Eduard Gryc, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 9., 14., 15., 20.

Václav Haitich, stud. g. v Praze, úl. 1. až 23.

Josef Hamral, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 5., 8., 11., 20., 21.

Bohumil Hamrle, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 5., 8., 9., 11., 21.

Karel Hanauer, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 2., 5. až 12., 14., 15., 17.

Jan Handl, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 15.

Václav Havlíček, stud. VII. tř. r. v Budějovicích, úl. 1., 3. až 11., 13. až 19.

Frant. Herrmann, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 4. až 9., 14., 15., 17., 18.

Břetislav Hromádko, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze úl. 22.

Rudolf Hruša, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 1. až 21.
Karel Hýbner, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 22., 23.
Rudolf Jambor, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 23.
Jan Kapras, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 23.
Rudolf Kerlín, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 5., 6., 9., 10., 14., 15.

Viktor Kidles, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 12., 14., 16. až 19.

Artur Klein, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 4., 5., 6., 8. až 19., 21.

Vilém Kloubek, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 1., 2., 5., 6. až 12., 14., 15., 17.
František Košelka, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 21.
Slč. Marie Košelkova, chov. II. ročn. ústavu učit. v Brně, úl. 3., 9., 10., 20.
Josef Kovařík, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 5. až 12., 15., 17., 18.
Jan Kučera, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 4. až 7., 9., 10., 11.
Josef Lelek, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 14., 15.
Gustav Lusk, stud., VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 8., 9., 11., 12., 19.
Bedřich Macků, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 5. až 16.
František Machala, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 2., 4. až 12., 14., 15., 20., 21.
Rudolf Milota, stud. VII. tř. g. v Písku, úl. 1. až 21.
Václav Mišan, stud. VII. tř. g. v Budějovicích, úl. 2., 4. až 13., 20., 21.
Alois Moravec, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 19., 21.
Josef Mucha, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 23.
Karel Nečas, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 3. až 7., 9., 10., 15. až 18., 20., 21.
Methoděj Nečas, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 21.
František Němeček, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 4., 5., 7., 9., 10.

Jiří Nerád, stud. g. v Hradci Králové, úl. 1., 2., 4. až 15., 17. až 19., 22, 23.
Čeněk Nevečeřal, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 2., 5., 6., 8. až 20.
Vilém Novák, stud. VIII. tř. g. v Jičíně, úl. 2., 4. až 10., 14., 15.
Norbert Novotný. stud. VII. tř. r. v Budějovicích, úl. 2., 4., 7., 9., 10., 11., 13., 14., 15., 18.
Otto Ottis, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 21.
Maxmilian Paďour, stud. VIII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 5., 7., 14.
Josef Poláček, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 2., 4. až 10.
Jan Pospíšil, stud. VII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 14.
Josef Procházka, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 5., 9., 11., 14., 15.
Karel Prokeš, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 3., 4., 9., 10., 11.
Jindřich Racek, stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 5., 6., 9., 10., 12., 14., 15.
Karel Regner, stud. VI. tř. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 11.
Antonín Rejzek, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1., 5., 6., 7., 9. až 12., 14. až 18., 22., 23.
Josef Rieger, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 1. až 23.
František Rumler, stud. r. v Prostějově, úl. 2., 5., 6., 9., 11., 14.
Josef Ryš, stud. VIII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 5., 6., 8. až 12., 14., 15., 17., 18.
Richard Ševčík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 5., 6., 9., 10., 12., 14., 15., 20.
Otto Šindelář, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 23.
Ferdinand Šob, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 4., 9., 10.
Václav Špaček, stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 1. až 23.
Jan Štěpán, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 22., 23.
Rudolf Tereba, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 21.
Dominik Trnka, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 5., 6., 7., 9., 11.
František Truhlář, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 4., 9., 10.
Gabriel Tůma, stud. VI. tř. g. v Budějovicích, úl. 1., 5., 8., 9., 11.
Václav Vaněček, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 23.

František Velíšek, stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 2., 4. až 12., 14. až 17., 19., 20., 21.
Jan Vojtěch, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1. až 21.
J. Vomočil, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 5., 7.
František Záviška, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 20., 22., 23.
Otakar Zich, stud. VIII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 2., 4. až 12., 14. až 18., 20., 21.
Max Zwillinger, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 2., 5., 7. až 18.

Uloha 51.

Řešiti jest rovnici

$$x^{\lg x} \cdot \sqrt[n]{x} = x^n \cdot \sqrt[\lg x]{x}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 52.

Geometrický průměr dvou čísel jest 600, průměr arithmetický jest o 49 větší než harmonický, Která jsou ta čísla?

Týž.

Úloha 53.

Řešiti rovnici

$$tg \frac{x + \alpha}{2} + tg \frac{x - \alpha}{2} = 4 \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\cos x}\right),$$

je-li

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Týž.

Úloha 54.

Dokázati, že

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \ldots . \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}.$$

R.

Úloha 55.

Dokázati, že

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x.$$

R.

Úloha 56.

Dokázati, že

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sec x+\operatorname{tg}\frac{x}{4}\sec\frac{x}{2}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n+1}}\sec\frac{x}{2^n}=\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n+1}}.$$

R.

Úloha 57.

Dokázati, že

$$\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{tg} 2^{k-2}x+\operatorname{ctg} 2^{k-1}x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg} 2^{n-1}x.$$

R.

Úloha 58.

Dvě kružnice poloměrů r_1, r_2 protínají se pravoúhelně. Která jest délka jich společné tečny a společné tětivy?

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 59.

Poloměry dvou kružnic se protínajících jsou v poměru $1:5$, středná obou $s = 13$ dm, společná tečna má délku rovnou harmonickému průměru obou poloměrů. Které jsou poloměry kružnic? V kterém úhlu se obě křivky protínají?

Týž.

Úloha 60.

Dvě kružnice protínají se pravoúhelně; společná jich tětiva má délku $u = 20$ cm, a společná tečna $t = 21$ cm. Vypočítejte poloměry obou kružnic.

Týž.

Úloha 61.

Základnou jehlanu je rovnostranný trojúhelník o straně s, plášť jehlanu (v rovinu rozprostřený) jest rovnoramenný trojúhelník o půdici 3s, rameni 2s. Který jest povrch a obsah jehlanu? Který poloměr má koule jemu opsaná, který vepsaná?

Týž.

Úloha 62.

V trojúhelníku abc, jehož úhly jsou α, β, γ, vedeny příčky ao, bo, co tak, že

$$\sphericalangle oab = \alpha_1, \quad \sphericalangle obc = \beta_1, \quad \sphericalangle oca = \gamma_1.$$

Jest dokázati relaci

$$(ctg\,\alpha_1 - ctg\,\alpha)\,(ctg\,\beta_1 - ctg\,\beta)\,(ctg\,\gamma_1 - ctg\,\gamma)$$
$$= cosec\,\alpha\, cosec\,\beta\, cosec\,\gamma.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 63.

Vyšetřiti geometrické místo bodů, které mají od přímek

$$M \equiv ax + by + c = 0$$
$$N \equiv bx - ay + d = 0$$

součet neb rozdíl vzdáleností rovný $\pm s$. *Jak velkou plochu omezuje toto geometrické místo?* *Týž.*

Úloha 64.

Který význam v pravoúhlé soustavě souřadnic má rovnice

$$2\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) + 6\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) = 3\left(1 + \frac{12}{xy}\right)?$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 65.

Ohniskem paraboly prochází kružnice, která se paraboly ve dvou bodech dotýká. Je-li p parametr paraboly, který jest poloměr kružnice? *Týž,*

Úloha 66.

Která jest rovnice tečny vedené v bodě dotyčném (x_1, y_1) *ke křivce stupně třetího*

$$x^3 - y^3 - 3a^2x = 0?$$

R.