O původu a rozvoji nauky o číslech.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Úvod.

Dva zvláštní zjevy poskytuje rozvoj každé vědy a sice že *v rozličných dobách rozličné části se pěstují s obzvláštní zálibou* a že *praktické potřeby vedou k theoretickým výzkumům*, z čehož pak plyne, že *stupeň rozvoje a dokonalosti jest funkcí času* neb závislý na době, do které připadá.

Co nejjasněji vynikají tyto zjevy v dějinách mathematiky. V každém skoro století bylo jiné odvětví zvláště oblíbeno a pěstováno aneb v modě (sit venia verbo), v každém skoro století předkládaly se zvláštní úkoly k řešení, aby se tím prospělo některé stránce praktického života, z nichž pak vyplynul též další pokrok i pro theorii.

A tentýž úkaz možná pozorovati i v jednotlivých odborech mathematických.

Obraťme pozornost svou na př. k odvětví, jež s theoretického stanoviska nazýváme *naukou o číslech*, se stanoviska pak praktického *neurčitou analytikou*, i tu vyskytují se oba svrchu vytknuté zjevy zcela jasně: bylyť doby, kde se první mathematikové s tímto odvětvím velmi pilně zanášeli, byly však i též doby, kde si málo kdo všiml těchto subtilních výzkumů; bylyť doby, kde z rozličných stran kladeny praktické otázky tomuto druhu výzkumů mathematických, od jichž řešení se očekávalo mnoho prospěchu i pro theorii i pro praksi některou, byly však i též doby, kde úlohy sem patřící za neplodné vyhlašovány a jen mathematickým podivínům přenechávány.

Co zvláštnost sluší při tomto odvětví ještě vytknouti, že tu oba momenty, i theoretický i praktický, stejné závažnosti si dovedly zachovati až na naše časy, takže kniha s nadpisem „O theorii čísel“ totéž obyčejně obsahuje co kniha s nadpisem „Neurčitá analytika“; vykládáť se tuto nauka o číslech, aby se jí mohlo užiti k řešení rovnic neurčitých, kdežto onde se řeší rovnice neurčité, aby se ukázalo, jak se dá s prospěchem užiti vlastnosti čísel, o nichž právě bylo jednáno.

Velmi dobře vylíčil tento poměr slavný *Legendre*, první spisovatel samostatné a systematické nauky o číslech; praví̆ť v poznámce k předmluvě k prvnímu vydání svého spisu „Essai sur la théorie des nombres“ Paris 1798: „Je ne sépare point la Théorie des nombres de l'Analyse indéterminée, et je regarde ces deux parties comme ne faisant qu' une seule et même branche de l'Analyse algébrique. En effet, il n'est pas de théorème sur les nombres qui ne soit relatif à la résolution d'une ou de plusieurs équations indéterminées“, a uvádí co příklad poučku, že kmenné číslo tvaru $4n+1$ možná rozložiti na dva čtverce, z čehož naopak lze souditi, že neurčitá rovnice tvaru

$$x^2+y^2=a$$

dá se celistvými čísly řešiti, značí-li a číslo tvaru $4n+1$.

Co jen všeobecně řečeno, pozná se nejlépe z krátkého vylíčení původu a rozvoje nauky o číslech, kteréž tuto podlé nejspolehlivějších pramenů jest sestaveno a na dva oddíly rozlišeno, z nichž první sahá až do *Fermata*, druhý pak jde až na naše časy.

Doba I.

Od Pythagora až do Fermata.

(Od r. 500 př. Kr. až do 1650 po Kr.)

Že počítání vůbec má původ svůj v praktických potřebách života rolnického a kupeckého, o tom nelze všeobecně ani pochybovati, a že dosáhlo největšího rozšíření a zdokonalení v zemích, kde tento život se co nejmohutněji rozvinul, následuje z podstaty věci samy.

V nejstarších kulturních státech jako jest *Čína*, *Indie*, *Babylonie*, *Fenicie* a *Egypt* hledati sluší tudíž první zárodky a první výkvěty snah počtářských. Že tu vedle ukojení potřeb všedního života během času též se objevily výsledky badání hlubšího, k němuž duch lidský z pouhé vědochtivosti jest puzen, lze též velmi snadno očekávati a z jednotlivých zpráv i dokázati. Nejstarší příklady takovýchto výzkumů poskytuje nám Čína, kde r. 1100 př. Kr. vydal císař *Čau-kong*, nevšední to přítel a znatel počtářství, zvláštní spis, v němž se vyskytuje v §. 6. i poučka, že v pravoúhelném trojúhelníku měří délka přepony 5, měří-li délka jedné odvěsny 3 a druhé 4, zvláštní to vyjádření tedy tak zvané poučky Pythagorovy.

Mocného podnětu dostalo se pak pátrání po zvláštních poměrech číselných a tudíž i po vlastnostech čísel samých potřebami praktické *astronomie*, zejména pak *časoměrství*, jehož podstata založena jest v cyklech rozmanitých zjevů nebeských. A jelikož tu podmínky nejsou zúplna a zřejmě položeny, nýbrž jen vedlejšími okolnostmi všeobecně určeny, bylo tu řešiti úkoly, v nichž se vyskytovalo více veličin hledaných nežli poměrů daných, bylo tu tedy řešiti tak zvané *rovnice neurčité*, vlastně nedostatečně určené.

Kde tyto úkoly ponejprv se vyskytly a byly řešeny, tu hledati sluší původ neurčité analytiky a tudíž i nauky o číslech. A poněvadž podlé historických pramenů především *Chaldaeové* pěstovali hvězdářství — astronomická jejich pozorování sáhají až do r. 2226 př. Kr. — a zaváděli rozmanité periody časové jako *sossus*, *nerus*, *sarus:* tož jest pravdě nanejvýš podobno, že Chaldæové byli prvními pěstiteli nauky, o níž tuto jednáme, a že odtud do jiných zemí, zejména do Indie, přenešena byla s astronomií, s níž i dlouho dále byla pěstována. Nejvíce tomu pak nasvědčuje i ta všestranně uznaná okolnost, že v Babyloně nabyl zvláštních arithmetických vědomostí *Pythagoras*, kterýmž počíná řada *známých* pěstitelů nauky o číslech.

Ač tedy na jisto lze tvrditi, že neurčitá analytika jest původu prastarého, možná přece rozvoj její stopovati jen od VI. století př. Kr., kteréž v dějinách lidské vzdělanosti tak skvěle vyniká; žilit tu současně v Persii *Zoroaster* (599—522), v Řecku *Pythagoras* (569—470), v Číně *Konfutse* (550—477) a v Indii *Gautama Buddha* (540—468), čtyrhvězdí to národních učitelů nesmrtelných, jichž učení až do dnešního dne v rozličných tvarech se zjevuje.

Pythagoras, který v sobě soustředil učenost řeckou, egyptskou a chaldejskou, stál na výši tehdejší vědy, když r. 513 byl z babylonského zajetí propuštěn; odtud možná tedy vlastní jeho badání počítati.

Pěstoval pilně řeckou *logistiku* (mechanismy početní) i *arithmetiku* (duch početní); co do první stránky snažil se v Řecku zavésti indický způsob počítání, co do druhé zkoumal velmi důkladně vlastnosti čísel a vynalezl některé poučky, které v geometrickém rouše dosud se uvádějí.

Tak zvaná věta Pythagorova, kterou ponejprv všeobecně dokázal, ač bez pochyby již dříve byla objevena a to cestou arithmetickou, souvisí s jinou do theorie čísel náležející, určiti dvě čísla tak, aby součet jich čtverců byl opět čtvercem, aneb v rouše geometrickém, sestrojiti racionální trojúhelníky pravoúhelné. Pythagoras dal pravidlo toto: zvolí se liché číslo nějaké, od jeho čtverce se odejme 1 a dělí se 2, čímž povstane číslo druhé a zvětší-li se o 1, číslo třetí, jehož čtverec jest tak velký jako součet čtverců obou čísel prvních, jakž nyní snadno se pozná ze stejniny Pythagorovy

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2$$

aneb jednodušší Platonovy

$$(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^2+1)^2.$$

Podlé tohoto pravidla možná tedy sestrojovati pravoúhelné trojúhelníky, jichž strany vyjadřují čísla celistvá; budeť tu na př. pro

$n=2$,	3, 4, 5	
$n=3$	8, 6, 10	neb 4, 3, 5
$n=4$	15, 8, 17	
$n=5$	24, 10, 26	„ 12, 5, 13 atd.

Zde spočívá též základ čísel irracionálních, jež Pythagoras poprvé vytknul a s nimiž pozdější mathematikové jako Euklid tak pilně se zanášeli.

Jak daleko dospěl v nauce o číslech, nelze tak snadno určiti; ze spisů jeho žáků jde však zřejmě na jevo, že rozeznával již čísla *kmenná* a *složená*, *lichá* a *sudá*, *čtvercová* a *obdélníková* (τετράγωνοι a ἑτερομήκεις), že znal čísla *polygonální* a t. p.

Ale nejenom pilným pěstitelem mathematiky byl Pythagoras, nýbrž především šťastným zpytovatelem zákonů přírodních, jež uváděl na číselné pojmy, z čehož později povstal mystický význam jednotlivých čísel a konečné se vyvinula symbolika odvážná, v níž pravé jádro bylo zcela pochováno. S hlavním pravidlem, že v přírodě děje se vše podlé určitých zákonů, spojen tu mystický výrok, že čísla jsou podstatou všech věcí a že zřízení všehomíra představuje harmonická soustava čísel a jich poměrů atd.

Že následovníci jeho spustili se zcela střízlivé půdy mathematického badání a zcela zabředli v mysticismu mnohotvárném, jest velice litovati, jelikož tím postup a další rozvoj nauky o číslech byl zastaven a to tím snadněji, anto Řekové vůbec byli více nakloněni názornému měřictví nežli abstraktnímu počtářství, čemuž na př. problem delický o zdvojnásobení krychle velmi jasně nasvědčuje.

Teprv dalším a hloub sahajícím stykem živlů řeckých s orientálními po smrti Alexandra Velkého, zvláště pak založením alexandrinského musea Ptolomeem I. r. 320. přicházela arithmetická stránka mathematických výzkumů víc a více k platnosti, jakž dokazuje jeden z nejprvnějších akademiků

Euklides, který již r. 308 v Alexandrii učil a jehož hlavní zásluhy založeny jsou v geometrii; vyskytujeť se ve spisu jeho στοιχεῖα nazvaném mnoho pouček arithmetických a sice v 7. knize 41, v 8. 27 a v 9. 36, mezi nimiž největší část vztahuje se k vlastnostem čísel, zejména pak *čísel kmenných* (ἀριθμὸς πρῶτος, Primzahl); tu vyskytuje se též poučka po něm do dnes jmenovaná, že součin PQ není dělitelný kmenným číslem p, platí-li podmínka

$$P < p, \ Q < p.$$

Jak možná čísla kmenná v přirozené řadě číselné vytknouti, ukázal velmi jednoduchým spůsobem *Eratosthenes* (275—195 př. Kr.), kterýžto spůsob až na naše časy zachoval názvem *κόσκινον Ἐρατοσθένους*, *cribrum Eratosthenis*, *síto E.* památku tohoto nejslavnějšího učence alexandrinského.

Napíšeme-li řadu lichých čísel

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31,
33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49. 51, 53, 55, 57, 59, 61,
63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91,
93, 95, 97, 99, . . .

a přeškrtneme-li, trojkou počínajíce,

	každé další	*třetí* číslo, tedy	9, 15, 21, . . .
pak $5^2 = 25$ a	„ „	*páté* „ „	25, 35, 45, . . .
„ $7^2 = 49$ a	„ „	*sedmé* „ „	49, 63, 77, . . .
		a. t. d.	

obdržíme, připojíme-li 1, 2, řadu kmenných čísel tuto:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,
41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,
71, 73, 79, 83, 89, 97,
101, 103, . . .

Avšak následující doba rychlého rozkvětu řecké geometrie, v níž se vyznamenali *Archimedes, Konon*, hlavně pak *Apollonios*, *Hipparch* a *Ptolemaeos*, nepřihlížela k dalšímu zpytování čísel, až vystoupil asi 100 let po Kr.

Nikomachos z Gerasy se svým spisem o arithmetice jednajícím „Ἀριθμετικῆς εἰσαγωγῆς βιβ. β̄."

Ve dvou knihách vykládá tu vlastnosti čísel, zejména pak v druhé spůsob, jak sestavováním jednotek rozmanité řady čísel obrazcových neb figurovaných možná vyvésti; povstaneť na př. opětovaným sečítáním z řady jednotek

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, . . .
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, . . .
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, . . .
1, 4, 10, 20, 35, 56, . . .
1, 5, 15, 35, 70, . . .
1, 6, 21, 56, . . .
a t. d.

Podobně možná z řady čísel trojúhelníkových vyvésti čísla čtvercová; jestiť tu

1, 3, 6, 10, 15, 21, . . .
1, 3, 6, 10, 15, . . .
―――――――――――――
1, 4, 9, 16, 25, 36, . . . a t. d.

Dále ukazuje, jak sečítáním lichých čísel povstávají čísla krychlová; jest totiž

1,	$3+5$,	$7+9+11$,	$13+15+17+19$,	...
1,	8	27	64	...
1^3,	2^3	3^2	4^3	...

Konečně budiž tu ještě poznamenáno, že znal již podmínku jak nutno rozložiti dané číslo, aby součin částí byl maximum.

Jak patrno, zanášel se Nikomachos spůsobem Pythagorovým s vlastnostmi čísel a nepovznesl nauku tuto značně. Mnohem hloub vnikl

Theon ze Smyrny (150 po Kr.), jehož 32 kapitol arithmetických obsahuje nejen vše, co Nikomachos již znal, nýbrž i mnohé nové vlastnosti čísel kvadratických a konečně poučky týkající se neurčitých rovnic stupně druhého.

Pomocí stejnoramenného pravoúhelného trojúhelníku poznáme snadno, jak se dá sestrojiti čtverec jednou tak velký nežli jest daný, není však možná udati číslo, rozuměj celistvé, jehož čtverec by byl jednou tak velký jako čtverec jiného čísla; vedlé toho pak jest celá řada čísel, jichž čtverec rovná se zdvojenému čtverci čísla jiného zmenšenému neb zvětšenému o 1, vyhovujících tedy podmínce

$$2x^2 \pm 1 = y^2.$$

Všeobecný spůsob, jak se mají tyto rovnice řešiti, nebyl však Theonem podán.

Po Theonovi dlouho se nikdo nevyskytl, kdo by novými výzkumy na tomto poli se byl vyznamenal, až konečně skoro na sklonku slávy akademie alexandrinské pojednou co hvězda první velikosti na málo jasné obloze neurčité analytiky se objevil

Diofantos (350 po Kr.), který spisem svým *Πρωβλημάτων ἀριθμετικῶν βιβλία ιγ* tak povznesl nauku o číslech, že vděčné potomstvo si navyklo neurčité rovnice jmenovati rovnicemi Diofantickými.

V klassickém spise tomto, kterýž původně byl na 13 knih rozdělen a k němuž připojeno bylo pojednání o číslech mnohoúhelných „*περὶ τῶν ἀριθμῶν πολυγώνων*“ jakož i poučky o vlastnostech čísel, sestaveno jest velké množství úloh z neurčité analytiky, řešeny tu rozmanité neurčité rovnice stupně prvního i druhého spůsobem velmi duchaplným, ač více méně umělým. Při rovnicích tvaru

$$ax^2 \pm b = y^2$$

udává alexandrinský učenec tento podmínky, kdy jsou v celých číslech řešitelny, jakož i spůsob, jak z jednoho řešení

$$x = m, \quad y = n$$

možná vyvésti jiné. Ze všeho pak jde na jevo, že bádání jeho jsou co do podstaty vesměs originální, byť i mnohé úlohy co do znění souhlasily s indickými.

Ještě lépe jest samostatnost jeho pozorovati v nauce o číslech polygonálních, jež všeobecně ponejprv *Hypsikles* (150 př. Kr.) definoval. Dokazujeť o nich, že každé číslo jest číslem polygonálním, vyjmouc 1, 2; dále, že spojením čísel mnohoúhelných s čtverci čísel stranám přiměřených povstávají čtverce, zejména pak, že z čísel

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d$$

sestaviti možná stejninu

$$8(a + d)(a + 2d) + a^2 = [(a + 2d) + 2(a + d)]^2;$$

mimo to ukazuje, že výraz

$$(m - 4)^2 + 8(m - 2)p$$

jest vždy čtvercem, značí-li p číslo polygonální řádu m-tého.

Co se tkne dalších vlastností čísel, jež tu sestavil, není možná rozhodnouti, zda-li byly jím vynalezeny aneb od jinud vyňaty; sem patří poučka, že číslo tvaru $4n + 3$ nemůže býti součtem dvou čtverců, že kmenné číslo tvaru $4n + 1$ vždy možná rozložiti ve dva čtverce, že součin čtverců dvou čísel jedničkou se lišících stane se opět čtvercem, přidá-li se k němu ještě součet těchto čtverců, což v našich symbolech vyjadřuje stejnina

$$(a + 1)^2 a^2 + (a + 1)^2 + a^2 = [a(a + 1) + 1]^2.$$

Že mohl Diofantos takové úlohy řešiti, jaké v jeho spisu se vyskytují, bylo následkem nejen ostrovtipu a důmyslu jeho, nýbrž i dobře zvolené a krátké symboliky jeho.

Aby totiž počítání zjednodušil, zavedl mnoho zvláštních znaků kvantitativních i operačních, takže by skoro za původce algebry mohl býti považován. Podlé našeho názvosloví jest u něho

$$
\begin{array}{lll}
1 = \mu o \nu \grave{\alpha} \varsigma & \text{znamení} & \mu^0, \\
x = \grave{\alpha} \rho \iota \vartheta \mu \grave{o} \varsigma & \text{"} & \varsigma, \\
x^2 = \delta \acute{\upsilon} \nu \alpha \mu \iota \varsigma & \text{"} & \delta^{\upsilon}, \\
x^3 = \kappa \acute{\upsilon} \beta o \varsigma & \text{"} & \kappa^{\upsilon}, \\
x^4 = \delta \upsilon \nu \alpha \mu o\text{-}\delta \acute{\upsilon} \nu \alpha \mu \iota \varsigma & \text{"} & \delta\delta^{\upsilon}, \\
x^5 = \delta \upsilon \nu \alpha \mu o\text{-}\kappa \acute{\upsilon} \beta o \varsigma & \text{"} & \delta\kappa^{\upsilon}, \\
x^6 = \kappa \upsilon \beta o\text{-}\kappa \acute{\upsilon} \beta o \varsigma & \text{"} & \kappa\kappa^{\upsilon},
\end{array}
$$

znamení *minus* (—) obrácené ψ atd., takže na př. znamená

jeho $\kappa^{\upsilon} . \bar{\alpha} ⫛ \delta^{\upsilon} . \bar{\varepsilon} \varsigma . \bar{\eta} ⫛ \mu^0 . \bar{\alpha}$

naše $x^3 - 5x^2 + 8x - 1.$

Obdivuhodným mužem tímto uzavírá se řada učenců řeckých, kteří se zanášeli badáním na poli neurčité analytiky, ač bylo jim podle vlastní povahy řecké cizím; neb jak dříve již bylo, poznamenáno, byla názornost hlavním požadavkem řeckého ducha, kterýž i poučky ryze arithmetické odíval do roucha geometrického. Ani důkladný komentár učené dcery Theonovy, *Hypatia* zvané, nebyl s to Diofantickým rovnicím zjednati dalších pěstitelů mezi učenci řeckými a to tím méně, jelikož nedlouho na to a sice r. 640 Omarem dobyta Alexandrie a ústavy vědecké tu zničeny.

Za to pěstovala se abstraktní nauka o číslech na příznivé půdě indické nyní tím bedlivěji, takže během krátkého času v této podivuhodné zemi dosáhla výše netušené a jen pilným badáním věku XVII. a XVIII. v Evropě dostižené.

Neurčité rovnice stupně prvního řešil již současník Diofantův *Arrya-Bhatta*, jehož můžeme podlé toho, co o něm staré podání vypravuje, považovati za indického Euklida.

Ještě důležitější jsou však pro nás spisy, jež sestavil v první polovici VII. století *Brahmegupta.* Jeho arithmetika jest systematický celek vědomostí, jež tehdejší doby nutno bylo znáti každému, kdo chtěl býti počtářem dokonalým.

Pro tento stručný přehled jest nejdůležitější 18. kapitola jeho astronomie, již věnoval algebře; učí tu v prvním oddělení čísly celistvými řešiti rovnice tvaru

$$ax + by = c,$$

v oddělení pátém pak neurčité rovnice s více neznámými, v šestém rovnice tvaru

$$xy + ax + by = c,$$

v sedmém konečně rovnice tvaru

$$ax^2 + b = y^2,$$

z čehož patrno, jaký tu pokrok učiněn v neurčité analytice.

Nejlépe se však poznává stupeň, na nějž se Indové v arithmetice a algebře vyšinuli, ze spisů *Bhaskary* asi kolem r. 1150 po Kr. sestavených, v nichž systematicky zpracováno, jakž spisovatel sám udává, co *Brahmegupta*, *Sridhara* a *Padmanabha* o předmětech mathematických dříve napsali.*)

V prvním oddělení arithmetiku obsahujícím a *Lilavati* nazvaném oslovuje v průběhu svých výkladů dosti zhusta Lilavati co osobu ženskou slovy „luzná, drahá děvo," „rozkošná Lilavati" a t. p., takže mnozí z toho soudili, že spis ten psán jest pro nějakou dámu indickou jmenem Lilavati; *luznou děvou* jest mu však *arithmetika*, jejíž krásy při každé příležitosti opěvuje. V 12. kapitole zanáší se řešením rovnic neurčitých a to čísly celistvými. Mnohem obšírněji a důkladněji jedná pak o tomto předmětu v oddělení algebraickém, *Vija-Ganita* nazvaném, kdež zavedeno též mnoho zvláštních znaků, jako u Diofanta, aby počítání stalo se jednodušším.

A tu probírá opět v druhé kapitole řešení rovnic neurčitých tvaru

$$\frac{ax \pm b}{c} = y,$$

kdež sluje *a dělencem*, *c dělitelem* a *b přídavkem*; způsob přestupného dělení, jakého tu užívá, dosud se uvádí v knihách učebních, arci co vynález století XVII.

V třetí kapitole řeší pak rovnice tvaru

$$cx^2 \pm 1 = y^2,$$

kdež značí *c součinitele*, 1 *přídavek*, *x kořen malý*, *y velký*; je-li přídavek negativní, žádá, aby součinitel byl součtem dvou čtverců.

V sedmé kapitole učí, kdy a jak možná celistvými čísly řešiti rovnice tvarů rozmanitých, jako

---

*) Spis Bhaskary *Siddhanta-siromani* přeložil r. 1817 *Colebrooke* co „Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara."

$$ax^2 + bx = y^2,$$
$$ax^4 \pm bx^2 = y^2,$$
$$ax^2 + by^2 = z^2 \quad \text{a t. d.}$$

a v kapitole poslední zanáší se hlavně řešením rovnic

$$xy = ax + by + c,$$

kteréž Brahmegupta již v astronomii své upotřebil; pravidlo tu podané jest velmi jednoduché a dá se i geometricky znázorniti; rozlož číslo $ab + c$ ve dva faktory m a n, pak jest

$$x = \begin{cases} m + b, \\ n + b, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} n + a, \\ m + a, \end{cases}$$

jakž snadno lze odůvodniti. —

Co Indové a Řekové na poli číselné theorie vyzpytovali, snažili se dědicové jejich *Arabové* aspoň zachovati pro pozdější věky, jelikož jim nebylo dáno v oboru tak subtilním a abstraktním pracovati s takovým úspěchem jako v oboru geometricko-astronomickém.

Již za ča-u kalifa *Almamuna* (814—833) sepsal *Abu Abdallah Mohamed ben Musa* zvláštní algebru, kde učí též řešiti neurčité rovnice spůsobem indickým; *algebr* sluje tu doplněk, kterým se negativní členy odstraňují. *)

Ku konci X. století přeložil slavný astronom *Abul-Vefa* (937—998) arithmetické knihy Diofantovy, aby soukmenovci jeho i dále mohli pracovati v analytice neurčité, avšak nových úspěchů podnik tento neměl; nebylať tu ještě pravá doba.

Teprv když západní Evropa začala choditi do školy k Arabům a tu se naučila znáti poklady klassické literatury, dostala se i nauka o číslech do rukou jiných, spůsobilejších a dále ji vedoucích. Zároveň podává se nám tím opět nový, nanejvýš zajímavý příklad, jak praktické potřeby vedou k theoretickým výsledkům.

Městský písař v Pise jmenem *Bonaccio* byl od kupectva tohoto města poslán do obchodního města severo-afrického *Bugia* zvaného, aby zde hájil jeho zájmy; a seznav tu výhody arab-

---

*) Od této operace pochází pak jmeno *algebra*. Poněvadž Mohamed ben Musa narozen byl v městě *Kharism*, nazýván byl též *Alkharesmi*, odkudž přenesením ze spisovatele na obsah spisu povstalo jmeno *Algorithmus*. Viz *Cantor*, „Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker“ Halle, 1863. Algebru jeho vydal *Rosen* 1831 v Londýně.

ského počtářství, vedl vším úsilím syna svého *Leonarda* k tomu, aby si osvojil všechny vědomosti arithmetické, jež bylo tehdáž možná mezi Araby si zjednati. Nadaný syn tento Bonaccia, krátce *Fibonacci* (filius Bonaccii) později jmenovaný, uchopil se příležitosti této nevšední a v krátké době stál, abychom se moderním výrazem vyjádřili, na tehdejší výši vědy, a poznav výhody číselné soustavy indické, zasadil se též o to, aby ji v Evropě přivedl k platnosti. I sepsal zvláštní spis „*Liber abaci*", který ponejprv vyšel 1202 a po druhé 1228, v němž velmi prakticky a důkladně vykládá rozličné způsoby početní, takže odtud hlavně se šířila známost orientálních praktik kupeckých vůbec. V poslední neb 15. kapitole spisu tohoto obsaženy jsou též rozličné úlohy z neurčité analytiky, které Diofanta připomínají.*) Mimo to sepsal zvláštní pojednání o číslech kvadratických, kteréž obsahuje i úlohu historicky známou, určiti číslo x a y tak, aby

$$x^2 \pm 5 = y^2.$$

Úlohu tuto předložil mu vedlé jiných *Jan z Palerma* r. 1225 v Pise, kdež Leonardo císaři Bedřichu II. právě tu meškajícímu byl představen co znamenitý mathematik, jemuž není nikdo roven; když pak na všechny otázky zručně a důkladně bylo odpověděno, doléháno na něj, aby vzácné vědomosti své i s jinými sdělil, načež třemi spisy přání tomuto bylo vyhoveno.

O vlastnostech čísel psal způsobem Nikomachovým o něco později (1256) *Jordanus Nemorarius*, který čerpal též z římského mathematika *Boëthia* (470—524) naučení o soustavě sloupcové, načež teprv ku konci XV. století se opět vyskytuje nový pěstitel neurčité analytiky a sice *Luca Pacioli* neb podlé rodiště zvaný *Lucas de Burgo*, který vydal spis „Summa de Arithmetica e Geometria", jehož první kniha jedná též o řešení rovnic neurčitých způsobem, jaký naznačil Fibonacci; zároveň se poznává ze spisu tohoto zcela jasně, jak se v Italii pokročilo v mathematice, kdež v dobách následujících tak skvělých úspěchů měly snahy řešení rovnic stupně třetího a čtvrtého se týkající.

*) Pověstná úloha o *ptácích* též tu řešena. Poněvadž pocházel z Pisy, zván též spisovatel tento *Leonardo Pisano*. Veškeré spisy vydal roku 1856 kníže *Boncampagni* ve Florencii.

Výsledky, ku kterým tu přišel *Scipio Ferro*, *Nicolaus Tartaglia*, *Hieronymus Cardanus* a *Ludovicus Ferrari*, odvrátily na dlouho pozornost tehdejšího světa mathematického od skoupé analytiky neurčité, až konečně tím, že *Vieta* (1540—1603) zavedl písmeny co znaky čísel všeobecných, dán základ všeobecné arithmetice a tudíž i podnět k dalšímu pokroku v každém směru, zejména i v theorii čísel.

Sbírka prací Vietových, která vyšla r. 1646 co „Opera mathematica“ péčí otce a syna *Frans van Schooten*, obsahuje v třetím oddílu řešení rovnic neurčitých, které skoro vesměs z Diofanta jsou vyňaty, avšak *všeobecně* provedeny a pak teprv číselnými příklady objasněny.

Nyní byla půda připravena pro další badání v oboru analytiky neurčité, nyní bylo možná na základě dosavadních výzkumů, zejména pak spisu Diofantova pokračovati dále a novými prostředky algebraickými nový tvar a nový vzlet zjednati nauce o číslech. Co se v nepříznivé době nepodařilo Abul-Vefovi, dosáhl v míře nejvyšší za okolností vhodně upravených překladatel Diofanta

Bachet de Meziriac (1587—1638), který spisem svým „Problèms plaisáns et delectables sur les nombres“, Lyon 1612 připravil řešením zajímavých úloh z neurčité analytiky půdu pro abstraktní nauku o číslech; vydal totiž v původním jazyku s latinským překladem spisy Diofantovy s názvem „Diophanti Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus“ Lutetiae 1621, kdež mezi jiným řeší zcela všeobecně neurčité rovnice stupně prvního, a toto nové vydání spůsobilo nový rozkvět, novou epochu v rozvoji mathematického odboru, o němž tuto jednáme.

Doba II.

Od Fermata až na naše časy.

(Od r. 1650—1870.)

Jak v úvodu bylo již připomenuto, jest každý pokrok v nějaké vědě, především pak v mathematice, funkcí času; přípravy dějí se mnohdy po staletí, avšak rozhodný krok ku předu stane se teprv, když všechny podmínky pro trvalý úspěch jeho jsou vyplněny.

Jak dlouho před Koprníkem byl základ jeho soustavy zcela zřejmě vysloven! A předc teprv jemu podařilo se zakotviti jej trvale v proudu astronomického rozvoje.

Jak dlouho bavili se mathematikové rozličných narodů s úkoly zajímavými, jakéž představuje řešení rozmanitých neurčitých rovnic stupně prvního a druhého a v nichž se zračí podivuhodná hra četných vlastností čísel celistvých! A předc teprv po více než 2000letém badáni na tomto poli poštěstilo se všechny sem patřící výzkumy tak v ohnisku nauky o číslech sestřediti, že od té doby organicky zůstaly vřaděny do systematiky odborů mathematických.

Kdežto v první době tuto vytknuté připadalo těžisko mathematického badání do oboru praktického, do řešení neurčitých rovnic, hledáno a kladeno v době druhé v obor theoretický, v zpytování rozmanitých vlastností čísel, pokud nezakládají se na soustavě číselné.

A novou tuto dobu rychlého rozvoje nauky o číslech zahájil

Peter Fermat (1595—1665), parlamentní rada tolosánský, který vedle úředního povolání svého s obzvláštní oblibou a nevšedním úspěchem zanášel se vědami mathematickými; bylť podlé výkladů francouzských učenců *d'Alemberta*, *Lagrange*, *Laplace* a j. původcem (premier inventeur) počtu differenciálního a s Pascalem zakladatelem *nauky o pravděpodobnosti.* Při tom budiž co zvláštnost vytknuto, že výteční mathematikové tehdejší doby skoro vesměs byli jako Fermat úředníky státními na př. *Hevel*, *de Witt*, *Hudde*, *Römer*, *Vieta*, *Beaune*, *Frenicle*, *Pascal* ba i *Leibnic.*

Pronikavý duch Fermatův nebyl spokojen s výklady, jež poskytoval Diofant, nýbrž hloub pátraje snažil se *podstatu* neurčité analytiky vyzpytovati a tudíž vědecky ji odůvodniti. Při této své snaze objevil mnoho zajímavých vlastností čísel, z nichž některé podnes jeho jmenem se označují. K nejdůležitějším patří tyto:

Jestli p číslo kmenné a a číslem p nedělitelno, jest $a^{p-1} - 1$ *číslem p dělitelno*[1]*; kmenná čísla tvaru* $4n+1$ *jsou složena ze dvou čtverců*[2] na př.

$$1 = 0 + 1,\quad 5 = 1 + 4,\quad 13 = 4 + 9,\quad 17 = 1 + 16,$$
$$29 = 4 + 25,\quad 37 = 1 + 36,\quad 41 = 16 + 25,\quad 53 = 4 + 49,$$
$$61 = 25 + 36,\quad 73 = 9 + 64,\quad 89 = 25 + 64,\quad 97 = 16 + 81;$$

kmenná čísla tvaru $8n+1$ *neb* $8n+3$ *dají se rozložiti na součet čtverce se zdvojeným čtvercem jiným*[3] tedy na $x^2 + 2y^2$, na příklad

$$1 = 1 + 0,\quad 3 = 1 + 2 \cdot 1,\quad 11 = 9 + 2 \cdot 1,\quad 17 = 9 + 2 \cdot 4,$$
$$19 = 1 + 2 \cdot 9,\quad 41 = 9 + 2 \cdot 16,\quad 43 = 25 + 2 \cdot 9,\quad 59 = 9 + 2 \cdot 25,$$
$$67 = 49 + 2 \cdot 9,\quad 73 = 1 + 2 \cdot 36,\quad 83 = 81 + 2 \cdot 1,\quad 89 = 81 + 2 \cdot 4;$$

kmenná čísla tvaru $8n+3$ *dají se rozložiti v tři liché čtverce*, což z předešlého příkladu vysvítá; *každé číslo jest buď n-hranné aneb skládá se ze 2, 3, ... n čísel n-hranných*, na kteréžto poučce zvláště si zakládá, jakž vysvítá ze slov „Imo propositionem pulcherrimam et maxime generalem nos primi deteximus. Nempe omnem numerum vel esse triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compositum; esse quadratum vel ex duobus tribus aut quatuor quadratis compositum; esse pentagonum vel ex duobus tribus quatuor aut quinque pentagonis compositum et sic deinceps in infinitum in hexagonis, heptagonis et polygonis quibuslibet, enuntianda videlicet pro numero angulorum generali et mirabili propositione. Ejus autem demonstrationem quae ex multis variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur hic apponere non licet, opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevimus et *Arithmeticen hac in parte ultra veteres et notos terminos mirum in modum promovere.*"

Dále uvésti tu sluší, že plocha racionálního trojúhelníku pravoúhelného není čtverec; mimo to mnohé poučky o zbytcích dělením povstávajících, s nimiž teprv *Gauss* znova důkladně se zanášel, a t. p.

---

[1] Obsaženo též v Fermatii Opera Mathem. Tolosae 1679, pag. 163.
[2] Důkaz podal *Euler* v. Comm. nov. Petrop. T. V. 1754—5. pag. 3.
[3] Důkaz podal *Lagrange* v Suite des recherches d'Arithm." Nouv. Mém. de l'Acad. Berlin 1775. pag. 323.

O těchto svých výzkumech nesložil žádný zvláštní spis, jakž sliboval, nýbrž připsal jednotlivé poučky, jak je objevil, k příhodným místům Bachetova vydání Diofanta co poznámky; taktéž odůvodnění nikde nepodal, takže teprv pozdější mathematikové ostrovtip svůj na nich brousiti byli přinuceni, při čemž i poznali, že nejsou všechny výroky Fermatovy pravdivými, zejména že vzorec jeho pro prvočísla

$$p = 2^{2^n} + 1,$$

není správným, jelikož Euler již ukázal, že tomu odporuje

$$2^{32} + 1 = 4294\ 667\ 297 = 641 . 6700417.$$

Četné poznámky svrchu uvedené uveřejněny byly po jeho smrti synem jeho Samuelem v novém vydání Diofanta s názvem „Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus. Cum Commentariis C. G. Bacheti V. Cl. et observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani". Tolosae 1670.

Ale nejenom ve Francii, kde též *Frenicle de Bessi* pilně zpytoval vlastnosti čísel,*) nýbrž i v Anglii pěstovala se v XVII. století velmi pilně mathematika vůbec a neurčitá analytika zvlášť.

Především jmenovati tu sluší *Pella* (1610—1685), po němž úlohu, řešiti rovnici tvaru

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

nazývají někteří *problem Pellův*, pak *Wallise* (1616—1703), jehož badání valný mělo vliv na mathematické vynálezy Newtonovy, *Brounckra* (1620—1684), který se zanášel řešením rovnice zcela stejné

$$cx^2 + 1 = y^2$$

a r. 1655 ponejprv užíval tvaru řetězcového, a konečně *Waringa*, který *Wilsonovi* předložil novou poučku, že číslo

$$(p - 1)! + 1$$

jest kmenným číslem p dělitelno, odkudž poučka tato nazvána *Wilsonovou* **), ač nebyla ani tímto ani oním dokázána.

*) „Sur les triangles rectangles en nombres" Anc. Mém. de Paris, T. V. 1676.

**) První důkaz podal *Lagrange* v „Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin" 1771., po něm pak *Euler* v „Opusc. analyt." T. I. pag. 329., načež i *Legendre* a *Gauss* se s ním zanášeli. Zajímavý důkaz podal též *Stern* ve své algebraické analysi.

Nového, neunavného a vynalezavého pěstitele dostalo se nauce o číslech v muži v každém ohledu velezajímavém a pro mathematické vědy novou epochu stanovícím, kterýž do kteréhokoli oboru zasáhl, všude zanechal nezničitelné stopy svého tvůrčího ducha. Byl to slavný *L. Euler* (1707—1783), který mezi jiným též důkazy hledal pro pravost pouček Fermatových a mimo to i jiných množství značné vynalezl.[1])

Sem patří na př. důkaz, že každé číslo se skládá ze čtyr čtverců, což snad již Diofant bez důkazu znal, při čemž arci 0 se musí bráti do počtu; že součin čtyr čtverců s čtyrmi čtverci představuje opět čtyry čtverce aneb

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$$
$$= \overline{ap}|^2 + \overline{aq}|^2 + \overline{ar}|^2 + \overline{as}|^2,$$

kdež zavedeno označení

$$\overline{ap}| = ap - bq + cr - ds,$$
$$\overline{aq}| = aq + bp + cs + dr,$$
$$\overline{ar}| = ar + bs - cp - dq,$$
$$\overline{as}| = as - br - cq + dp.^{2)}$$

Velmi pilně zanášel se též s theorií zbytků dělením mocnin povstávajících, kteráž nyní představuje důležitou kapitolu v nauce o číslech, a podal zvláštní všeobecné řešení neurčitých rovnic stupně prvního,[3]) které dosud v našich knihách učebních se vykládá.

Podobných zásluch dobyl si o tento odbor mathematický též *Lagrange* (1736—1813), zejmena co se tkne řešení neurčitých rovnic kvadratických, kdež rozeznává tři případy a sice rovnice s determinantem positivním, negativním a kvadratickým; za základ při tom vzat tvar

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

takže *determinantem* tu sluje výraz

$$b^2 - ac,$$

jejž s jiného hlediska nazýváme nyní *diskriminantem.*

---

[1]) „Theorematum quorundarum ad numeros primos spectantinum demonstratio." Comm. Acad. Petrop. T. VIII.

[2]) Pomocí poučky o násobení determinantů vede se nyní důkaz velmi krátce.

[3]) Comment. Petrop. Tom. VII. pag. 46.

Dále tu budiž uvedeno, že řešil stejnoměrné rovnice stupně druhého o třech neznámých a ukázal, jak se s prospěchem užívá řetězových zlomků neb řetězců při řešení rovnic vůbec a neurčitých rovnic stupně prvního zvlášť.[1])

Počet jednotlivých pojednání, která Euler a Lagrange věnovali nauce o číslech, jest velmi značný [2]), jelikož se badání jejich vztahují k nejrozmanitějším stránkám neurčité analytiky; ale přes všechen pokrok v tomto oboru učiněný nepokusil se ani tento ani onen o soustavné vyvinutí celé theorie čísel.

V této formě celkovité, ač nesamostatné vyskytla se ponejprv tato nauka co doplněk francouzského překladu algebry Eulerovy (vyšla r. 1770) „Elemens d'Algèbre par L. Euler, trad. de l'Allem. Lyon, 1795, Nouv. éd. revue et augmentée de notes par *Garnier*. Tome I. f. II. Paris 1807, kdež zaujímá v II. svazku str. 281—485. Samostatně pak vydal tento doplněk německy r. 1796 *Kaussler*.

A nedlouho na to vystoupil s důkladným a obšírným spisem o theorii čísel jednajícím *Legendre* (1752—1833), který již dříve sepsal jednotlivá pojednání o neurčité analytice [3]), a položil tudíž rozsáhlý a pevný základ pro budoucí badání v oboru tomto; první a druhé vydání vyšlo s ostýchavým nápisem „Essai sur la Théorie des nombres“ Paris 1798, 1813, třetí však roku 1830 uveřejněné nazváno krátce a zřejmě „Théorie des nombres“. Že tu vyložil nejen dosavadní cizí, nýbrž i četné vlastní své výzkumy na tomto poli učiněné, netřeba zvláště při mathematiku tak výtečném poznamenati; byl a jest dosud spis tento jedním z těch, k nimž se obrátiti musí každý, kdo jen poněkud chce hloub vniknouti do nauky o číslech, pročež k němu tuto poukazujíce co k důležitému pramenu blíže k jeho obsahu nepřihlížíme.

A jakoby měly nahraženy býti dřívější nedostatky literární, vyšel takřka současně (r. 1800, byl však 4 leta v tisku) i v Německu klassický spis o neurčité analytice, který neodvisle a na

---

[1]) Hist. de l'Acad. de Berlin. Année 1767. pag. 175.

[2]) Uvedena jsou v *Reussově* spisu „Repertorium Commentationum a Societate litterarum editarum“ Gott. 1808. Tom. VII. pag. 107.

[3]) „Recherches d'analyse indéterminée.“ Hist. de l'Acad. des Sc. 1785 pag. 465.

základě novém velmi ostrovtipně zosnoval *Gauss*, (1777—1855), největší mathematik to německý.

I o spisu tomto, kterýž sám o sobě byl by s to spisovateli pojistiti vědeckou nesmrtelnost, nebudeme se zde dopodrobna šířiti, poněvadž i tu každý sám musí se k němu obrátiti, kdo obsah jeho chce blíže poznati.

Jednáť tu první oddělení o *shodnosti* (congruentia) čísel vůbec, druhé pak o shodnostech stupně *prvního*, třetí o *zbytcích* (residuum) dělením mocnin povstávajících, čtvrté o shodnostech stupně *druhého*, páté o tvarech a neurčitých rovnicích stupně *druhého*, šesté o rozmanitém *upotřebení* pouček dříve vyvinutých a konečně sedmé o rovnicích s dělením *kružnice* souvislých.

Pojem shodnosti vykládá se s počátku stručně takto: „Si numerus a numerorum b, c differentiam metitur, b et c secundum a *congrui* dicuntur, sin minus *incongrui: ipsum* a *modulum* appellamus. Uterque numerorum b, c priori in casu alterius *residuum*, in posteriori vero *nonresiduum* vocatur.“ A dále zavádí nové označení symbolické slovy: „Numerorum congruentiam hoc signo, $\equiv$, in posterum denotabimus, modulum ubi opus erit in clausulis adjungentes,

$$-16 \equiv 9 \pmod{5}, \quad -7 \equiv 15 \pmod{11},\text{“}$$

dokládaje v poznámce „Hoc signum propter magnam analogiam quae inter aequalitatem atque congruentiam invenitur adoptavimus.“

Důmyslnými výzkumy, které Gauss v těchto „Disquisitiones“ systematicky sestavil, byla nauka o číslech tak zdokonalena, že pozdějším pracovníkům na tomto poli zbylo jen sporé klasobraní; hlavně v odborných časopisech rozváděny pak rozličné poučky Legendrem a Gaussem již uveřejněné, při čemž jmenovati sluší celou řadu výtečných mathematikův pozdějších jako jest *Cauchy*, *Seeber*, *Lejeune-Dirichlet*, *Jacobi*, *Eisenstein*, *Čebišef*, *Kummer*, *Crelle*, *Arndt*, *Jaubert*, *Lebesgue*, *Poinsot*, *Polignac*, *Serret*, *Hermite*, *Libri* a j. v. I náš osudem pronásledovaný *Šimerka* zjednal si hlavní své zásluhy mathematické pracemi v tomto oboru, zejmena obšírným českým pojednáním „Příspěvky k neurčité analytice“ 1862.*)

*) Již dříve uveřejnil několik pojednání podobných ve spisech akademie Vídenské r. 1858 a 1859 jako: Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativer Determinante“ (1858), „Lösung zweier Arten von

Z novějších spisů, které o této části mathematiky jednají, sluší uvésti

Scheffler „Unbestimmte Analytik“ (1854)

Schwarz „Elemente der Zahlentheorie“ (1855)

Le-Besgue „Introduction à la Théorie des Nombres“ (1862).

Skřivan „Grundlehren der Zahlentheorie“ (1862).

Lejeune-Dirichlet „Vorlesungen über Zahlentheorie“ herausgegeben von Dedekind (1863).

V nejnovější době zatlačena theorie čísel opět do pozadí a to *vyšší algebrou a novou geometrií*, které pokrokem, jaký tu byl učiněn, všechnu pozornost k sobě obracejí a všechny mathematické síly k sobě poutají. Až se pak spojeným úsilím podaří některé stránky algebraických výzkumů, zejména nauku o *tvarech* vůbec a v jednotlivých případech zvlášť, všestranně odhaliti a vyložiti, vyplyne z toho zajisté i užitek nemalý pro nauku o číslech a s novými prostředky povstanou i noví pěstitelové neurčité analytiky tisíciletým stářím zasvěcené; pak se odůvodní mnohá poučka, kterouž důmysl genia Fermatova pronesl, jako že nelze celistvými čísly vyhoviti rovnici

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2,$$

mnohá zajímavá a dosud netušená vlastnost čísel bude vynešena z temného úkrytu, do něhož nesáhá dosud nedostatečný paprsek nynějších vědomostí mathematických, a nauka o číslech jakož i neurčitá analytika stanou se souměrně a všestraně vyvinutou soustavou, která bude co *luzná Lilavati* právem zasluhovati nadšeného zbožňování budoucího *Bhaskary* nějakého!

Gleichungen“ (1859) a „Die trinären Zahlformen und Zahlwerthe“ (1859). Škoda, že od té doby se neodhodlal k sepsání samostatné nauky o číslech jazykem českým!