Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Langr

Příspěvek k mnohoúhelníkům

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 3, 228--231

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121862

Příspěvek k mnohoúhelníkům.

Napsal

Jos. Langr v Praze.

Mějme libovolný n-úhelník $abc\ldots f$. Vrcholy jeho určeme v pravoúhlé soustavě os souřadnicemi x, y s příslušnými indexy, jdoucími od 1 do n. Veďme úhlopříčnu, spojující vrcholy sousední prvního vrcholu a. Úhlopříčna rozdělí n-úhelník na trojúhelník abf a na $(n-1)$úhelník. V tomto $(n-1)$úhelníku budiž určen bod α, jehož souřadnice jsou

$$x_\alpha = \frac{1}{n-1}\left[\sum_1^n (x) - x_1\right],\quad y_\alpha = \frac{1}{n-1}\left[\sum_1^n (y) - y_1\right].$$

Po druhé veďme úhlopříčnu spojující sousední vrcholy vrcholu druhého b, a ve vzniklém $(n-1)$ úhelníku budiž určen bod β o souřadnicích

$$x_\beta = \frac{1}{n-1}\left[\sum_1^n (x) - x_2\right],\quad y_\beta = \frac{1}{n-1}\left[\sum_1^n (y) - y_2\right].$$

Týmž způsobem určeme další body γ, δ, ... φ. Těmito body jest stanoven n-úhelník, který s původním jest podobný a stejnolehlý.

Abychom provedli důkaz toho, dokažme úměrnost stejnolehlých stran. Jestiť

$$\overline{\alpha\beta}^2 = (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2$$

a po dosazení souřadnic

$$\overline{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{(n-1)^2}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right] = \frac{1}{(n-1)^2}\overline{ab}^2.$$

Tedy $\overline{\alpha\beta} : \overline{ab} = 1 : (n-1)$, čímž dokázána úměrnost stran, neboť jest totéž zřejmé také o stranách ostatních.

Strany $\overline{\alpha\beta}$ a $\overline{ab}$ jsou rovnoběžny, neboť směrnice obou jsou stejny, jak snadno počtem se zjistí. Rovněž ostatní strany.

Jestli plošné obsahy obou n-úhelníků nazveme P, Π, jest mezi nimi souvislost

$$\Pi : P = 1 : (n-1)^2.$$

Poněvadž strany stejnolehlé obou mnohoúhelníků jsou úměrny i rovnoběžny, proto spojnice $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma \ldots$ procházejí jediným bodem s. Ježto

$$\overline{\alpha s} : \overline{as} = 1 : (n-1),$$

lze vypočítati souřadnice bodu s z této úměry užitím souřadnic

$$x_\alpha,\ x_1,\ y_\alpha,\ y_1.$$

Výsledek jest

$$x_s = \frac{\sum\limits_1^n (x)}{n}, \quad y_s = \frac{\sum\limits_1^n (y)}{n}.$$

K danému n-úhelníku sestrojme jiný tímto způsobem. Rozpolme všecky strany jeho a v půlících bodech vztyčme kolmice ke stranám. Od půlícího bodu nanesme na kolmici do vnitř nebo na vnější stranu mnohoúhelníka úsečku, která je ku půlené straně v určitém poměru. Na př. rozpůlena strana ab bodem p a učiněno $\overline{pq} : \overline{ab} = k$, kde k značí realné libov. číslo, jež jest positivní, jestliže nanášíme pq do vnitř, a negativní, nanášíme-li vně mnohoúhelníka.

Nově získané body q atd., byvše pořadem spojeny, dají n-úhelník, v němž stanovme bod s' týmž způsobem jako s v prvém mnohoúhelníku.

Jsou tedy jeho souřadnice

$$x_{s'} = \frac{\sum\limits_1^n (\xi)}{n}, \quad y_{s'} = \frac{\sum\limits_1^n (\eta)}{n}$$

označujeme-li ξ, η s přísl. indexy souřadnice vrcholů mnohoúhelníka.

Souvislost mezi obojími souřadnicemi jeví se na souřadnicích bodu q:

$$\xi_q = \frac{x_2 + x_1}{2} + k(y_2 - y_1), \quad \eta_q = \frac{y_2 + y_1}{2} - k(x_2 - x_1).$$

Souřadnice ostatních vrcholů obdržíme cyklickou záměnou. Sečtením všech ξ a η obdržíme

$$\Sigma(\xi) = \sum_1^n (x),\ \Sigma(\eta) = \sum_1^n (y),$$

z čehož patrno, že

$$x_s = x_{s'},\quad y_s = y_{s'}$$

čili body s a s' jsou identické.

Bod s jest tedy oběma mnohoúhelníkům společný. Vlastnost tato je markantnější, volíme-li za základní obrazec trojúhelník. V tom případě s jest těžištěm a oba trojúhelníky mají společné těžiště.*)

Za příčinou zajímavých výsledků budiž uveden zde ještě čtyřúhelník. Oběma úhlopříčnami rozdělí se na 4 trojúhelníky. Body $\alpha\beta\gamma\delta$ jsou těžiska jejich. Čtyřúhelník $\alpha\beta\gamma\delta$ je podobný a podobně položený s původním čtyřúhelníkem dle středu podobnosti s, jehož souřadnice jsou

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4},\quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}.$$

Bod s jeví se také jako průsečík příček spojujících středy protilehlých stran čtyřúhelníka a se vzájemně půlících. takže jej lze snadno ve čtyřúhelníku určiti. Těžiště t, jsouc průsekem úhlopříčen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, je sdruženo s průsekem u úhlopříček v daném čtyřúhelníku; dle předešlého tedy jest

$$\overline{ts} : \overline{us} = 1 : 3.$$

Lze tedy těžiště t z bodů s a u snadno stanoviti.

Uvedená vlastnost mnohoúhelníků platí ještě obecněji: K stanovení bodu q jsme rozpůlili stranu $\overline{ab}$ bodem p. Zjednejme

*) Tuto vlastnost, ale pouze pro trojúhelník pravoúhlý, uvádí Dr. K. Zahradník v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky roč. XXV. str. 261. Pro trojúhelník vůbec a pro $k = \frac{1}{2}$ viz článek ředitele A. Strnada „Analytické cvičení o trojúhelníku.“ Ročn. XV. str. 262.

si bod p obecněji, aby $\overline{ap} : \overline{bp} = \lambda$. V bodě p vztyčme jako prve kolmici a na ní vyznačme bod q dle poměru $\overline{pq} : \overline{ab} = k$.

Potom jsou souřadnice bodu q

$$\xi_q = \frac{x_2\lambda - x_1}{\lambda - 1} + k(y_2 - y_1),$$

$$\eta_q = \frac{y_2\lambda - y_1}{\lambda - 1} - k(x_2 - x_1).$$

Souřadnice všech ostatních vrcholů q obdržíme cyklickou záměnou. Sečtením všech ξ a η nabudeme

$$\sum_1^n(\xi) = \sum_1^n(x), \qquad \sum_1^n(\eta) = \sum_1^n(y),$$

pročež body s a s' jsou identické.

O pravidelném patnáctiúhelníku.

Napsal

Vincenc Jarolímek,

ředitel c. k. české realky v Ječné ulici v Praze.

V těchto řádcích chceme vyvinouti dvě zajímavé relace, týkající se pravidelného patnáctiúhelníka; při tom nechť značí a_n strany pravidelných n-úhelníků vepsaných do téže kružnice.

1. Budiž $\overline{ob} = \overline{od} = \overline{bd} = a_6$, $\overline{bc} = a_{10}$. Pak jest $\overline{cd} = a_{15}$, ježto $\widehat{bd}$ rovná se šestině, $\widehat{bc}$ desetině obvodu kruhu a

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}.$$

Učiňme $dj \parallel ch \perp kb$, tudíž

$$\overline{kd} = \overline{dj} = a_3, \quad \overline{ch} = a_5.$$

Posléze veďme $ce \parallel bo$. V $\triangle$ dec jest

$$\overline{cd}^2 = a_{15}^2 = \overline{de}^2 + \overline{ec}^2 = \overline{de}^2 + \overline{fg}^2 = (df - cg)^2 + (fb - gb)^2,$$