Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Miloslav Pelíšek
O metrických relacích transversál. [II.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 27 (1898), No. 2, 81--95

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121918

**Terms of use:**

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1898

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

# O metrických relacích transversál.

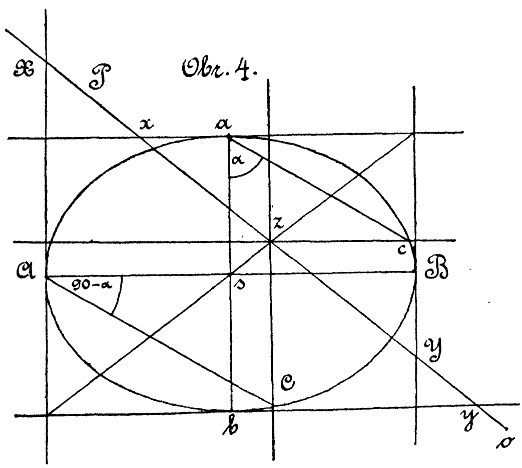
Napsal

**Miloslav Pelíšek,**

professor v Plzni.

(Pokračování.)

Buďtež nyní (obr. 4.) AB, *ab* velká a malá osa ellipsy vepsané obdélníku. Veďme bodem *a* tetivu *ac*, jež tvoří s malou osou úhel $\alpha$, a bodem *c* rovnoběžnou sečnu, pak bodem A tetivu AC || *ac*, jež tvoří s velkou osou úhel 90—$\alpha$ a bodem C sečnu rovnoběžnou tečně v A; pak shledáme snadno, že tyto




sečny se protínají v bodě *z* na úhlopříčně obdélníka. Veďme konečně bodem *z* libovolnou přímku P, jež protíná tečny bodů A, B, *a*, *b* v bodech X, Y, *x*, *y* a zvolme na této přímce nějaký bod *o*; pak jsou dle předcházejícího v platnosti následující vztahy:

$$oz = \frac{oX}{1+\frac{\varepsilon^2}{\mathrm{tg}^2(90-\alpha)}} + \frac{oY}{1+\frac{\mathrm{tg}^2(90-\alpha)}{\varepsilon^2}},$$

$$oz = \frac{ox}{1+\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha}{\varepsilon^2}} + \frac{oy}{1+\frac{\varepsilon^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha}},$$

z čehož plyne relace

$$(14)\quad oz = \frac{ox+oY}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha}{\varepsilon^2}} + \frac{oX+oy}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\varepsilon^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha}},\quad \varepsilon<1,$$

jakož i relace

$$(15)\qquad \frac{ox-oY}{oX-oy} = \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha}{\varepsilon^2},\qquad \varepsilon<1.$$

Splyne-li však $o$ se $z$, následuje relace

$$(16)\qquad \frac{zx \pm zY}{zX \pm zy} = \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha}{\varepsilon^2},\qquad \varepsilon<1.$$

Kdybychom však vedli přímku, jež protíná sečny procházející bodem $z$ ve dvou různých bodech $z$, Z, obdrželi bychom nejvšeobecnější relaci

$$(17)\quad \frac{ox+oY}{oz+oZ}\cdot\frac{1}{1+\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha}{\varepsilon^2}} + \frac{oX+oy}{oz+oZ}\cdot\frac{1}{1+\frac{\varepsilon^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha}} = 1,\quad \varepsilon<1,$$

z níž by pro $\varepsilon = 1$ následovala obdobná pro kružnici

$$(17\alpha)\qquad \frac{ox+oY}{oz+oZ}\cdot\sin^2\alpha + \frac{oX+oy}{oz+oZ}\cos^2\alpha = 1.$$

Z předcházejících relací obdržíme řadu obdobných pro hyperbolu pouhou extensí, uvážíme-li, že jest při této poměr vedlejší osy ku hlavní $\frac{bi}{a}$, tedy číslo imaginární, jehož čtverec jest číslo negativní; obdržíme tedy pro tečny ve vrcholech hlavní osy hyperboly a pro rovnoběžnou sečnu (jak možno též direktně dokázati), znamená-li $\varepsilon$ poměr vedlejší osy ku hlavní, následující relaci:

$$oz = \frac{ox}{1 - \frac{\varepsilon^2}{\mathrm{tg}^2\alpha}} + \frac{oy}{1 - \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{\varepsilon^2}}. \tag{18}$$

Kdybychom vedli vrcholy pomyslné osy přímky rovnoběžné s hlavní osou a tetivu k libovolnému bodu hyperboly, jež tvoří s vedlejší osou úhel $\alpha$, a tímto bodem rovnoběžnou sečnu ku hlavní ose, jest v platnosti relace

$$oz = \frac{ox}{1 - \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha}{\varepsilon^2}} + \frac{oy}{1 - \frac{\varepsilon^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha}}, \tag{19}$$

při čemž jest $\varepsilon$ zase poměr délek vedlejší a hlavní osy.

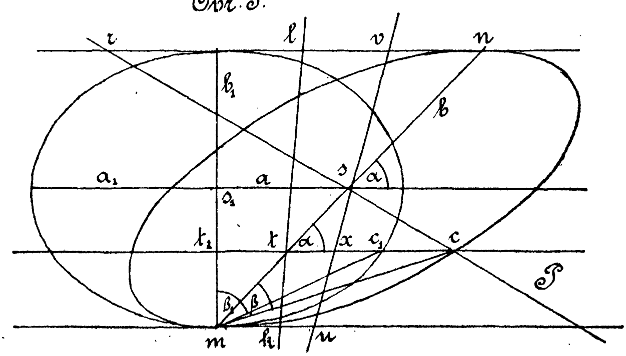
Z těchto rovnic bychom mohli zase odvodit řadu vztahů obdobných (11) až (17), což však budiž pominuto.

Konečně jest patrno, že se předcházející výrazy stanou pro parabolu neurčitými.

* * *

Transformuje nyní (obr. 5.) ellipsu, jejíž poloosy jsou $a_1$, $b_1$ *rovinnou affinitou*, jejíž osou jest tečna ve vrcholu malé osy, a jejíž affinní paprsek ku př. $ss_1$ jest rovnoběžný k tečně.

Obr. 5.



Transformací tou obdržíme patrně zase ellipsu se sdruženými průměry, jež uzavírají úhel $\alpha$. Pak jest

$$a_1 = a,\ b_1 = b \sin\alpha,\ \frac{b_1}{a_1} = \frac{b}{a}\sin\alpha,\ \text{aneb}\ \varepsilon_1 = \varepsilon \sin\alpha.$$

Dále jest z obrazce patrno:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)\sin\alpha}.$$

Transformujeme-li ještě současně libovolnou přímku $P_1$ s body $o_1$, $x_1$, $y_1$, $z_1$ ve přímku P s body $o$, $x$, $y$, $z$, bude patrně

$$\frac{o_1x_1}{ox} = \frac{o_1y_1}{oy} = \frac{o_1z_1}{oz},$$

takže dosazením předcházejících hodnot do rovnice (9) obdržíme

$$(20)\qquad oz = \frac{ox}{1 + \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\varepsilon^2 \sin^2\beta}} + \frac{oy}{1 + \frac{\varepsilon^2\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha - \beta)}},$$

při čemž $\varepsilon$ znamená poměr průměru k tečně nakloněného k průměru s tečnou rovnoběžného.

Z tohoto vztahu plynou zase následující podrobnější:

Splyne-li $o$ se středem $s$, pak jest

$$(21)\qquad \frac{st}{sm} = \frac{sx}{su} = \frac{\varepsilon^2\sin^2\beta - \sin^2(\alpha - \beta)}{\varepsilon^2\sin^2\beta + \sin^2(\alpha - \beta)}.$$

Splyne-li $o$ s $t$ neb $x$, obdržíme

$$(22)\qquad \frac{tm}{tn} = \frac{tk}{tl} = \frac{xu}{xv} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\varepsilon^2\sin^2\beta}.$$

Taktéž jest správná relace

$$\frac{cp}{cr} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\varepsilon^2\sin^2\beta}$$

aneb

$$(23)\qquad cp = 2sc\,.\,\frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\varepsilon^2\sin^2\beta - \sin^2(\alpha - \beta)}.$$

Vzorce (21), (22), (23) se zdánlivě nesrovnávají se vzorci (11), (12), (13), položíme-li $\alpha = 90^0$, nesrovnalost ta však zmizí, zavedeme-li dříve již zmíněné důsledné označení, dle kterého jest $\varepsilon$ poměr průměru rovnoběžného s tečnou k průměru k tečně nakloněného, takže by se ve vzorcích (21), (22), (23) mělo psáti $\frac{1}{\varepsilon}$ místo $\varepsilon$.

Položme si nyní otázku, zda-li se v rovnici (20) vyskytuje takový úhel $\beta$, pro který by relace (20) přešla v prvotní relaci *Hamiltonovu*:

$$oz = ox \sin^2 \beta + oy \,.\, \cos^2 \beta. \tag{1}$$

Snadno vyhledáme podmínku

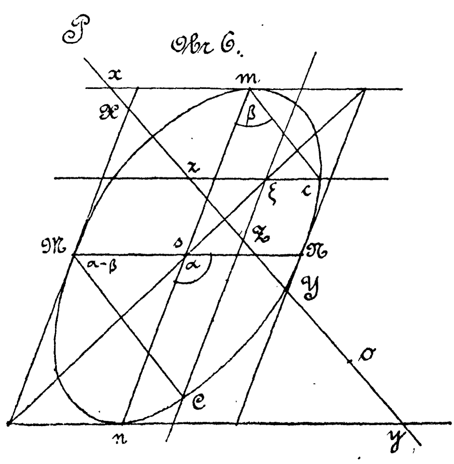
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a \sin \alpha - b}{a \cos \alpha},$$

pro kterou následuje jednoduchá konstrukce.

Jest tedy patrno:

Pro každou dvojici sdružených průměrů existuje jediný bod ellipsy, pro který jest v platnosti jednoduchá relace Hamiltonova jako při kružnici.

Buďtež dále (obr. 6.) $mn$, MN sdružené průměry ellipsy vepsané rovnoběžníku, uzavírající úhel $\alpha$. Veďme vrcholem $m$



tetivu $mc$, jež uzavírá s příslušným průměrem úhel $\beta$, a bodem $c$ sečnu rovnoběžnou k tečně v bodě $m$; veďme dále vrcholem M sdruženého průměru tetivu $MC \parallel mc$, jež tedy uzavírá se sdruženým průměrem MN úhel $\alpha - \beta$, a bodem C sečnu rovnoběžnou k tečně v M. Snadno shledáme, že obě tyto sečny se protínají v bodě $\zeta$, jenž jest na úhlopříčně daného rovnoběžníka. Budiž dále P libovolná přímka s libovolným bodem $o$, jež protíná ony tečny a sečny v bodech $x$, $y$, $z$, X, Y, Z, pak máme při důsledném označení následující rovnice:

$$oz = \frac{ox}{1 + \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \beta}} + \frac{oy}{1 + \frac{\sin^2 \beta}{\varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)}}, \qquad \varepsilon = \frac{a}{b},$$

$$oZ = \frac{oX}{1 + \frac{\sin^2 \beta}{\varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)}} + \frac{oY}{1 + \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \beta}}, \qquad \varepsilon = \frac{a}{b}.$$

Z těchto následuje velmi všeobecná relace

$$(24) \qquad \frac{ox \pm oY}{oz \pm oZ} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta + \varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)} + \frac{oy \pm oX}{oz \pm oZ} \cdot \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \beta + \varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)} = 1,$$

ze které by se specialisováním dalo odvodit mnoho jiných. Vedeme-li zvláště přímku P bodem $\zeta$, obdržíme

$$(25) \qquad o\zeta = \frac{ox + oY}{2} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta + \varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)} + \frac{oy + oX}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \beta + \varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)}.$$

Splyne-li $o$ s tímto $\zeta$, obdržíme vztah

$$(26) \qquad \frac{\zeta x \pm \zeta Y}{\zeta y \pm \zeta X} = \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \beta}.$$

Zavedeme-li ve vzorcích (20) až (26) $-\varepsilon^2$ místo $\varepsilon^2$, obdržíme patrně obdobné vzorce pro hyperbolu stanovenou dvěma sdruženými průměry.

Též zde bude pro každou dvojici sdružených průměrů existovati jediný bod, pro nějž bude v platnosti jednoduchá Hamiltonova relace jako při kružnici.

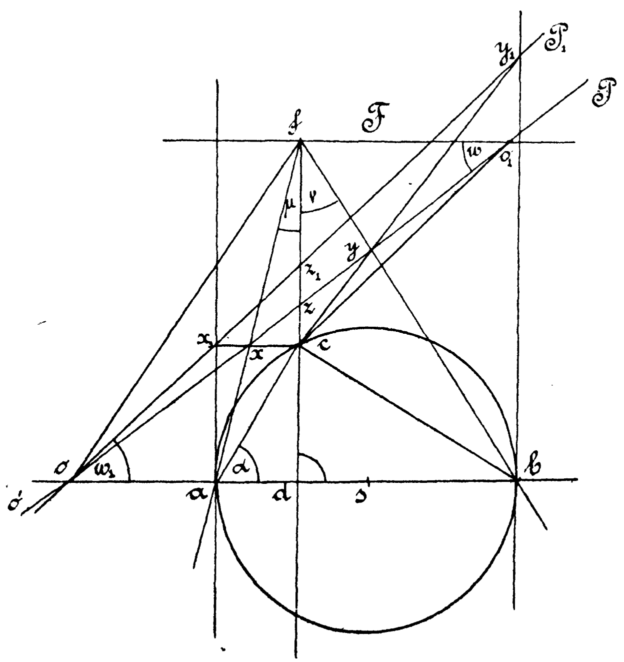
Pro parabolu se stanou předcházející výrazy zase neurčitými.

* * *

Ještě obecnější relace obdržíme, transformujeme-li obrazec první různě uspořádanými centrálními kollineacemi.

Stanovme centrální kollineaci předně tak (obr. 7.), aby průměr *ab* byl osou C a bod *c* středem kollineace, kdežto libo-

Obr. 7.



volná rovnoběžka F k ose kollineace má býti přímkou úběžnou. Budiž *f* průsečík oné úběžné přímky se sečnou *cd* rovnoběžnou k tečnám v bodech *a*, *b* kružnice, pak jest *f* patrně úběžník těchto tří transformovaných přímek, kdežto kružnice sama se transformovala v kuželosečku určenou tečnami $fa$, $fb$ s body dotyku $a$, $b$ jakož i bodem $c$, jenž jakožto střed nemění svou polohu.

Veďme nyní libovolným bodem $o$ na ose kollineace přímku $P_1$, jež protíná netransformované tečny a sečnu v bodech $x_1$, $y_1$, $z_1$, a uzavírá s osou kollineace úhel $\omega_1$. Přímka ta se transformuje v přímku P, jež protíná transformované tečny a sečny v bodech $x$, $y$, $z$, úběžnou přímku v bodě $o_1$, a uzavírá s osou kollineace, jakož i s úběžnou přímkou úhel $\omega$. Buďtež dále $\mu$, $\nu$ úhly, jež uzavírají transformované tečny s transformovanou sečnou.

Jest patrno, že obrazec $oaxx_1$ jest podobný a pro bod $x$ jakožto střed podobně ležící s obrazcem $o_1fxc$, z čehož plyne:

$$\frac{ox_1}{ox} = \frac{co_1}{xo_1} \quad \text{a} \quad co_1 = \frac{of}{\sin \omega_1}.$$

Dále jest

$$xo_1 : fo_1 = \cos \mu : \cos (\omega + \mu)$$

a tedy

$$xo_1 = \frac{\cos \mu}{\cos (\omega + \mu)} \cdot fo_1.$$

Mimo to jest

$$fo_1 = fc \,.\, \operatorname{cotg} \omega_1.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty, obdržíme

$$xo_1 = \frac{\cos \mu \,.\, \cos \omega_1}{\cos (\omega + \mu) \sin \omega_1} \cdot fc,$$

z čehož následuje

$$\frac{ox_1}{ox} = \frac{\cos (\omega + \mu)}{\cos \omega_1 \,.\, \cos \mu}.$$

Podobně obdržíme z podobných a pro $y$ jakožto střed podobně ležících obrazců

$$\frac{oy_1}{oy} = \frac{\cos (\omega - \nu)}{\cos \omega_1 \,.\, \cos \nu}$$

a konečně

$$\frac{oz_1}{oz} = \frac{\cos \omega}{\cos \omega_1}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do Hamiltonovy relace, obdržíme následující pozoruhodnou relaci, jež připouští interpretaci ve dvojím směru

$$(27)\qquad oz = ox\,\frac{\cos(\omega+\mu)}{\cos\omega\,.\cos\mu}\,.\sin^2\alpha + oy\,.\frac{\cos(\omega-\nu)}{\cos\omega\,.\cos\nu}\,.\cos^2\alpha.$$

Relace (27) jest ovšem prozatím dokázána pro $o$ jakožto průsečík přímky P s polárou $ab$ polu $f$ transformované kuželosečky, jest však v platnosti pro libovolný bod $o'$ přímky P, neboť jest pro tento

$$oz = o'z - o'o,\qquad oy = o'y - o'o,\qquad ox = o'x - o'o.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do relace (27), obdržíme

$$o'z - o'o = (o'x - o'o)\frac{\cos(\omega+\mu)}{\cos\omega\,.\cos\mu}\sin^2\alpha + (o'y - o'o)\frac{\cos(\omega-\nu)}{\cos\omega\,.\cos\nu}\,.\cos^2\alpha$$

aneb též

$$o'z = o'x\,.\frac{\cos(\omega+\mu)}{\cos\omega\,.\cos\mu}\,.\sin^2\alpha + o'y\frac{\cos(\omega-\nu)}{\cos\omega\,.\cos\nu}\,.\cos^2\alpha + o'o\left[1 - \frac{\cos(\omega+\mu)}{\cos\omega\,.\cos\mu}\,.\sin^2\alpha + \frac{\cos(\omega-\nu)}{\cos\omega\,.\cos\nu}\,.\cos^2\alpha\right].$$

Vedeme-li však přímku $of$, přechází relace (27) v následující

$$(28)\qquad \frac{\cos(\omega+\mu)}{\cos\omega\,.\cos\mu}\,.\sin^2\alpha + \frac{\cos(\omega-\nu)}{\cos\omega\,.\cos\nu}\,.\cos^2\alpha = 1,$$

velmi pozoruhodný vztah, prostý všech délek a panující výhradně mezi intervenujícími úhly. Z rovnice (28) jest patrno, že jest ve výraze pro $o'z$ výraz v hranaté závorce roven nulle, a že tedy jest relace (27) v platnosti pro libovolný bod přímky P.

Rovnice (28) jest identická pro každou hodnotu $\omega$; nejsou tedy ostatní veličiny všechny neodvislé, a dá se tedy některá eliminovati. Skutečně máme (obr. 7.)

$$\frac{ad}{db} = \frac{\operatorname{tg}\mu}{\operatorname{tg}\nu},\qquad \frac{ad}{dc} = \operatorname{cotg}\alpha,\qquad \frac{bd}{dc} = \operatorname{tg}\alpha,$$

z čehož plyne

$$\cotg^2 \alpha = \operatorname{tg} \mu \,.\, \cotg \nu, \ \sin^2 \alpha = \frac{\cos \mu \,.\, \sin \nu}{\sin (\mu + \nu)}, \ \cos^2 \alpha = \frac{\sin \mu \,.\, \cos \nu}{\sin (\mu + \nu)}.$$

Dosadíme-li hodnoty ty do (28), obdržíme analogickou:

$$(29) \qquad \frac{\cos (\omega + \mu)}{\sin (\mu + \nu)} \frac{\sin \nu}{\cos \omega} + \frac{\cos (\omega - \nu)}{\sin (\mu + \nu)} \frac{\sin \mu}{\cos \omega} = 1$$

a dosadíme-li do (27), obdržíme vztah

$$(30) \qquad oz = ox \,.\, \frac{\cos (\omega + \mu)}{\sin (\mu + \nu)} \frac{\sin \nu}{\cos \omega} + oy \,.\, \frac{\cos (\omega - \nu)}{\sin (\mu + \nu)} \frac{\sin \mu}{\cos \omega},$$

jenž má patrně též platnost neodvisle od dané kružnice neb s ní kollineárné kuželosečky.

Nepřihlížíme-li prozatím ke kuželosečce stanovené tečnami $fa$, $fb$ s body dotyku $a$, $b$ jakož i bodem $c$, nýbrž k dané kružnici, vzhledem ku které mají všechny v rovnici (27) neb (30) se vyskytující veličiny svůj určitý význam, můžeme rovnice ty považovati jako zvšeobecnění Hamiltonovy věty v tom směru, že se bod $f$ nenalézá v nekonečnu, nýbrž v konečnu na kolmici v nějakém bodě průměru kružnice, tak že jeho spojnice s koncovými body průměru přestávají býti tečnami.

Též v tomto případě obdržíme podrobnější vztahy, dáme-li transversále P a jejímu bodu $o$ různé zvláštní polohy.

Vedeme-li příčku, jež uzavírá se stranou $ab$ úhel $\mu$, přejde (30) v následující

$$(31) \qquad oz = ox \,.\, \frac{\cos 2\mu}{\sin (\mu + \nu)} \frac{\sin \nu}{\cos \mu} + oy \frac{\cos (\mu - \nu)}{\sin (\mu + \nu)} \operatorname{tg} \mu.$$

Splyne-li na této příčce $o$ se $z$, jest

$$(32) \qquad \frac{zx}{zy} = \frac{\sin \mu}{\sin \nu} \,.\, \frac{\cos (\mu - \nu)}{\cos 2\mu}.$$

Poslední dvě relace platí patrně pro *libovolný trojúhelník*, jehož strany a výšku protneme příčkou, jež svírá se základnou týž úhel jako rameno s výškou.

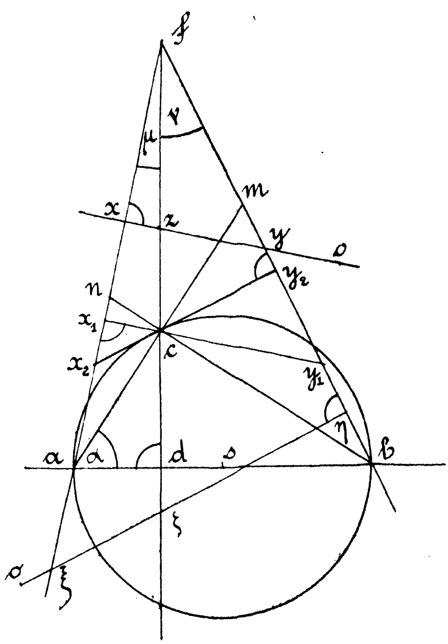
Splyne-li (obr. 8.) transversála s přímkou $ac$, označíme-li $m$ její průsečík s přímkou $bf$, a splyne-li $o$ postupně s $a$, $c$, $m$, dá nám rovnice (27)

$$(33)\quad \frac{ac}{am}=\frac{\cos(\alpha-\nu)}{\cos\alpha\,.\,\cos\nu}\,.\,\sin^2\alpha,\quad \frac{mc}{am}=\frac{\cos(\alpha+\mu)}{\cos\alpha\,.\,\cos\mu}\,.\,\sin^2\alpha,$$

$$\frac{ac}{mc}=\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\,\frac{\cos(\alpha-\nu)}{\cos(\alpha+\mu)}\,.\,\text{cotg}^2\,\alpha.$$

Splyne-li P s přímkou $bc$, označíme-li $n$ její průsečík

Obr. 8.




s přímkou $af$ a splyne-li $o$ postupně s $b$, $c$, $n$, obdržíme z téže rovnice:

$$(34)\quad \frac{bc}{bn}=\frac{\sin(\alpha+\mu)}{\sin\alpha\,.\,\cos\mu}\,.\,\sin^2\alpha,\quad \frac{nc}{nb}=\frac{\sin(\alpha-\nu)}{\sin\alpha\,.\,\cos\nu}\,.\,\cos^2\alpha,$$

$$\frac{bc}{nc}=\frac{\cos\nu}{\cos\mu}\,.\,\frac{\sin(\alpha+\mu)}{\sin(\alpha-\nu)}\,.\,\text{tg}^2\,\alpha.$$

Tedy mají tyto úsečky následující dvojpoměr

$$(35)\qquad \frac{ac}{mc} : \frac{bc}{nc} = \frac{\cos^2\mu}{\cos^2\nu}\,\frac{\sin 2(\alpha-\nu)}{\sin 2(\alpha+\mu)} . \operatorname{cotg}^4\alpha,$$

kdežto součin obou poměrů úseček jest

$$(36)\qquad \frac{ac}{mc} . \frac{bc}{nc} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\mu)}{\operatorname{tg}(\alpha-\nu)},$$

v kterémžto poměru jsou tedy též obsahy trojúhelníků $abc$, $mnc$.

Relace (33) až (36) mají patrně platnost pro každý trojúhelník, vedeme-li v něm výšku a rohy základny ony dvě kolmé k sobě příčky, jež se protínají v bodě výšky.

Splyne-li P s přímkou kolmou ku $af$, jež protíná přímky $af$, $bf$, $cf$ v bodech $x$, $y$, $z$, platí pro libovolný bod $o$ této přímky relace

$$oz = \frac{ox}{\cos^2\mu} . \sin^2\alpha + oy . \frac{\cos(\mu+\nu)}{\cos\mu . \cos\nu} . \cos^2\alpha,$$

aneb, dosadíme-li dřívější hodnoty funkcí úhlu $\alpha$,

$$(37)\qquad oz = ox . \frac{\sin\nu}{\cos\mu . \sin(\mu+\nu)} + oy . \operatorname{cotg}(\mu+\nu) . \operatorname{tg}\mu.$$

Splyne-li P s přímkou kolmou ku $bf$, jež protíná přímky $af$, $bf$, $cf$ v bodech $\xi$, $\eta$, $\zeta$, jest pro libovolný bod této přímky v platnosti relace

$$o\zeta = o\xi . \frac{\cos(\mu+\nu)}{\cos\mu . \cos\nu} . \sin^2\alpha + o\eta . \frac{\cos(\mu-\nu)}{\cos^2\nu} . \cos^2\alpha,$$

aneb, dosadíme-li dřívější hodnoty funkcí úhlu $\alpha$,

$$(38)\qquad o\zeta = o\xi . \operatorname{cotg}(\mu+\nu)\operatorname{tg}\nu + o\eta . \frac{\sin\mu . \cos(\mu-\nu)}{\cos\nu . \sin(\mu+\nu)}.$$

Relace (37) a (38) jsou též patrně platné pro každý trojúhelník, jehož ramena a výšku protneme příčkou kolmou k některé straně.

Vedeme-li tyto kolmice specielně bodem $c$ a dáme-li splynouti $o$ s $c$, obdržíme pro kolmici ku přímce $af$

$$\frac{cx_1}{cy_1} = \frac{\cos\mu . \cos(\mu+\nu)}{\cos\nu} . \operatorname{cotg}^2\alpha$$

aneb

$$\frac{cx_1}{cy_1} = \frac{\sin\mu \, . \cos(\mu + \nu)}{\sin\nu} \tag{39}$$

a pro kolmici ku přímce *bf*

$$\frac{cx_2}{cy_2} = \frac{\cos\mu \, . \cos(\mu - \nu)}{\cos\nu \, . \cos(\mu + \nu)} \, . \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

aneb

$$\frac{cx_2}{cy_2} = \frac{\sin\mu \, . \cos(\mu - \nu)}{\sin\nu \, . \cos(\mu + \nu)} \, . \tag{40}$$

Jest tedy dvojpoměr těchto úseček

$$\frac{cx_1}{cy_1} : \frac{cx_2}{cy_2} = \frac{\cos^2(\mu + \nu)}{\cos(\mu - \nu)} \, . \tag{41}$$

Vedeme-li ony kolmice vrcholem *f*, dají relace (37) a (38) následující

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\sin\nu}{\cos\mu \, . \sin(\mu + \nu)} + \operatorname{cotg}(\mu + \nu) \operatorname{tg}\mu, \\ 1 &= \operatorname{cotg}(\mu + \nu) \operatorname{tg}\nu + \frac{\cos(\mu - \nu)}{\cos^2\nu} \, . \end{aligned} \tag{42}$$

Relace (42) jest správnou pro libovolný úhel s libovolnou dělící přímkou a kolmici k jednomu rameni.

Až dosud měl bod *f* libovolnou polohu. Splyne-li však *d* s půlícím bodem přímky *ab*, bude *f* vrcholem *rovnoramenného trojúhelníka* s vrcholovým úhlem $2\mu$. Relace (30) se promění v následující

$$oz = ox \, . \frac{\cos(\omega + \mu)}{2\cos\mu \, . \cos\omega} + oy \, . \frac{\cos(\omega - \mu)}{2\cos\mu \, . \cos\omega} \tag{43}$$

a splyne-li *o* se *z*,

$$\frac{zx}{zy} = \frac{\cos(\omega - \mu)}{\cos(\omega + \mu)} \, . \tag{44}$$

Vedeme-li v tomto případě transversálu, jež uzavírá se základnou úhel $\mu$, obdržíme analogicky (31) relaci

$$oz = \frac{ox}{2}(1 - \operatorname{tg}^2\mu) + \frac{oy}{2}(1 + \operatorname{tg}^2\mu). \tag{45}$$

Splyne-li v tomto případě $o$ se $z$, plyne relace

$$(46)\qquad \frac{zx}{zy}=\frac{1}{\cos 2\mu}.$$

Vedeme-li však rohy $a$, $b$ základny rovnoramenného trojúhelníka transversály, jež uzavírají se základnou úhel 45°, protínají se kolmo v bodě $c$ výšky a protínají protilehlá ramena v bodech $mn$, obdržíme z relací (33) a (34)

$$(47)\qquad \frac{ac}{mc}=\frac{bc}{nc}=\frac{\cos\mu+\sin\mu}{\cos\mu-\sin\mu}.$$

Vedeme-li libovolným bodem $o$ transversálu kolmou ku straně rovnoramenného trojúhelníka, jež protíná jeho ramena a výšku v bodech $x$, $y$, $z$, obdržíme dle (39) a (40) následující relaci

$$(48)\qquad oz=ox\,.\,\frac{1+\mathrm{tg}^2\mu}{2}+oy\,\frac{1-\mathrm{tg}^2\mu}{2}.$$

Vedeme-li v rovnoramenném trojúhelníku z libovolného bodu $c$ výšky kolmici $xy$ k některému ramenu, obdržíme

$$(49)\qquad \frac{cx}{cy}=\cos 2\mu.$$

Položíme-li $\mu=30^0$, přejde rovnoramenný trojúhelník v *rovnostranný,* pro který tedy obdržíme použitím předcházejících relací následující vztahy:

Uzavírá-li transversála P se základnou rovnostranného trojúhelníka úhel $\omega$ a protíná jeho ramena a výšku v bodech $x$, $y$, $z$, platí pro libovolný bod $o$ této příčky

$$(50)\qquad oz=\frac{ox}{2}(1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\omega)+\frac{oy}{2}(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\omega)$$

a splyne-li bod $o$ se $z$,

$$(51)\qquad \frac{zx}{zy}=\frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\omega}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\omega}.$$

Vedeme-li zvláště příčku, jež svírá se základnou úhel 30°, obdržíme

(52) $$oz = 2oy - ox,$$
jakož i
(53) $$zx = 2zy.$$

Vedeme-li však v rovnostranném trojúhelníku příčku, jež svírá se základnou úhel $45^0$ a protíná výšku v $c$ a ramena v $m$, $n$, obdržíme

(54) $$\frac{ac}{mc} = \frac{bc}{nc} = 2 + \sqrt{3}.$$

Dejme dále bodu $f$ (obr. 8.) splynouti s bodem $c$, pak budou předcházející relace vyjadřovati řadu vlastností *pravoúhlého trojúhelníka*, jehož odvěsny a výška jsou protnuty v bodech $x$, $y$, $z$ libovolnou transversálou, jež uzavírá s přeponou úhel $\omega$, a na které znamená $o$ libovolný bod.

V relaci (30) jest nám pak položiti $\mu + \nu = 90^0$, čímž obdržíme

(55) $$oz = ox \,.\, \cos(\omega + \mu)\frac{\cos\mu}{\cos\omega} + oy \,.\, \sin(\omega + \mu)\frac{\sin\mu}{\cos\omega},$$

a dáme-li bodu $o$ splynouti s bodem $z$,

(56) $$\frac{zx}{zy} = \operatorname{tg}(\omega + \mu)\operatorname{tg}\mu.$$

Vedeme-li transversálu vrcholem, obdržíme

(57) $$1 = \cos(\omega + \mu)\frac{\cos\mu}{\cos\omega} + \sin(\omega + \mu)\frac{\sin\mu}{\cos\omega}.$$

Relace ta platí pro každý pravý úhel a dvě dělící čáry, z nichž jedna svírá s jedním ramenem úhel $\mu$, druhá pak úhel $90 - \omega - \mu$.

Vedeme-li zvláště transversálu, jež svírá s přeponou úhel $\mu$, přejdou relace (55) a (56) v následující

(58) $$oz = ox \,.\, \cos 2\mu + oy \sin 2\mu \,.\, \operatorname{tg}\mu,$$

(59) $$\frac{zx}{zy} = \operatorname{tg} 2\mu \,.\, \operatorname{tg}\mu.$$

(Dokončení.)