Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Peter Scherk

Über einen Satz von Khintchine

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 4, 263--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122004

Über einen Satz von Khintchine.

Peter Scherk, Praha.

(Eingegangen am 3. August 1937.)

Einleitung.

Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen ganze Zahlen. Die *Anzahlfunktion* $A(n)$ einer Menge A natürlicher Zahlen gibt die Anzahl der Elemente von A an, die höchstens gleich n sind.

Herr Khintchine[1]) bewies den folgenden Satz $\langle \beta, \mu \rangle$:

Es sei $h \geqq 2$; $A_1, \ldots, A_{h-1}$, B *seien Mengen natürlicher Zahlen*; $C = A_1 + \ldots + A_{h-1} + B$ *sei die Summe dieser Mengen*, d. h. die Menge aller natürlichen Zahlen der Form $a_1 + \ldots + a_{h-1} + b$, wo jedes a_i gleich 0 oder in A_i gelegen $[i = 1, \ldots, h - 1]$, $b = 0$ oder in B gelegen ist. *Ferner sei*

$$0 < \alpha < \frac{1}{h}, \quad \beta = \alpha \text{ oder } \beta = 1 - h\alpha; \quad 0 \leqq \mu < 1 - \beta;$$

$$f_\alpha(\mu) = \operatorname{Max}(0, h\mu - h + 1); \quad f_{1-h\alpha}(\mu) = \frac{\mu}{h}.$$

Für $1 \leqq n \leqq N$ *sei*

$$\begin{aligned} A_1(n) &\geqq \alpha n, \\ A_2(n) &\geqq \alpha n - \frac{1}{h}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{h-1}(n) &\geqq \alpha n - \frac{h-2}{h}, \\ B(n) &\geqq \beta n - \mu. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$C(N) \geqq ((h-1)\alpha + \beta) N - f_\beta(\mu).$$

Der wichtigste Spezialfall dieses Satzes ist der folgende, der

---

[1]) Khintchine: Zur additiven Zahlentheorie [Matematitscheskij Sbornik, **39** (1932), S. 27—34], deutsch mit russischem Auszug.

sich aus dem Satze $\langle\alpha, 0\rangle$ ergibt, wenn B und alle A_i gleich ein- und derselben Menge natürlicher Zahlen gewählt werden:

Es sei $A_h(n)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leqq n$, die als Summe von höchstens h Zahlen einer gegebenen Menge A natürlicher Zahlen darstellbar sind; ferner sei

$$\alpha_h = \operatorname*{Min}_{n=1,\ldots,N} \frac{A_h(n)}{n};\ \alpha_1 h < 1.$$

Dann ist

$$\alpha_h \geqq \alpha_1 h.$$

Auf Grund einer einfachen Bemerkung kann der Beweis des Satzes $\langle\beta, \mu\rangle$ abgekürzt werden. Im folgenden wird der neue Beweis vollständig durchgeführt, ohne die Kenntnis der Khintchineschen Arbeit vorauszusetzen. Der Leser derselben findet den hinzugekommenen Kunstgriff (extreme Wahl des Parameters μ) im § 2 dieser Note dargestellt. Der Rest verläuft nach dem Khintchineschen Paradigma.

§ 1. Vorbemerkungen.

1° *Wir setzen im folgenden*

$$\beta' = 1 - (h-1)\,\alpha - \beta,$$

also $\beta' = 1 - h\alpha$ für $\beta = \alpha$ und $\beta' = \alpha$ für $\beta = 1 - h\alpha$. *Dann lautet die Behauptung*

$$C(N) \geqq (1-\beta')\,N - f_\beta(\mu).$$

2° *Die Funktion $f_\beta(\mu)$ fällt nicht bei wachsendem μ; es gilt*

$$0 \leqq f_\beta(\mu) < \beta'.$$

3° Der Satz $\langle\beta, \mu\rangle$, für $N = 1$ evident, sei für alle $N \leqq M$ bewiesen. *Im folgenden sei M fest.* Liegt $M+1$ in C, so ist

$$C(M+1) = C(M) + 1 \geqq (1-\beta')\,M - f_\beta(\mu) + 1$$
$$\geqq (1-\beta')\,(M+1) - f_\beta(\mu).$$

Wir können also im folgenden voraussetzen

$$M + 1 \in \overline{C}\ ^{2)}.$$

4° Unter der *Umkehrung* A^* einer Menge A von natürlichen Zahlen verstehen wir die Menge aller natürlichen Zahlen $a^* \leqq M$ mit

$$M + 1 - a^* \in \overline{A}.$$

---

[2]) Die Menge $\overline{A}$ besteht aus den Zahlen, die der Menge A nicht angehören. Es bedeutet $n \in B$: n ist in der Menge B enthalten; $A \subset B$: A ist Untermenge von B.

A^* hat also die Anzahlfunktion

$$A^*(n) = n - A(M) + A(M - n) \quad [n = 0, 1, \ldots, M];$$

denn nach Definition ist $A^*(n)$ gleich der Anzahl der a^* mit

$$1 \leqq a^* \leqq n \text{ und } M + 1 - a^* \in \bar{A},$$

also gleich n—Anzahl der b mit

$$1 \leqq b \leqq n \text{ und } M + 1 - b \in A,$$

also gleich n—Anzahl der a mit

$$M - n + 1 \leqq a \leqq M \text{ und } a \in A.$$

5° *Umkehrformel: Es sei* $h \geqq 2$; $D_1, \ldots, D_h$ *seien* h *Mengen natürlicher Zahlen. Wir setzen*

$$E = D_1 + \ldots + D_h;$$

$$F_r = D_1 + \ldots + D_{r-1} + E^* + D_{r+1} + \ldots + D_h \quad [r = 1, \ldots, h];$$

ferner sei $M + 1 \in \bar{E}$.

Dann gilt im Intervall $\langle 1, M\rangle$

$$F_r \subset D_r^*$$

also insbesondere

$$D_r^*(n) \geqq F_r(n) \quad [n = 0, 1, \ldots, M].$$

Beweis: Es sei

$$f \in F_r, \; 1 \leqq f \leqq M;$$

dann ist zu zeigen

$$M + 1 - f \in \bar{D}_r.$$

Nach Definition von F_r ist

$$f = d_1 + \ldots + d_{r-1} + e^* + d_{r+1} + \ldots + d_h$$

$$[e^* \in E^* \text{ oder } e^* = 0, \; d_k \in D_k \text{ oder } d_k = 0; \; k = 1, \ldots, h],$$

$$M + 1 - e^* = d_1 + \ldots + d_{r-1} + (M + 1 - f) + d_{r+1} + \ldots + d_h.$$

Läge $M + 1 - f$ in D_r, so läge die rechte Seite in E, was für $e^* = 0$ nach Voraussetzung, für $e^* \neq 0$ nach Definition von E^* unmöglich ist.[3])

§ 2. Allgemeiner Induktionsansatz.

Der Satz $\langle \beta, \mu\rangle$ sei falsch für $M + 1$. Dann ist

$$(1 - \beta')M - f_\beta(\mu) \leqq C(M) = C(M + 1) < (1 - \beta')(M + 1) - f_\beta(\mu). \tag{1}$$

Ersetze ich μ durch eine kleinere nicht negative Zahl, so bleibt

[3]) Beinahe wörtlich nach Khintchine.

die rechte Abschätzung von (1) nach Vorbemerkung 2° richtig. Ich setze

$$\mu = \operatorname*{Max}_{n=0,1,\ldots,M+1} (\beta n - B(n)); \tag{2}$$

dann bleiben die Voraussetzungen des Satzes $\langle \beta, \mu \rangle$ erfüllt, (1) also bestehen. Wegen (1) können wir setzen

$$C(M) = (1 - \beta')\, M - f_\beta(\mu) + \nu, \quad 0 \leqq \nu < 1 - \beta'. \tag{3}$$

Dies ergibt nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned} C^*(k) &= k - C(M) + C(M - k) \\ &\geqq k - (1 - \beta')\, M + f_\beta(\mu) - \nu + (1 - \beta')\,(M - k) - f_\beta(\mu) \\ &\qquad [k = 0, 1, \ldots, M]; \end{aligned} \tag{4}$$

$$C^*(k) \geqq \beta' k - \nu \quad [k = 0, 1, \ldots, M].$$

Somit ist die Induktionsannahme für Satz $\langle \beta', \nu \rangle$ auf $A_1, \ldots$ $\ldots, A_{h-1}, C^*$ anwendbar. Nach der Umkehrformel ergibt sich

$$B^*(k) = k - B(M) + B(M - k) \geqq (1 - \beta)\, k - f_{\beta'}(\nu) \quad [k = 0, 1, \ldots, M]$$

oder, $M - k = n$ gesetzt,

$$B(n) \geqq (B(M) - \beta M) + \beta n - f_{\beta'}(\nu) \quad [n = 0, 1, \ldots, M]. \tag{5}$$

Gäbe es eine Zahl n_1 mit $0 \leqq n_1 \leqq M$, so daß $B(n_1) = \beta n_1 - \mu$ wäre, so folgte aus (5) für $n = n_1$ nach Vorbemerkung 2°:

$$B(M) \leqq \beta M + f_{\beta'}(\nu) - \mu < \beta(M + 1) - \mu \leqq B(M + 1) = B(M).$$

Daher folgt aus (2)

$$B(M) = \beta(M + 1) - \mu. \tag{6}$$

(6) in (5) eingesetzt ergibt noch

$$B(n) \geqq \beta(n + 1) - \mu - f_{\beta'}(\nu) \quad [n = 0, 1, \ldots, M]. \tag{7}$$

§ 3. Abschluss der Induktion für den Satz $\langle \alpha, \mu \rangle$.

Im Falle $\beta = \alpha$ ergibt sich aus (6) und (3)

$$\alpha M = B(M) - \alpha + \mu,$$

$$C(M) = h\alpha M - f_\alpha(\mu) + \nu = h\, B(M) + h\mu - f_\alpha(\mu) - (h\alpha - \nu).$$

Ferner ist

$$0 < h\alpha - \nu < 1; \tag{8}$$

denn nach (3) ist $0 \leqq \nu < h\alpha$ und nach Voraussetzung $h\alpha < 1$.

Wäre $\mu \geqq 1 - \frac{1}{h}$, so hätten wir $f_\alpha(\mu) = h\mu - h + 1$,

$$C(M) - h\, B(M) - h + 1 = -(h\alpha - \nu);$$

dies ist unmöglich, denn die linke Seite dieser Gleichung ist ganzzahlig, die rechte wegen (8) aber nicht. Daher gilt

$$\mu < 1 - \frac{1}{h} \tag{9}$$

$$C(M) = h\,B(M) + h\mu - (h\alpha - \nu).$$

Mit $C(M) - h\,B(M)$ ist $h\mu - (h\alpha - \nu)$ ganzzahlig. Da nach (8) und (9)

$$-1 < -(h\alpha - \nu) \leqq h\mu - (h\alpha - \nu) < h\mu < h - 1$$

ist, können wir setzen

$$h\mu - (h\alpha - \nu) = r - 1, \quad 1 \leqq r \leqq h - 1.$$

Dies gibt mit (7)

$$B(n) \geqq \alpha(n+1) - \mu - \frac{\nu}{h} = \alpha n - \frac{r-1}{h} \quad [n = 0, 1, \ldots, M].$$

Die Induktionsannahme für Satz $\langle 1 - h\alpha, \nu\rangle$ kann somit auf

$$A_1, \ldots, A_{r-1}, B, A_{r+1}, \ldots, A_{h-1}, C^*$$

angewendet werden. Dies gibt zusammen mit der Umkehrformel

$$M - A_r(M) = A_r^*(M) \geqq (1 - \alpha)\,M - \frac{\nu}{h},$$

$$A_r(M) \leqq \alpha M + \frac{\nu}{h} = B(M) - \alpha + \mu + \frac{\nu}{h}$$

$$= B(M) + \frac{r-1}{h} < B(M) + 1;$$

da andererseits voraussetzungsgemäß

$$A_r(M) = A_r(M+1) \geqq \alpha(M+1) - \frac{r-1}{h}$$

$$= B(M) + \mu - \left(\mu - \frac{h\alpha - \nu}{h}\right) = B(M) + \frac{h\alpha - \nu}{h} > B(M)$$

wäre, gölte für die ganzen Zahlen $A_r(M)$ und $B(M)$

$$B(M) < A_r(M) < B(M+1),$$

Widerspruch.

§ 4. Abschluss der Induktion für den Satz $\langle 1 - h\alpha, \mu\rangle$.

Nach (3) und (6) ist

$$C(M) = (1 - \alpha)\,M - \frac{\mu}{h} + \nu,$$

$$B(M) = (1 - h\alpha)(M + 1) - \mu = M(1 - h) + h\,C(M) + 1 - h(\alpha + \nu).$$

Wegen $0 \leqq \nu < 1 - \alpha$ gilt $0 < \alpha + \nu < 1$, also

$$h(\alpha + \nu) = r, \; 1 \leqq r \leqq h - 1,$$

$$\nu < \frac{r}{h} \leqq 1 - \frac{1}{h}, \; f_\alpha(\nu) = 0;$$

dies gibt mit (7)

$$B(n) \geqq (1 - h\alpha)\, n - (h\alpha + \mu - 1) \quad [n = 0, 1, \ldots, M].$$

Für $n = 0$ folgt

$$0 \leqq h\alpha + \mu - 1 < \mu.$$

Nach Induktionsannahme für Satz $\langle 1 - h\alpha, h\alpha + \mu - 1\rangle$ ergibt sich

$$C(n) \geqq (1 - \alpha)\, n - \frac{h\alpha + \mu - 1}{h} \quad [n = 0, 1, \ldots, M];$$

$$C^*(k) = k - C(M) + C(M - k)$$

$$\geqq k - (1 - \alpha)\, M + \frac{\mu}{h} - \nu + (1 - \alpha)(M - k) - \frac{h\alpha + \mu - 1}{h}$$

$$= \alpha k - \left(\alpha + \nu - \frac{1}{h}\right) = \alpha k - \frac{r - 1}{h} \qquad [k = 0, 1, \ldots, M].$$

Die Voraussetzungen von Satz $\langle 1 - h\alpha, \mu\rangle$ sind für

$$A_1, \ldots, A_{r-1}, C^*, A_{r+1}, \ldots, A_{h-1}, B$$

erfüllt. Unter Benutzung der Umkehrformel ergibt sich

$$M - A_r(M) = A_r^*(M) \geqq (1 - \alpha)\, M - \frac{\mu}{h};$$

$$A_r(M) \leqq \alpha M + \frac{\mu}{h} = M - C(M) + \nu < M - C(M) + 1;$$

andererseits ist nach Voraussetzung

$$A_r(M) = A_r(M + 1) \geqq \alpha M + \alpha - \frac{r - 1}{h}$$

$$= M - C(M) - \frac{\mu}{h} + \nu + \alpha - \left(\alpha + \nu - \frac{1}{h}\right)$$

$$= M - C(M) + \frac{1 - \mu}{h} > M - C(M),$$

Widerspruch wie oben.

*

O jedné Chinčinově větě.

(Obsah předešlého článku.)

Autor podává zjednodušený důkaz této Chinčinovy věty (malá latinská písmena značí přirozená čísla):

Je-li A množina přirozených čísel, budiž $A(n)$ počet čísel z A, jež jsou $\leqq n$. Budiž nyní $h \geqq 2$; buďte $A_1, A_2, \ldots, A_{h-1}, B$ množiny přirozených čísel; C budiž množina všech přirozených čísel tvaru $a_1 + a_2 + \ldots + a_{h-1} + b$, kde každé a_i je buď nula nebo patří k A_i a kde b je buďto nula nebo patří k B. Budiž $0 < \alpha < \frac{1}{h}$; $\beta = \alpha$ nebo $\beta = 1 - h\alpha$; $0 \leqq \mu < 1 - \beta$; N budiž celé kladné číslo a pro $1 \leqq n \leqq N$ budiž

$$A_r(n) \geqq \alpha n - \frac{r-1}{h} \quad (r = 1, \ldots, h-1), \quad B(n) \geqq \beta n - \mu.$$

Potom je

$$C(N) \geqq ((h-1)\,\alpha + \beta)\,N - \varrho,$$

kde $\varrho = \operatorname{Max}(0, h\mu - h + 1)$ pro $\beta = \alpha$, $\varrho = \frac{\mu}{h}$ pro $\beta = 1 - h\alpha$.