Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Rychlík

Sestrojení pravidelného sedmnáctiúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 1, 81--93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122211

Sestrojení pravidelného sedmnáctiúhelníku.

Napsal Dr. **Karel Rychlík.**

Pravidelný sedmnáctiúhelník jest možno sestrojiti elementární geometrickou konstrukcí (t. j. pomocí pravítka a kružítka). V XXXIII. ročníku Časopisu (stř. 543—558) vyložil † ředitel Strnad konstrukci Serretovu v úpravě Bachmannově a odvodil z ní jinou pomocí transformace převratnými průvodiči. Tuto konstrukci pak v zjednodušené úpravě neodvisle a přístupněji vyložil v Časopise r. XXXVI. (str. 81—86). Richmond (Quart. Journ. of. Math. 25, 1892; Math. Ann. 67, 1909) provedl v rozboru konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníku formální zjednodušení: Shledal, že lze postupné řešení prvých dvou rovnic kvadratických, k nimž konstrukce vede, nahraditi dělením jistého úhlu na čtvrtiny. Této myšlenky pak užil k sestavení nové konstrukce. Vyložím v následujícím konstrukci Richmondovu, jakož i jinou konstrukci na téže myšlence spočívající, která má tu výhodu, že ji možno snadno upraviti v konstrukci užívající pevného kruhu s daným středem a přímek. (První takovou konstrukci uveřejnil v. Staudt v Crelleově Journalu sv. 24., 1842 bez důkazu. Důkaz podal pak Schröter, tamtéž sv. 75., 1872).

1. Položme

$$\varphi = \frac{2\pi}{17}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{ll|ll} x_1 = 2\,cos\,3\varphi = 2\,cos\,14\varphi & = & 2\,cos\,3\varphi \\ x_2 = 2\,cos\,9\varphi = 2\,cos\,8\varphi & = - & 2\,cos\,\frac{1}{2}\,\varphi \\ x_3 = 2\,cos\,10\varphi = 2\,cos\,7\varphi & = - & 2\,cos\,\frac{3}{2}\,\varphi \\ x_4 = 2\,cos\,13\varphi = 2\,cos\,4\varphi & = & 2\,cos\,4\varphi \\ x_5 = 2\,cos\,5\varphi = 2\,cos\,12\varphi & = - & 2\,cos\,\frac{7}{2}\,\varphi \\ x_6 = 2\,cos\,15\varphi = 2\,cos\,2\varphi & = & 2\,cos\,2\varphi \\ x_7 = 2\,cos\,11\varphi = 2\,cos\,6\varphi & = - & 2\,cos\,\frac{5}{2}\,\varphi \\ x_8 = 2\,cos\,16\varphi = 2\,cos\,\varphi & = & 2\,cos\,\varphi, \end{array}\right\} \quad (2)$$

a dále

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_5 \\ y_2 = x_2 + x_6 \\ y_3 = x_3 + x_7 \\ y_4 = x_4 + x_8, \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = y_1 + y_3 \\ z_2 = x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = y_2 + y_4 \end{array}\right\}^{*)} \quad (4)$$

2. V druhém sloupci ve (2) jsou vyjádřeny veličiny x pomocí cos úhlů $< \frac{\pi}{2}$. Z vyjádření toho jest ihned jejich znamení patrno. Zároveň vidíme, že je můžeme srovnati dle absolutní hodnoty v řadu

$$|x_2| > |x_8| > |x_3| > |x_6| > |x_7| > |x_1| > |x_5| > |x_4|. \quad (5)$$

Ustanovme ihned, jaké znamení mají y_1, y_2, y_3, y_4 a z_1. V $y_1 = x_1 + x_5$ jest $x_1 > 0$, $x_5 < 0$, avšak

$$|x_1| > |x_5|,$$

tak že

$$y_1 > 0 \quad (6)$$

---

*) x_1 x_2, ... x_8 jsou dvojčlenné periody Gaussovy, y_1, y_2, y_3, y_4, jsou periody čtyřčlenné a z_1, z_2 periody osmičlenné. K uspořádání užito té okolnosti, že 3 jest primitivním kořenem prvočísla 17. Jest totiž

$$x_k = 2\,cos\,3^k\varphi$$

($k = 1, 2, 3, \ldots 8$).

Podobně určíme

$$y_2 < 0,\ y_3 < 0,\ y_4 > 0. \qquad (6)$$

Abychom určili znamení při $z_1 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7$, uvažme, že $x_1 > 0$, $x_3, x_5, x_7 < 0$ a dále $|x_1| < |x_3|$, tudíž již $x_1 + x_3 < 0$ a tím spíše

$$z_1 < 0. \qquad (7)$$

3. Čtverce a součiny veličin x po dvou lze na základě vzorců

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$$

vyjádřiti lineárně pomocí prvních mocnin. Tak obdržíme na př.

$$x_1^2 = 2 + x_7,\ x_1 x_2 = x_5 + x_7.$$

Sestavme tyto čtverce a součiny veličin x po dvou v multiplikační tabulku:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	$2+x_7$	x_5+x_7	x_3+x_4	x_3+x_8	x_2+x_6	x_5+x_8	x_1+x_2	x_4+x_6
x_2	x_5+x_7	$2+x_8$	x_6+x_8	x_4+x_5	x_1+x_4	x_3+x_7	x_1+x_6	x_2+x_3
x_3	x_3+x_4	x_6+x_8	$2+x_1$	x_1+x_7	x_5+x_6	x_2+x_5	x_4+x_8	x_2+x_7
x_4	x_3+x_8	x_4+x_5	x_1+x_7	$2+x_2$	x_2+x_8	x_6+x_7	x_3+x_6	x_1+x_5
x_5	x_2+x_6	x_2+x_4	x_5+x_6	x_2+x_8	$2+x_3$	x_1+x_3	x_7+x_8	x_4+x_7
x_6	x_5+x_8	x_3+x_7	x_2+x_5	x_6+x_7	x_1+x_3	$2+x_4$	x_2+x_4	x_1+x_8
x_7	x_1+x_2	x_1+x_6	x_4+x_8	x_3+x_6	x_7+x_8	x_2+x_4	$2+x_5$	x_3+x_5
x_8	x_4+x_6	x_2+x_3	x_2+x_7	x_1+x_5	x_4+x_7	x_1+x_8	x_3+x_5	$2+x_6$

4. Vypočtěme ihned též hodnotu součtu

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8.$$

Násobíme-li obě strany této rovnice x_1, obdržíme

$$S x_1 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_8$$

a užijeme-li multiplikační tabulky

$$Sx_1 = 2 + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_8 = 2 - x_1 + 2S,$$

tedy

$$(S + 1)(x_1 - 2) = 0.$$

Poněvadž pak jest jistě $x_1 \neq 2$, plyne z této rovnice

$$S = -1,$$

t. j.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = -1. \tag{8}$$

5. Nyní můžeme snadno dokázati, že z_1, z_2 jsou kořeny kvadratické rovnice s racionálnými koefficienty. Jest totiž

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + \ldots + x_8$$

a tedy dle (8).

$$z_1 + z_2 = -1. \tag{9}$$

Provedeme-li součin

$$z_1 z_2 = (x_1 + x_3 + x_5 + x_7)(x_2 + x_4 + x_6 + x_8),$$

užijeme pak multiplikační tabulky a vzorce (8.), obdržíme

$$z_1 z_2 = -4. \tag{9'}$$

Jsou tudíž z_1, z_2 kořeny rovnice kvadratické

I.) $$z^2 + z - 4 = 0.$$

Dále jest

$$y_1 + y_3 = z_1, \tag{10}$$

a postupem stejným jako při součinu $z_1 z_2$ určíme

$$y_1 y_3 = -1, \tag{10'}$$

tak že y_1, y_3 jsou kořeny rovnice kvadratické

IIa) $$y^2 - z_1 y - 1 = 0.$$

Podobně zjistíme, že y_2, y_4 jsou kořeny rovnice kvadratické

IIb) $$y^2 - z_2 y - 1 = 0.$$

Konečně ustanovme rovnice kvadratické, jejichž kořeny jsou dvojice x_1, x_5; x_2, x_6; x_3, x_7; x_4, x_8.

Jest totiž

$$x_1 + x_5 = y_1\,,\ x_1 x_5 = x_2 + x_6 = y_2, \tag{11}$$

tak že x_1, x_5 vyhovují rovnici kvadratické

IIIa) $$x^2 - y_1 x + y_2 = 0.$$

Podobně jest

$$x_2 + x_6 = y_2\,,\ x_2 x_6 = x_3 + x_7 = y_3 \tag{12}$$

a x_2, x_6 jsou kořeny rovnice kvadratické

IIIb) $$x^2 - y_2 x + y_3 = 0;$$

$$x_3 + x_7 = y_3\,,\ x_3 x_7 = x_4 + x_8 = y_4 \tag{13}$$

a x_3, x_7 jsou kořeny rovnice kvadratické

IIIc) $$x^2 - y_3 x + y_4 = 0;$$

$$x_4 + x_8 = y_4\,,\ x_4 x_8 = x_1 + x_5 = y_3 \tag{14}$$

a x_4, x_8 jsou kořeny rovnice kvadratické

IIId) $$x^2 - y_4 x + y_1 = 0.$$

I vidíme, že určení veličin x vyžaduje postupné řešení rovnic kvadratických I, II, III. Z toho plyne, že řešení to lze provésti pravítkem a kružítkem.

6. Řešení oněch kvadratických rovnic lze provésti různými grafickými methodami. Richmond ukázal, že řešení rovnic I a II lze převésti na dělení jistého úhlu na čtyři stejné díly. K tomu cíli užijeme tak zvaného geometrického řešení kvadratických rovnic.

Kořeny rovnice kvadratické s reálnými koefficienty

α) $$x^2 + ax - b = 0,$$

kdež b jest číslo kladné, lze vyjádřiti ve tvaru

β) $$\sqrt{b}\ tg\,\frac{\vartheta}{2} \quad \text{a} \quad -\sqrt{b}\ cotg\,\frac{\vartheta}{2},$$

značí-li ϑ úhel daný rovnicí

γ) $$tg\,\vartheta = \frac{2\sqrt{b}}{a}\ ^{*)}$$

---

*) Podstatou tohoto řešení jest, že převedeno určení kořenů rovnice kvadratické na půlení úhlu, což jest vlastně též úloha dvojznačná. V elementární geometrii jest zvykem uvažovati pouze jediné její řešení, dané osou souměrnosti úhlu. Druhé řešení jest dáno osou souměrnosti příslušného

Z toho vidíme, že označíme-li δ ostrý úhel, pro který

$$tg\,\delta = 4,$$

budou kořeny rovnice I) $z^2 + z - 4 = 0$ dány výrazy

$$2\,tg\,\frac{\delta}{2},\ -2\,cotg\,\frac{\delta}{2};$$

poněvadž úhel δ jest ostrý, bude prvý z těchto výrazů kladný, druhý záporný. Pomocí této okolnosti můžeme rozhodnouti, který z těchto výrazů představuje z_1 a který z_2. Víme totiž, dle (7), že $z_1 < 0$ a poněvadž dle (9′) $z_1 z_2 = -1$, jest

$$z_2 > 0. \tag{15}$$

Z toho plyne

$$z_1 = -2\,cotg\,\frac{\delta}{2},\quad z_2 = 2\,tg\,\frac{\delta}{2} \tag{16}$$

Dosazením do rovnice IIa) obdržíme

$$\text{II}'a)\qquad y^2 + 2\,cotg\,\frac{\delta}{2}\,y - 1 = 0.$$

Kladme v rovnici α)

$$a = 2\,cotg\,\frac{\delta}{2},\ b = 1$$

úhlu vedlejšího. Označíme-li při úhlu ϑ ono prvé řešení $\frac{\vartheta}{2}$, bude druhým řešením $\frac{\vartheta + \pi}{2}$. Půlení úhlu vyžaduje totiž určení $tg\,\frac{\vartheta}{2}$, je-li dán $tg\,\vartheta$. Uvážíme-li, že $tg\,\vartheta = \dfrac{2\,tg\,\frac{\vartheta}{2}}{1 - tg^2\,\frac{\vartheta}{2}}$ jest $tg\,\frac{\vartheta}{2}$ určeno kvadratickou rovnicí $x^2\,tg\,\vartheta + 2x - tg\,\vartheta = 0$. Jest však též

$$tg\,\vartheta = \frac{2\,cotg\,\frac{\vartheta}{2}}{cotg^2\,\frac{\vartheta}{2} - 1},$$

tak že rovnice ta má vedle kořene $tg\,\frac{\vartheta}{2}$ též kořen

$$-\,cotg\,\frac{\vartheta}{2} = tg\,\frac{\vartheta + \pi}{2}.$$

Podobně jest dělení úhlu ϑ na n stejných dílů úlohou v podstatě n-značnou o řešeních $\frac{\vartheta}{n}$, $\frac{\vartheta + \pi}{2}$, $\frac{\vartheta + 2\pi}{n}$, ... $\frac{\vartheta + (n-1)\,\pi}{n}$.

a určeme úhel ϑ z rovnice $tg\,\vartheta = \frac{2\sqrt{b}}{a} = tg\,\frac{\delta}{2}$, tak že možno klásti $\vartheta = \frac{\delta}{2}$ a dle (β) budou pak kořeny rovnice II'a)

$$tg\,\frac{\delta}{4},\ -cotg\,\frac{\delta}{4}.$$

Přihlédneme-li opět ke znamení, shledáme, že jest

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= tg\,\frac{\delta}{4} \\ y_3 &= -\,cotg\,\frac{\delta}{4} = tg\,\frac{\delta+2\pi}{4}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Podobně dosazením do IIb) obdržíme rovnici

II'b) $$y^2 - 2\,tg\,2\delta\; y - 1 = 0$$

a shledáme, že její kořeny jsou

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= -\,cotg\,\frac{\delta+\pi}{4} = tg\,\frac{\delta+3\pi}{4} \\ y_4 &= tg\,\frac{\delta+\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Tak převedeno určení veličin y_1, y_2, y_3, y_4 na čtvrcení úhlu δ.

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic III), nabudou tyto rovnice pro x tvaru

III'a) $$x^2 - tg\,\frac{\delta}{4}\,x + tg\,\frac{\delta+3\pi}{4} = 0$$ (kořeny x_1, x_5)

III'b) $$x^2 - tg\,\frac{\delta+3\pi}{4}\,x + tg\,\frac{\delta+2\pi}{4} = 0$$ (kořeny x_2, x_6)

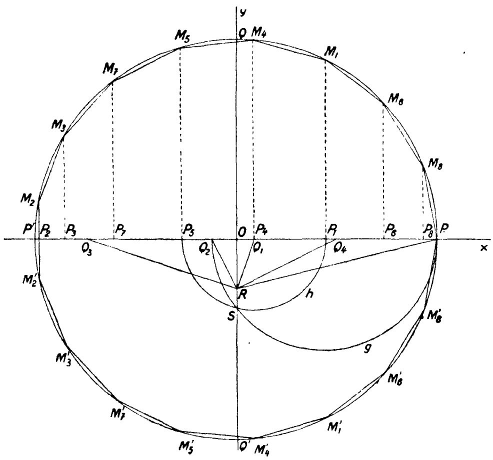
III'c) $$x^2 - tg\,\frac{\delta+2\pi}{4}\,x + tg\,\frac{\delta+\pi}{4} = 0$$ (kořeny x_3, x_7)

III'd) $$x^2 - tg\,\frac{\delta+\pi}{4}\,x + tg\,\frac{\delta}{4} = 0$$ (kořeny x_4, x_8).

7. Označme vrcholy pravidelného sedmnáctiúhelníku vepsaného do kružnice k o poloměru 1

$$P,\ M_1,\ M_2,\ \ldots\ M_8,\ M'_1,\ M'_2\ \ldots\ M'_8$$

v pořadí, jak na obrazci 1. naznačeno, veďme osy souřadnic a promítněme vrcholy do osy x, kteréžto průměty označme $P_1, P_2, \dots P_8$. Pak bude $x_k = 2\,\overline{OP_k}$.



Obr. 1.

Označme

Q_1 půlící bod úsečky $\overline{P_1P_5}$, tak že $\overline{OP_1} + \overline{OP_5} = 2\,\overline{OQ_1}$
Q_2 „ „ „ $\overline{P_2P_6}$, „ „ $\overline{OP_2} + \overline{OP_6} = 2\,\overline{OQ_2}$
Q_3 „ „ „ $\overline{P_3P_7}$, „ „ $\overline{OP_3} + \overline{OP_7} = 2\,\overline{OQ_3}$
Q_4 „ „ „ $\overline{P_4P_8}$, „ „ $\overline{OP_4} + \overline{OP_8} = 2\,\overline{OQ_4}$

Pak bude na základě rovnic (3).

$$y_1 = 4\,\overline{OQ_1},\; y_2 = 4\,\overline{OQ_2},\; y_3 = 4\,\overline{OQ_3},\; y_4 = 4\,\overline{OQ_4}$$

a tedy dle rovnic (17) a (18)

$$\overline{OQ_1} = \tfrac{1}{4}\,tg\,\delta,\; \overline{OQ_2} = \tfrac{1}{4}\,tg\,\frac{\delta + 3\pi}{4} = -\tfrac{1}{4}\,tg\,\frac{\pi - \delta}{4},$$

$$\overline{OQ_3} = \tfrac{1}{4}\,tg\,\frac{\delta + 2\pi}{4} = -\tfrac{1}{4}\,tg\,\frac{2\pi - \delta}{4},\; \overline{OQ_4} = \tfrac{1}{4}\,tg\,\frac{\delta + \pi}{4}.$$

I můžeme body Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 snadno sestrojiti:

Nechť jest $\overline{OR} = \frac{1}{4}\,OQ'$. Pak bude $tg \sphericalangle ORP = 4$ a tedy $\sphericalangle ORP = \delta$.

Sestrojme tudíž

$$\sphericalangle\, ORQ_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \sphericalangle\, ORQ_4 = \frac{\delta + \pi}{4},$$

$$\sphericalangle\, Q_2RO = \frac{\pi - \delta}{4}, \quad \sphericalangle\, Q_3RO = \frac{2\pi - \delta}{4}.$$

Abychom určili body P, uvažme, že jest dle rovnic (11), (12), (13), (14), vzhledem k tomu, že $\overline{OP} = 1$.

$$\begin{aligned} \overline{OP_1} \,.\, \overline{OP_5} &= \overline{OQ_2} \,.\, \overline{OP} \\ \overline{OP_2} \,.\, \overline{OP_6} &= \overline{OQ_3} \,.\, \overline{OP} \\ \overline{OP_3} \,.\, \overline{OP_7} &= \overline{OQ_4} \,.\, \overline{OP} \\ \overline{OP_4} \,.\, \overline{OP_8} &= \overline{OQ_1} \,.\, \overline{OP} \end{aligned} \qquad (19)$$

První z těchto rovnic poskytuje tuto konstrukci: Nad úsečkou Q_2P jako průměrem sestrojme kružnici g protínající osu y v bodě S. Kružnice h kolem středu Q_1 poloměrem Q_1S opsaná protne osu x v bodech P_1, P_5. Pak totiž bod Q_1 jest skutečně středovým bodem úsečky $\overline{P_1P_5}$, osa y pak procházejíc průsečíky kružnic g, h jest jejich chordálou. Má tedy bod O na ní ležící vzhledem k oběma kružnicím g, h tutéž mocnost, takže skutečně $\overline{OP_1} \,.\, \overline{OP_5} = \overline{OQ_2} \,.\, \overline{OP}$. Vztyčíme-li kolmici v bodech P_1, P_5, protnou nám tyto kružnici k v bodech M_1, M_5; M'_1, M'_5, sestrojíme-li pak tětivu $\overline{M_1M_8} = \overline{M_1M_5}$, bude tětiva $\overline{PM_8}$ stranou pravidelného sedmnáctiúhelníku, který nyní již snadno doplníme.

8. K jiné konstrukci dojdeme touto úvahou:

Jedná se o grafické řešení jedné z rovnic III'), na př. III' *d)*,

$$x^2 - tg\,\frac{\delta + \pi}{4}\,x + tg\,\frac{\delta}{4} = 0 \qquad (20)$$

o kořenech x_4, x_8. To provedeme tímto způsobem: Přímka $x = \lambda\,(y + 1)$, procházející bodem $Q'\,(0, \,-1)$ na kružnici k, protíná ji ještě v bodě o souřadnicích

$$x = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad y = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \qquad (21)$$

Tak dostaneme tak zvané parametrické znázornění kružnice k. Každé hodnotě parametru λ odpovídá bod kružnice, daný právě souřadnicemi (21). V daném případě však též naopak každému bodu na kružnici odpovídá určitá a to jediná hodnota parametru λ. Parametr λ má jednoduchý význam. Klademe-li v rovnici $x = \lambda (y + 1)$ za $y = 0$, obdržíme $x = \lambda$. Jest tedy λ úsečkou bodu, v němž přímka $x = \lambda (y + 1)$ osu x protíná.

Hledejme parametry bodů, v nichž přímka

$$l \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

kružnici k protíná. Ty obdržíme, vyjádříme-li podmínku, že bod kružnice k o souřadnicích (21) leží na přímce l jako kořeny rovnice kvadratické

$$\lambda^2 - \frac{2b}{a(b+1)} \lambda + \frac{b-1}{b+1} = 0.$$

Porovnejme tuto rovnici s rovnicí (20). Kladme tedy

$$\frac{2b}{a(b+1)} = tg \frac{\delta + \pi}{4}$$

$$\frac{b-1}{b+1} = tg \frac{\delta}{4},$$

z kterýchžto rovnic určíme

$$b = \frac{1 + tg \dfrac{\delta}{4}}{1 - tg \dfrac{\delta}{4}} = tg \frac{\delta + \pi}{4}$$

$$a = \frac{2}{1 + tg \dfrac{\delta + \pi}{4}} = 1 - tg \frac{\delta}{4}$$

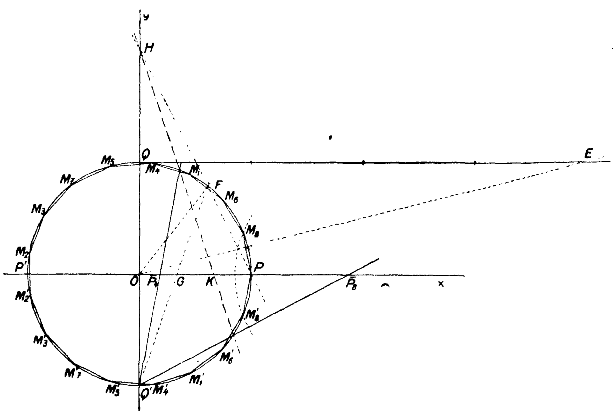
I vidíme, že obdržíme kořeny rovnice (20) jako úsečky bodů na ose x, které vzniknou, spojíme-li bod $Q'(0, -1)$ s průsečíky přímky l a kružnice k. Přímka l jest dána tím, že utíná na ose x úsek $1 - tg \frac{\delta}{4}$, na ose y úsek $tg \frac{\delta + \pi}{4}$.

Odtud plyne konstrukce:

V bodě Q veďme rovnoběžku s osou x a učiňme $\overline{QE} = 4$. Pak jest $tg \sphericalangle QOE = 4$ a tedy $\sphericalangle QOE = \delta$. Osa souměrnosti úhlu QOE nechť protíná kružnici k v bodě F. Pak jest

$\sphericalangle\, QOE = \frac{\delta}{2}$, $\sphericalangle\, QQ'F = \frac{\delta}{4}$, $\sphericalangle\, OPF = \frac{\delta + \pi}{4}$. Přímka $Q'F$ nechť protne osu x v bodě G, přímka PF osu y v bodě H. Pak jest $\overline{OG} = tg \frac{\delta}{4}$, $\overline{OH} = tg \frac{\delta + \pi}{4}$. Učiníme-li $KP = OG$, bude $OK = 1 - tg \frac{\delta}{4}$. Spojme průsečíky přímky $KH \equiv l$ a kružnice k s bodem Q'. Tak dostaneme dvě přímky, protínající osu x v bodech $\overline{P}_8$, $\overline{P}_4$, pro něž jest

$$\overline{O\overline{P}_8} = x_8 = 2 \cos \varphi$$
$$\overline{O\overline{P}_4} = x_4 = 2 \cos 4\varphi.$$

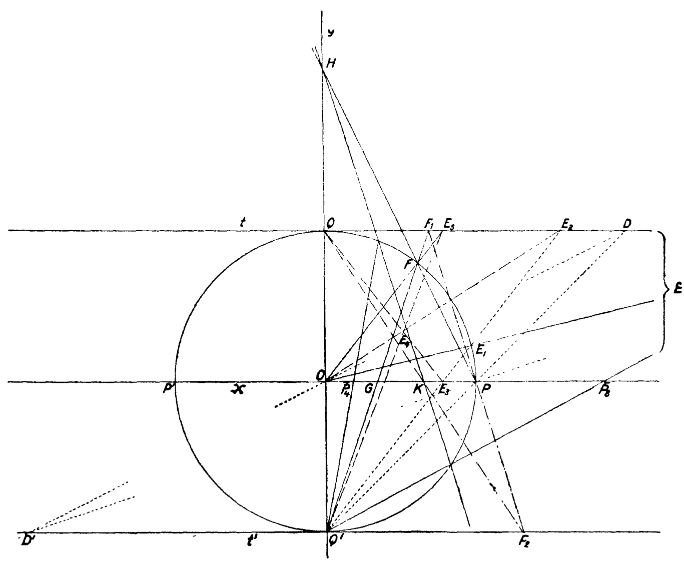


Obr. 2.

Nyní jest doplnění konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníku již snadné.

Buď můžeme užíti té okolnosti, že v pravoúhlém trojúhelníku $P'PM_8$ jest $\sphericalangle\, M_2P'P = \frac{1}{2} \sphericalangle\, M_2OP = 4\varphi$ a tedy $P'M_8 = 2 \cos 4\varphi = P'M'_8$, tak že kružnice poloměrem x_4 kol bodu P' opsaná protne k v bodech M_2 a M'_2; neb, poněvadž jest $P'M_6 = x_8$, sestrojiti postupně M_6, M_4, M_7, M_2; M'_6, M'_4, M'_7, M'_2; neb konečně, poněvadž $\overline{OP_8} = \frac{1}{2}\overline{O\overline{P}_8}$, obdržeti vrcholy M_8, M'_8 jako průsečíky kružnice k s kružnicí o poloměru 1, opsanou kol bodu $\overline{P}_8$ (vzhledem k tomu, že $\overline{OP_4} = \frac{1}{2}\, \overline{O\overline{P}_4}$ obdržíme podobně, protneme-li kružnici k kružnicí o poloměru 1, opsanou kolem bodu $\overline{P_4}$, vrcholy M_4, M'_4, čehož můžeme užíti ke kontrole.)

9. Ukážeme ještě, jak možno konstrukci úseček x_4, x_8 právě vyloženou upraviti tak, že se používá pouze kružnice k, jejíž střed jest dán a přímek.



Obr. 3.

Předpokládejme, že jsme tímto způsobem sestrojili již tečny t, t' v bodech Q a Q' a přímku $x \perp y$, $y \equiv QQ'$. Jedná se nejprvé o sestrojení úsečky $\overline{QE} = 4$ na přímce t. Za tím účelem veďme přímku $Q'P$ a označme D průsečík $(Q'P, t)$. Spojme bod D s bodem O. Spojnice OD nechť protne přímku t' v bodě D' a vedeme-li přímku $D'P$, protne nám tato přímku t v bodě E a jest skutečně $QE = 4$. Nyní jde o to, sestrojiti $\sphericalangle QOF = \dfrac{\delta}{2}$. Přímka OE nechť protíná kružnici k v bodě F_1. Pak jest $\sphericalangle QQ'E_1 = \dfrac{\delta}{2}$. Označme $E_2 \equiv (Q'E_1, t)$, $E_3 \equiv (Q'F_3, x)$. Veďme přímky OE_2 a QE_3 a označme jejich průsečík E_4. Spojme bod Q' s E_4. Přímka ta nechť protne přímku t v bodě E_5. Pak bude přímka OE_5 rovnoběžna s přímkou $Q'F_1$ a tedy $\sphericalangle QOE_5 = \frac{\delta}{2}$. Přímka OE_5 protne kružnici k v bodě F. Průsečík $(Q'F, x)$ jest G, průsečík (PF, y) jest H. Přenesení úsečky OG do polohy KP provedeme takto: Označme $F_1 \equiv (Q'F, t)$. Veďme dále přímku PF_1 a ta nechť protne t' v bodě F_2. Průsečík (QF_2, x) bude K. Spojíme-li body, v nichž přímka $l \equiv HK$ kružnici k protíná s bodem Q', protnou nám tyto dvě přímky přímku x v bodech P_4, P_8, takže $\overline{OP_4} = x_4$, $\overline{OP_8} = x_8$.

Poznámky k theorii kuželoseček.

Napsal **R. Hruša.**

I.

Budiž dána kuželosečka rovnicí středovou tvaru:

$$E \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - D = 0 \tag{1}$$

v soustavě pravoúhlé.

Úloha, stanoviti osy této kuželosečky, řeší se pomocí orthogonální transformace, nebo užitím invariantů kvadratické formy.

Zajímavou elementární methodu naznačil p. B. Niewenglowski ve dvojsvazkovém díle „Cours de géométrie analytique", atd. (Tome I, Sections coniques, p. 294, Exercices 3), kteráž pochází od znamenitého francouzského algebristy E. Galoisa. Methoda ta se opírá o názor geometrický a proto vyniká svou jednoduchostí.

Pro pochopení základní myšlenky této methody uvažujme kuželosečku danou rovnicí osovou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{1*}$$

soustředné kruhy, které mají s kuželosečkou styk dvojnásobný, dány jsou rovnicemi:

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 = a^2,$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 = b^2.$$