Augustin Pánek
Vyčíslení jistých Eulerových integrálů neomezených. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 3, 177--191

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122237`

Vyčíslení jistých Eulerových integrálů neomezených.

Napsal

Augustin Pánek.

(Pokračování.)

VI. Chceme-li vyčísliti integrál

$$(1)\qquad V=\int\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{ax^n+2bx^{2n}}},$$

položíme zase

$$(2)\qquad \sqrt[2n]{x^n(a+2bx^n)}=px,$$

z kteréž rovnice plyne

$$(3)\qquad a+2bx^n=p^{2n}x^n$$

aneb dělením x^n

$$ax^{-n}+2b=p^{2n}.$$

Když tuto rovnici differencujeme a krátíme n, dostaneme

$$-ax^{-n-1}\,dx=2p^{2n-1}\,dp,$$

tedy

$$(4)\qquad dx=-\frac{2}{a}\,x^{n+1}p^{2n-1}dp.$$

Z rovnice (3) jde přímo

$$(5)\qquad a+bx^n=-x^n(b-p^{2n}).$$

Dosadíme-li (2), (4) a (5) do předloženého integrálu, nabývá tvaru integrálu differenciálu racionálního

$$(1')\qquad \int\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{x^n(a+2bx^n)}}=\frac{2}{a}\int\frac{p^{2n-2}dp}{b-p^{2n}}.$$

Jest-li

$$a = -1,\ b = 1,$$

obdržíme

$$(6) \qquad \int \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{(1-x^n)\sqrt[2n]{2x^n-1}} = 2\int \frac{p^{2n-2}dp}{1-p^{2n}}.$$

Kdybychom chtěli integrál (6) vyčísliti přímo, kladli bychom dle substituce (2)

$$\sqrt[2n]{2x^n-1} = p\sqrt{x}.$$

VII. Integrál tvaru

$$(1) \qquad V = \int \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[3n]{a^2+3abx^n+3b^2x^{2n}}}$$

vyčíslíme, zavedeme-li novou proměnnou p rovnicí

$$(2) \qquad \sqrt[3n]{a^2+3abx^n+3b^2x^{2n}} = px$$

aneb

$$(2') \qquad a^2+3abx^n+3b^2x^{2n} = p^{3n}x^{3n}.$$

Z této rovnice stanovíme dx, dělíme-li ji především x^{3n}, takže

$$a^2x^{-3n}+3abx^{-2n}+3b^2x^{-n} = p^{3n},$$

načež obdržíme

$$(a^2x^{-3n-1}+2abx^{-2n-1}+b^2x^{-n-1})\,dx = -p^{3n-1}dp$$

a násobením celé rovnice x^{3n+1} povstane

$$(a^2+2abx^n+b^2x^{2n})\,dx = -x^{3n+1}p^{3n-1}\,dp,$$

z čehož

$$(3) \qquad dx = -\frac{x^{3n+1}p^{3n-1}}{(a+bx^n)^2}\,dp.$$

Dosadíme-li hodnoty z (2) a (3) do (1), bude

$$(4) \qquad dV = -\frac{x^{3n}p^{3n-2}}{(a+bx^n)^3}\,dp.$$

Vzhledem k rovnici (2′) lze ve vzorci (4) jmenovatele upraviti takto:

$$(5)\qquad (a+bx^n)^3 = a(a^2+3abx^n+3b^2x^{2n})+b^3x^{3n}$$
$$= ap^{3n}x^{3n}+b^3x^{3n}$$
$$= x^{3n}\,(ap^{3n}+b^3).$$

Vložíme-li tuto hodnotu do (4), vyloučí se tím původní proměnná i nabudeme

$$(4')\qquad dV = -\frac{p^{3n-2}\,dp}{b^3+ap^{3n}},$$

tudíž V neboli

$$(1')\qquad \int \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[3n]{a^2+3abx^n+3b^2x^{2n}}} = -\int \frac{p^{3n-2}dp}{b^3+ap^{3n}}.$$

Jest-li

$$a = b = n = 1,$$

dostaneme integrál

$$(6)\qquad \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1+3x+3x^2}} = -\int \frac{pdp}{1+p^3}.\,^{*)}$$

---

*) Kdybychom do integrálu

$$V = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1+3x+3x^2}}$$

kladli

$$x = \frac{p}{1-p},$$

vznikl by z něho integrál

$$V = \int \frac{dp}{\sqrt[3]{1-p^3}}.$$

A tento integrál možno vyčísliti zavedením vytčené typické substituce

$$(\alpha)\qquad \sqrt[3]{1-p^3} = pu,$$

znamená-li u novou proměnnou.

Ztrojmocníme-li rovnici (α) a dělíme-li ji p^3, vzejde

$$p^{-3}-1 = u^3,$$

12*

VIII. Abychom vyčíslili integrál

$$(1)\quad V = \int \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[4n]{a^3+4a^2bx^n+6ab^2x^{2n}+4b^3x^{3n}}},$$

zavedeme podobně jako dříve substituci téhož tvaru, píšíce

$$(2)\quad R = \sqrt[4n]{a^3+4a^2bx^n+6ab^2x^{2n}+4b^3x^{3n}} = px,$$

kdež pro jednoduchost označujeme příslušnou odmocninu písmenem R.

Povýšíme-li tuto rovnici na $4n$ a dělíme-li ji pak x^{4n}, nabudeme

$$a^3x^{-4n}+4a^2bx^{-3n}+6ab^2x^{-2n}+4b^3x^{-n}=p^{4n}.$$

Differencujeme-li a krátíme-li ihned $-4n$,

$$(a^3x^{-4n-1}+3a^2bx^{-3n-1}+3ab^2x^{-2n-1}+b^3x^{-n-1})dx = -p^{4n-1}dp$$

a znásobíme-li celou tuto rovnici x^{4n+1}, vzejde

$$(a^3+3a^2bx^n+3abx^{2n}+b^3x^{3n})dx = -x^{4n+1}p^{4n-1}dp,$$

z čehož

$$(3)\quad dx = -\frac{x^{4n+1}p^{4n-1}}{(a+bx^n)^3}dp.$$

---

z čehož differencováním a krácením 3, vznikne

$$-\ {}_4dp = u^2du,$$

a tedy

$$(\beta)\quad dp = -p^4u^2du.$$

Vložíme-li hodnoty z (α) a (β) do posledního integrálu, bude

$$dV = -p^3udu.$$

Vzhledem k substituci

$$p^3 = \frac{1}{1+u^3}$$

nabudeme

$$V = -\int\frac{udu}{1+u^3},$$

což jest tvar integrálu differenciálu racionálního (6).

Klademe-li hodnoty z (2) a (3) do (1), dostaneme

$$(4) \qquad dV = -\frac{x^{4n}p^{4n-2}}{(a+bx^n)^4}\,dp.$$

Přihlížejíce k rovnici (2), můžeme ve vzorci (4) psáti jmenovatele

$$\begin{aligned}(5) \quad (a+bx^n)^4 &= a^4 + 4a^3bx^n + 6a^2b^2x^{2n} + 4ab^3x^{3n} + b^4x^{4n}\\ &= aR^{4n} + b^4x^{4n}\\ &= x^{4n}(ap^{4n} + b^4).\end{aligned}$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce (4), bude

$$(4') \qquad dV = -\frac{p^{4n-2}}{b^4 + ap^{4n}}\,dp$$

a tedy V neboli

$$(1') \qquad \int\frac{dx}{(a+bx^n)R} = -\int\frac{p^{4n-2}}{b^4+ap^{4n}}\,dp\,,$$

což jest opět tvar integrálu differenciálu racionálního. V tomto vzorci integrálním znamená ovšem R odmocninu vyjádřenou (2).

Přihlédneme-li k integrálům (1′) v odst. I., VII. a VIII., je z nich patrný zákon, jak možno integrály vytčených typů přímo napsati jako integrály differenciálů racionálních.

IX. Integrál tvaru

$$(1) \qquad V = \int\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}}$$

vyčíslíme, položíce zase

$$(2) \qquad \sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}} = px$$

aneb

$$(2') \qquad (a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n} = p^{\lambda n}x^{\lambda n}.$$

Dělíme-li celou tuto rovnici $x^{\lambda n}$, bude

$$(ax^{-n}+b)^\lambda - b^\lambda = p^{\lambda n},$$

což differencujeme a krátíme ihned λn,

$$-a\,(ax^{-n}+b)^{\lambda-1}x^{-n-1}dx = p^{\lambda n-1}dp,$$

z čehož

$$(3) \qquad dx = -\frac{x^{\lambda n+1}p^{\lambda n-1}}{a\,(a+bx^n)^{\lambda-1}}\,dp\,.$$

Vložíme-li hodnoty z (2) a (3) do integrálu (1), vzejde

$$(4) \qquad dV = -\frac{x^{\lambda n}p^{\lambda n-2}}{a\,(a+bx^n)^{\lambda}}\,dp\,.$$

Dle substituce (2′) však jest

$$(5) \qquad (a+bx^n)^{\lambda} = x^{\lambda n}\,(b^{\lambda}+p^{\lambda n})$$

a tato hodnota, vložena do vzorce (4), promění jej v

$$(4') \qquad dV = -\frac{p^{\lambda n-2}dp}{a\,(b^{\lambda}+p^{\lambda n})}$$

a proto V, t. j.

$$(1') \qquad \int\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^{\lambda}-b^{\lambda}x^{\lambda n}}} = -\frac{1}{a}\int\frac{p^{\lambda n-2}}{b^{\lambda}+p^{\lambda n}}\,dp\,,$$

což jest opět integrál differenciálu racionálního.

Je-li $\lambda = \frac{2}{n}$, jest

$$(6) \qquad \int\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt{(a+bx^n)^{\frac{2}{n}}-b^{\frac{2}{n}}x^2}} = -\frac{1}{a}\int\frac{dp}{b^{\frac{2}{n}}+p^2}$$

$$= -\frac{1}{ab^{\frac{1}{n}}}\,\text{arc ctg}\,\frac{p}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{ab^{\frac{1}{n}}}\,\text{arc tg}\,\frac{b^{\frac{1}{n}}x}{\sqrt{(a+bx^n)^{\frac{2}{n}}-b^{\frac{2}{n}}x^2}}\,.$$

Klademe-li do vzorce tohoto podobně jako Euler $n = 4$, $a = b = 1$, obdržíme integrál

$$(7) \qquad \int\frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}} = \text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}}\ ^{*)}$$

---

*) Integrál tento lze vyčísliti též takto:

a položíme-li v témže vzorci $n = 6$, $a = b = 1$, dostaneme

$$(8) \int \frac{dx}{(1+x^6)\sqrt{(1+x^6)^{\frac{1}{3}} - x^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{(1+x^6)^{\frac{1}{3}} - x^2}}.$$

Integrál (6) odst. I. není obsažen v integrálním vzorci (1′), ježto nelze tu upraviti příslušnou odmocninu na realný tvar $\sqrt[2n]{2x^n - 1}$. Udělíme proto integrálu (1′) podobu, aby byl integrál (6) odst. I. zvláštním jeho případem, což vytkneme v odstavci následujícím.

X. Chceme-li vyčísliti integrál

$$(1) \qquad V = \int \frac{dx}{(hx^n - k)\sqrt[\lambda n]{h^\lambda x^{\lambda n} - (hx^n - k)^\lambda}},$$

lze toho podobně dosíci substitucí

$$(2) \qquad \sqrt[\lambda n]{h^\lambda x^{\lambda n} - (hx^n - k)^\lambda} = px$$

Klademe

$$z = \frac{x}{\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2}}$$

a differencujeme-li tuto substituční rovnici,

$$(a) \qquad dz = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}\left[(1+x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

načež, sestrojíme-li výraz

$$(b) \qquad \frac{1}{1+z^2} = \frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2}{\sqrt{1-x^4}},$$

obdržíme násobením (a) s (b)

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}} - x^2}}$$

a integrujíce obě strany, dospějeme ke vzorci (7).

aneb

$$(2') \qquad h^\lambda x^{\lambda n} - (hx^n - k)^\lambda = p^{\lambda n} x^{\lambda n}.$$

Dělíme-li celou tuto rovnici $x^{\lambda n}$, vzejde

$$h^\lambda - (h - kx^{-n})^\lambda = p^{\lambda n},$$

a přímým differencováním dostaneme, krátíme-li ihned λn,

$$-(h - kx^{-n})\, kx^{-n-1} dx = p^{\lambda n - 1} dp,$$

z čehož

$$(3) \qquad dx = -\frac{x^{\lambda n + 1} p^{\lambda n - 1}}{k\,(hx^n - k)^{\lambda - 1}}\, dp\,.$$

Dosadíce hodnoty z (2) a (3) do (1), nabýváme

$$(4) \qquad dV = -\frac{x^{\lambda n} p^{\lambda n - 2}}{k\,(hx^n - k)^\lambda}\, dp.$$

Z rovnice (2′) však plyne

$$(hx^n - k)^\lambda = x^{\lambda n}\,(h^\lambda - p^{\lambda n}),$$

což dosadíme do (4), i bude

$$(4') \qquad dV = -\frac{p^{\lambda n - 2} dp}{k\,(h^\lambda - p^{\lambda n})}\,.$$

Integrál V jest tedy vyjádřen integrálem racionálního differenciálu

$$(1') \quad \int \frac{dx}{(hx^n - k)\sqrt[\lambda n]{h^\lambda x^{\lambda n} - (hx^n - k)^\lambda}} = -\frac{1}{k}\int \frac{p^{\lambda n - 2}}{h^\lambda - p^{\lambda n}}\, dp\,.$$

Klademe-li tu $h = k = 1$, $\lambda = 2$, obdržíme integrál (6) odst. I.

XI. Zvolme ještě obecnější integrál než jest (1) v odst. IX., a to

$$(1) \qquad V = \int \frac{x^{m-1} dx}{(a + bx^n)\sqrt[\lambda n]{[(a + bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}]^m}}\,.$$

Tu zavedeme opětně substituci identickou s (2) odst. IX. totiž

$$(2) \qquad \sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}} = px,$$

čímž se nezmění tamější rovnice (3), takže jest v platnosti

$$(3) \qquad dx = -\frac{x^{\lambda n+1} p^{\lambda n-1}}{a(a+bx^n)^{\lambda-1}}\, dp\,.$$

Vložíme-li hodnoty (2) a (3) do (1), nabýváme

$$(4) \qquad dV = -\frac{x^{\lambda n} p^{\lambda n-m-1}}{a(a+bx^n)^\lambda}\, dp$$

a vzhledem k rovnici (5) odst. IX. konečně

$$(4') \qquad dV = -\frac{p^{\lambda n-m-1}}{a(b^\lambda + p^{\lambda n})}\, dp,$$

což vede k integrálu V, t. j.

$$(1') \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(a+bx^n)\sqrt[\lambda n]{[(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}]^m}} = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n-m-1}}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\, dp.$$

Píšeme-li $-m$ místo m, obdržíme z (1′) integrál tvaru

$$(5) \qquad \int \frac{\sqrt[\lambda n]{[(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}]^m}}{x^{m+1}(a+bx^n)}\, dx = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n+m-1}}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\, dp.$$

Pro $m = 1$ obdržíme z (1′) známý integrál (1′) odst. IX. a z (5) nabýváme

$$(6) \qquad \int \frac{\sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}}{x^2(a+bx^n)}\, dx = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n}\,dp}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\,.$$

Klademe-li $m = \lambda$, dostaneme z (1′)

$$(7) \int \frac{x^{\lambda-1}dx}{(a+bx^n)\sqrt[n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}} = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n-\lambda-1}}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\, dp$$

a z (5) obdržíme

$$(8) \qquad \int \frac{\sqrt[n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}}{x^{\lambda+1}(a+bx^n)}\, dx = -\frac{1}{a}\int \frac{p^{\lambda n+\lambda-1}}{b^\lambda + p^{\lambda n}}\, dp.$$

V integrálu (1′) může m býti též číslo lomené. V případě, že $m = \frac{\alpha}{\beta}$, jest především pravá strana vzorce (1′)

$$-\frac{1}{a}\int\frac{p^{\lambda n-\frac{\alpha}{\beta}-1}}{b^\lambda+p^{\lambda n}}dp\,,$$

a klademe-li tu $p = z^\beta$, $dp = \beta z^{\beta-1}dz$, nabýváme integrál differenciálu racionálního, takže jest

$$(9)\quad \int\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}dx}{(a+bx^n)\sqrt[\beta\lambda n]{[(a+bx^n)^\lambda-b^\lambda x^{\lambda n}]^\alpha}} = -\frac{\beta}{a}\int\frac{z^{\beta\lambda n-\alpha-1}}{b^\lambda+z^{\beta\lambda n}}dz.$$

XII. Vyčíslíme nyní důležitý integrál rázu obecného

$$(1)\qquad V = \int\frac{(A_1+A_2x^{\alpha\omega n})^r}{(B_1+B_2x^{\beta\omega n})^s}\cdot\frac{x^{\omega m-1}dx}{\sqrt[n]{(a+bx^{\omega n})^m}}\,,$$

při čemž supponujeme, že α, β, m, n, r, s jsou čísla celistvá, kladná nebo záporná a že ω jest číslo kladné nebo záporné, buď celistvé nebo lomené.

Zvolíme nejjednodušší možnou algebraickou substituci, kladouce dle typické substituce, která byla při vyčíslení předchozích integrálů zavedena.

$$(2)\qquad \sqrt[n]{a+bx^{\omega n}} = px^\omega$$

aneb

$$(2')\qquad a+bx^{\omega n} = p^n x^{\omega n},$$

kde p jest nová integrační proměnná.

Dělíme-li rovnici (2′) $x^{\omega n}$, bude

$$(2'')\qquad ax^{-\omega n}+b = p^n,$$

z čehož differencováním jde

$$-\,\omega\,\frac{a}{x^{\omega n}}\,\frac{dx}{x} = p^{n-1}dp\,,$$

a ježto faktor $\frac{a}{x^{\omega n}}$ dle rovnice (2″) rovná se $p^n - b$, jest

$$-\omega(p^n - b)\frac{dx}{x} = p^{n-1}dp,$$

a tedy

$$(3) \qquad \frac{dx}{x} = -\frac{p^{n-1}dp}{\omega(p^n - b)}.$$

Umocníme-li rovnici (2) na m, bude

$$\sqrt[n]{(a+bx^n)^m} = p^m x^{\omega m},$$

z níž obdržíme

$$(4) \qquad \frac{x^{\omega m}}{\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}} = \frac{1}{p^m}.$$

Násobením rovnic (3) a (4) dostaneme

$$(5) \qquad \frac{x^{\omega m-1}dx}{\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}} = -\frac{p^{n-m-1}dp}{\omega(p^n - b)}.$$

Vyjádříme nyní první zlomek za integračním znaménkem jakožto funkci p, když z rovnice (2″) plynoucí

$$x^{\omega n} = \frac{a}{p^n - b}$$

dosadíme do výrazu

$$(6) \qquad (A_1 + A_2 x^{\alpha\omega n})^r = \left[A_1 + A_2\frac{a^\alpha}{(p^n - b)^\alpha}\right]^r = \frac{[A_1(p^n - b)^\alpha + A_2 a^\alpha]^r}{(p^n - b)^{\alpha r}},$$

a dle tohoto jest přímo výraz

$$(7) \qquad (B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s = \frac{[B_1(p^n - b)^\beta + B_2 a^\beta]^s}{(p^n - b)^{\beta s}},$$

tedy podíl obou dá žádaný zlomek

$$(8) \qquad \frac{(A_1 + A_2 x^{\alpha\omega n})^r}{(B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s} = \frac{[A_1(p^n - b)^\alpha + A_2 a^\alpha]^r}{[B_1(p^n - b)^\beta + B_2 a^\beta]^s}\cdot\frac{1}{(p^n - b)^{\alpha r - \beta s}}.$$

Znásobíme-li rovnice (5) a (8) a integrujeme-li, dospějeme k integrálu předloženému, který jest vyjádřen integrálem racionální funkce $p \,.\, dp$, t. j.

$$(1') \qquad \int \frac{(A_1 + A_2 x^{\alpha\omega n})^r}{(B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s} \cdot \frac{x^{\omega m-1} dx}{\sqrt[n]{(a + bx^{\omega n})^m}}$$

$$= -\frac{1}{\omega} \int \frac{[A_1(p^n - b)^\alpha + A_2 a^\alpha]^r}{[B_1(p^n - b)^\beta + B_2 a^\beta]^s} \cdot \frac{p^{n-m-1} dp}{(p^n - b)^{\alpha r - \beta s + 1}}\,.$$

Píšeme-li $-m$ místo m, nabudeme z (1') integrál

$$(9) \qquad \int \frac{(A_1 + A_2 x^{\alpha\omega n})^r}{(B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s} \cdot \frac{\sqrt[n]{(a + bx^{\omega n})^m}}{x^{\omega m+1}}\, dx$$

$$= -\frac{1}{\omega} \int \frac{[A_1(p^n - b)^\alpha + A_2 a^\alpha]^r}{[B_1(p^n - b)^\beta + B_2 a^\beta]^s} \cdot \frac{p^{m+n-1} dp}{(p^n - b)^{\alpha r - \beta s + 1}}\,.$$

Integrální vzorec (1') je tím pozoruhodný, že možno z něho dostati řadu integrálů známých, různými způsoby vyčíslovaných.

Klademe-li do (1') především $\alpha = \beta = 1$, obdržíme jakožto zvláštní vzorec

$$(10) \qquad \int \frac{(A_1 + A_2 x^{\omega n})^r}{(B_1 + B_2 x^{\omega n})^s} \cdot \frac{x^{\omega m-1} dx}{\sqrt[n]{(a + bx^{\omega n})^m}}$$

$$= -\frac{1}{\omega} \int \frac{(aA_2 - bA_1 + A_1 p^n)^r}{(aB_2 - bB_1 + B_1 p^n)^s} \cdot \frac{p^{n-m-1} dp}{(p^n - b)^{r-s+1}}$$

a jest-li tu $r = 0$, dostaneme

$$(11) \qquad \int \frac{x^{\omega m-1} dx}{(B_1 + B_2 x^{\omega n})^s \sqrt[n]{(a + bx^{\omega n})^m}}$$

$$= -\frac{1}{\omega} \int \frac{(p^n - b)^{s-1} p^{n-m-1} dp}{(aB_2 - bB_1 + B_1 p^n)^s}\,.$$

Dosadíme-li dále $m = \omega = s = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = -1$, $a = b = 1$, nabudeme

$$(12) \qquad \int \frac{dx}{(1 - x^n)\sqrt[n]{1 + x^n}} = \int \frac{p^{n-2} dp}{2 - p^n}\,.$$

Položíme-li do (12) $n = 3$ a pak $n = 4$, obdržíme dva známé integrály

$$(13) \qquad \int \frac{dx}{(1-x^3)\sqrt[3]{1+x^3}} = \int \frac{pdp}{2-p^3} \text{ *)}$$

a

$$(14) \qquad \int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt[4]{1+x^4}} = \int \frac{p^2dp}{2-p^4}.$$

Jest-li v integrálním vzorci (11)

$$m = \omega = s = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 0,$$

dospějeme k integrálu

$$(15) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[n]{a+bx^n}} = \int \frac{p^{n-2}dp}{b-p^n}.$$

Položíme-li tu $n = 3$, $a = b = 1$, vzejde

$$(16) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int \frac{pdp}{1-p^3},$$

píšeme-li však $n = 3$, $a = 1$, $b = -1$, bude

$$(17) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\int \frac{pdp}{1+p^3},$$

což jsou známé integrály, z nichž druhý byl již vytčen na str. 179.

---

*) Při vyčíslení tohoto integrálu klade se $x = \frac{1}{z}$ a v novém integrálu s proměnnou z zavádí se substituce $\sqrt[3]{1+z^3} = p$, čímž nabýváme tvar integrálu (13) na pravé straně uvedeného. Ale tato dvojnásobná substituce jest v naší obsažena, neboť dosadíme-li z prvé substituce $z = \frac{1}{x}$ do substituce druhé, povstane námi užívaná charakteristická substituce, $\sqrt[3]{1+x^3} = px$, kterou možno tedy integrál ten přímo vyčísliti.

Ostatně integrál (15) náleží k integrálům binomických differenciálů, které se píší v obvyklé formě

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx.$$

Aby takový integrál mohl býti racionalisován, supponuje se, jak známo, že

$$\frac{m+1}{n} \quad \text{anebo} \quad \frac{m+1}{n} + p$$

jest číslo celistvé, kladné nebo záporné.

Z těchto dvou method vede patrně druhá k cíli, neboť vzhledem k integrálu (15) jest

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

a proto vyčíslení téhož integrálu vyžaduje substituci

$$\sqrt{a + bx^n} = px.$$

Klademe-li do vzorce (11) $\omega = \frac{1}{2}$, bude

$$(18) \quad \int \frac{x^{\frac{m}{2}-1} dx}{\left(B_1 + B_2 x^{\frac{n}{2}}\right)^s \sqrt[n]{\left(a + bx^{\frac{n}{2}}\right)^m}} = -2 \int \frac{(p^n - b)^{s-1} p^{n-m-1} dp}{(aB_2 - bB_1 + B_1 p^n)^s}$$

a je-li pak $m = 1$ a n nahradíme-li $2n$, nabudeme

$$(19) \quad \int \frac{dx}{(B_1 + B_2 x^n)^s \sqrt[2n]{x^n (a + bx^n)}}$$

$$= -2 \int \frac{(p^{2n} - b)^{s-1} p^{2n-2} dp}{(aB_2 - bB_1 + B_1 p^{2n})^s}.$$

Když tu místo b napíšeme $2b$ a $s = 1$, $B_1 = a$, $B_2 = b$, obdržíme

$$\int \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{x^n(a+2bx^n)}} = \frac{2}{a}\int \frac{p^{2n-2}}{b-p^{2n}}\,dp,$$

identický to vzorec s (1') odst. VI. str. 177.

(Pokračování.)

Osmotická theorie článků koncentračních. I.

Vykládá

Dr. O. Šulc v Praze.

Před nedlouhou dobou bylo v tomto časopise ukázáno *), kterak na základě moderních názorů o roztocích, zejména však na základě theorie o povaze tlaku osmotického v roztocích a rovněž theorie o elektrolytické dissociaci elektrolytů, rozpuštěných v neelektrolytech lze cestou nad míru jednoduchou, zejména když se použije thermodynamické obdoby mezi tlakem osmotickým a tlakem plynů, dospěti k rovnici fundamentální pro nauku o veškerých zjevech tknoucích se vzniku sil elektromotorických mezi vodiči řádu prvého (kovy) a vodiči řádu druhého (elektrolyty).

Základní ona rovnice, na místě uvedeném blíže objasněná podává jednoduchý výraz pro sílu elektromotorickou π ve tvaru

$$\pi = \frac{RT}{n_e \varepsilon_0} l \frac{P}{p}.$$

Máme-li hned na mysli elektrodu *zvratnou*, jest P elektrolytický tlak kovu, p osmotický tlak kovu v roztoku elektrolytu, n_e počet nábojů na jednom iontu soustředěných, tedy veličina dle zákona *Faradayova* srovnalá s mocenstvím (valencí) iontů, T absolutní teplota, konstanty pak mají obvyklý význam, a sice:

R jest veličina stálá ze zákona o plynech dokonalých, jejíž hodnota jest v míře thermické

$$R = 1{\cdot}96 \text{ cal.},$$

a poněvadž jest

---

*) Roč. XXVII. str. 12.